普通高等教育"九五"教育部重点教材



工程流体力学(第2版)

ENGINEERING FLUID MECHANICS

陈卓如 金朝铭 王洪杰 王成敏 编

陈卓如 主编

高等教育出版社

UID MECHANICS

UID MECHANICS
UID MECHANICS
UID MECHANICS

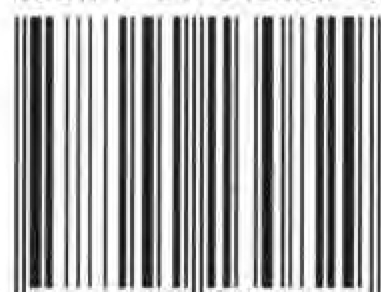
封面设计 刘晓翔

ENGINEERING F

ENGINEERING F

ENGINEERING F

ENGINEERING F


ISBN 7-04-013082-3

9 787040 130829 >

定价 37.70 元

普通高等教育“九五”教育部重点教材

工程流体力学(第2版)

Engineering Fluid Mechanics

陈卓如 金朝铭 王洪杰 王成敏 编

陈卓如 主编

高等教育出版社

·北京·

内容简介

本书是1992年出版的《工程流体力学》一书的第2版，原书于1995年获国家教委优秀教材一等奖。本书注重加强基础理论，注意理论联系实际，力求培养学生运用基本理论分析和解决问题的能力。全书包括绪论、流体静力学、流体运动学、理想流体动力学基础、旋涡理论基础、理想流体平面势流、粘性流体动力学、流动相似原理基础、流体运动阻力与损失、管路水力计算、粘性流体绕物体流动、可压缩流体的一元流动、可压缩流体的平面流动、流体要素测量等共十四章，每章后均有较多例题和习题供选用。

本书各章节内容既相互联系，又相对独立，适当取舍组合，可以作为能源动力、机械类专业的本科生教材、教师和研究生的教学参考书，亦可作为各相关专业工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程流体力学/陈卓如主编．—2版．—北京：高等教育出版社，2004.1

ISBN 7-04-013082-3

Ⅰ.工…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.工程力学：流体力学-高等学校-教材　Ⅳ.TB126

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第080807号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 64054588
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010 82028899		http://www.hep.com.cn
经销	新华书店北京发行所		
印刷	北京中科印刷有限公司		
		版次	1992年9月第1版
开本	787×960 1/16		2004年1月第2版
印张	33.25	印次	2004年1月第1次印刷
字数	620 000	定价	37.70元

第 2 版前言

本书自1992年出版以来，得到了有关院校和水力学、流体力学课程教学指导组专家们的支持和肯定，1995年获得了国家教委第三届优秀教材一等奖。

本次修订面临21世纪教育改革，正值高等学校专业调整，要求拓宽专业、加强基础，对培养高素质人才提出了新的要求，因此，第2版按照课程教学组新编制的高等工业学校机械、能源动力类工程流体力学课程教学基本要求进行。修订中保持了原书的体系特色，即从推导普遍适用的纳维－斯托克斯方程等基本方程出发，讲述该运动方程在多种特殊限制条件下的求解应用，导出流体力学的基本公式，力求加强理论基础，培养学生分析解决问题的能力。这一体系受到了有关院校的欢迎。

修订中注意删除了一些陈旧重复的内容，对某些章节进行了合并和改写。比如删除了§2－5节，将中学已学过的帕斯卡定律删去，并将液体测压计原理部分内容归入新增加的“流体要素测量”一章中；删去了§2－9节，将其中浮体的阿基米德原理作为压力体内容的延伸；将原书§3－2和§3－3节合写为一节；将§4－4节删除，并对其余节中的部分内容作了改写，使表述更为准确；将§6－3和§6－4节合并，对原书§6－8绕圆球流动进行了改写，并对圆柱绕流中的马格努斯效应和绕翼型的平顺绕流假设等力学现象作了更为直观的解说；第九章中增加了一些常用的管路局部阻力，并列表予以表示；第十章管路水力计算的§10－1～§10－7节合并，其中短管的水力计算和简单长管的水力计算合并改写为等径无分支管路的水力计算，对枝状管路和网状管路的水力计算重写，对计算机在管路水力计算中的应用采用了更为通用的高级语言；增写了第十四章流体要素测量，既讲述了压力、流速、流量测量的基本原理，同时介绍了在工程实际和研究中常用的一些近代量测技术。为了增强学生应用流体力学基本理论分析解决问题的能力，修订中还适量增加了例题和习题，使教师和学生有更多选用的余地。

本次修订中按照国家标准对全书的名词术语和符号单位作了修正。修订中除保持原书中重视物理力学概念表述的同时，还注意了文字叙述的严谨和准确，对文字和内容作了进一步斟酌和润色，力图以此对学生产生潜移默化的影响。

全书各章节间既相互联系，又相对独立，因此各校授课教师可以根据学校特点和相应专业需要选取教学内容。其中绪论、流体静力学、流体运动学、理想流体动力学基础、粘性流体动力学、流体运动阻力与损失、管路的水力计算、流动相似原理基础、可压缩流体的一元流动等章内容适合机械类专业选用，并可适当选用流体要素测量的部分内容，而能源动力类专业可以选用本书的全部内容。

第2版分工如下：陈卓如修订第四、五、六、七、八、十一、十三、十四章；金朝铭修订第一、三、九、十二章和第十章的§10-1、§10-2、§10-4；王成敏修订第二章、王洪杰修订全部例题和习题，以及第十章的§10-3。全书由陈卓如主编定稿。

本书的修订，得到了高等学校工科水力学、流体力学课程教学指导组的悉心关怀和指导，兄弟院校在原书使用过程中也曾提出了不少有益的意见和建议，哈尔滨工业大学流体力学教研室对本书的修订给予了热情的支持和帮助，谨在此向他们表示深切的谢意。修订稿由上海交通大学刘桦教授审阅，提出了许多宝贵的修改意见，谨在此表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中难免存在不足和谬误之处，恳望读者和专家们指正。

编　者

2003年3月

第1版前言

工程流体力学是动力类各专业及相近有关专业的一门重要技术基础课，它为该类专业主要专业课程的学习打下必要的理论基础。

本书按照高等工业学校工程流体力学课程教学基本要求编写，是动力类各专业的教材，课程时数为80学时左右。本书也可作为机械工程类、仪器类等有关专业的参考书。

工程流体力学内容十分广泛，即使同一课程基本要求也可以有不同的讲授体系。在本书编写中，除注重加强理论基础外，并注重联系工程实际。我们从推导普遍适用的纳维－斯托克斯方程等基本方程出发，讲述普遍运动方程在各种特殊限制条件下的求解应用，导出其它公式，力求系统地讲述流体运动的基本规律，使学生了解工程上处理流体力学问题的方法，并在推导过程中注意阐明其物理意义和应用条件。这样做既利于学生系统地学习基本理论，又利于培养学生运用基本理论分析和解决实际问题的能力。这样的讲授体系安排还避免了一些不必要的重复。

本书由陈卓如编写第四、五、六、七、八、十一、十三章和十三章习题及部分例题；金朝铭编写第一、三、九、十和十二章，其中第十章§8由包钢和王洪杰编写；王成敏编写第二章；包钢编写除十三章习题外的全部习题和大部分例题。全书由陈卓如主编。

山东工业大学孔珑教授审阅了全部书稿，对书稿提出了很多宝贵的修改意见，使书稿的质量得以提高。在本书编写过程中，哈尔滨工业大学流体力学教研室的同志们曾给予了热情的支持和帮助，在此一并表示深切的谢忱。限于作者水平，书中难免存在错误和不足之处，恳望读者指正。

编　者

1991年11月

符 号 表

符号	含义
A	面积
Ac	收缩断面面积
dA	微元面积
	气体对外作功
a	加速度
	椭圆长半轴
	矩形长度
	等边三角形边长
	面积
b	宽度
	积分常数
	椭圆短半轴
	矩形宽度
c	声速
	水击波传播速度
	相似比例常数
	积分常数
	比热容
C_1	积分常数
C_D	绕流阻力因数
C_e	入口段效应流量修正因数
C_f	摩擦阻力因数
C_n	管嘴流量因数
Co	孔口流量因数
	滞止声速
c_p	比定压热容
C_p	无因次压强因数
c_V	比定容热容
c_{cr}	临界声速
D	直径
d	直径
	相对密度
d_e	当量直径
Eu	欧拉数
E	材料弹性模量
	恩氏粘度
	内能
e	比内能
	单位重力流体的总机械能
	偏心量
d_e	气体内能增量
F	力
F_D	绕流阻力
F_b	浮力
F_f	摩擦力
Fr	弗劳德数
f	单位质量力
σ	应力
f_k	卡门涡脱体频率
f_x，f_y，f_z	单位质量力的坐标分量
$f(x,y,z)$	坐标的函数

符号	含义
g	重力加速度
G	重力
H_1	形状因子
h	高度
	液柱高度
H	焓
	总能量
h_j	非恒定流动的惯性能头
h_f	沿程水头损失
H_0	滞止焓
h_W	单位重力流体能量损失
h_V	真空度
h_ζ	局部水头损失
I_x，I_{Cx}	惯性矩
I_{xy}	惯性积
i	虚数
J	旋涡强度
K	体积模量
	流量模数
	动量
κ	压缩率
	等熵指数
L	长度
	动量矩
L_e	入口起始段长度
l	长度
	混合长度
m	质量
M	偶极矩
	作用力矩
Ma	马赫数
M_{cr}	无量纲速度
Ne	牛顿数
n	转数
	指数
	气体多变常数
in	单位法向矢量
F_p	压力
P	功率
	压力函数
p_x, p_y, p_z	压强的坐标分量
p_a	大气压强
p	压强
p_m	计示压强
p_0	滞止压强
p_V	汽化压强、真空度
p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}	法向压强力
p_∞	无穷远处压强
p_{cr}	临界压强
$\overline{p}$	时间平均压强
p'	脉动压强
$\overline{F}_p$	作用力的共轭值
$\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}$	附加法向应力
F_Q	质量力
F_{Qx}, F_{Qy}, F_{Qz}	质量力坐标方向分量
q	流量
q_m	质量流量
q_V	体积流量
q_{cr}	临界流量
dq	传输给气体的热量
R	气体状态常数
	内径
	水力半径
r，θ，z	柱坐标系坐标分量

符号	含义
$r,\ \theta,\ \varphi$	球坐标系坐标分量
$R,\ \Theta,\ z$	单位质量力的柱坐标分量
$R,\ \Theta,\ \Phi$	单位质量力的球坐标分量
Re	雷诺数
Re_{cr}	下临界雷诺数
Re'_{cr}	上临界雷诺数
r	半径
	曲率半径
S	距离
	单位质量流体的熵
St	斯特劳哈尔数
T	温度
	时间
	水击波的周期
T_0	滞止温度
T_{cr}	临界温度
t	温度
	时间
t_0	水击波的波相
t_k	闸门关闭时间
$u,\ v,\ w$	相对运动速度分量
U	力的势函数
V	断面平均速度
	体积
	压力体体积
V^*	边界层外势流区中速度
V_∞	无穷远来流速度
$\overline{V}$	复速度，共轭速度
V_{cr}	临界速度
v	流速
	比体积
$\bar{v}$	时间平均速度
v'	脉动速度
$v'_x,\ v'_y$	脉动速度的坐标分量
$\overline{v'}$	脉动速度的时均值
v_*	剪切速度、切应力速度
v_m	射流轴心线上速度
v_∞	无穷远来流速度
$v_x,\ v_y,\ v_z$	速度的坐标分量
$v_r,\ v_\theta,\ v_z$	柱坐标系的速度分量
$v_r,\ v_\theta,\ v_\varphi$	球坐标系的速度分量
$W(z)$	复位势函数
W_f	单位质量流体摩擦阻力作功
$x,\ y,\ z$	笛卡尔坐标分量
x_T	转折截面至射流
	极点的距离
$X_D,\ Y_D$	压力中心的坐标分量
y_C	形心的坐标分量
z	复数变量
α	角度
	体膨系数
	冲角
	动能修正因数
α_0	动量修正因数
β	角度
	激波角
γ	角变形速度
	比热比
$\gamma_x,\ \gamma_y,\ \gamma_z$	角变形速度分量
Γ	速度环量
δ	边界层厚度
	粘性底层厚度
	折转角
$\overline{\delta}$	微小量级
δ^*	位移厚度，排挤厚度

δ^{**}	动量损失厚度
Δ	绝对粗糙度
$\overline{\Delta}$	相对粗糙度
ζ	局部损失因数
ε	相对偏心率
	孔口断面收缩因数
ξ_e	附加压强损失因数
η	效率
θ	角度
	射流极角，射流扩散度
λ	粘温指数
	沿程损失因数
λ_p	压强损失因数
μ	马赫角
	动力粘度
ν	运动粘度
π	圆周率
	π 定理
ρ	密度
ρ_0	滞止密度
ρ_{cr}	临界密度
σ	应力
	表面张力系数
Σ	和
τ	切应力
τ'	紊流附加切应力
φ	速度势函数
	角度
ψ	流函数
χ	湿周
ω	角速度
$\overline{\omega}$	旋转角速度向量
ω_x，ω_y，ω_z	角速度的坐标分量
∞	无穷远，无穷大
∇	哈密尔顿算子
∇^2	拉普拉斯算子

目　　录

第1章
绪　论

§1-1　流体力学研究的内容和方法

流体力学是研究**流体**平衡和运动规律的一门科学，是**力学**的一个重要分支。

流体力学的基本任务在于建立描述流体运动的基本方程，确定流体经各种通道及绕流不同物体时速度、压强的分布规律，探求能量转换及各种损失的计算方法，并解决流体与限制其流动的固体壁之间的相互作用问题。

流体力学按其研究内容侧重方面的不同，分为理论流体力学(通称为流体力学)和应用流体力学(通称为工程流体力学)。前者主要采用严密的数学推理方法，力求准确性和严密性。后者则侧重于解决工程实际中出现的问题，而不去追求数学上的严密性。当然，由于流体运动的复杂性，在一定程度上，两种方法都须借助于实验研究，得出经验或半经验的公式。

在实际工程的许多领域里，流体力学一直起着十分重要的作用。无论是水利工程、动力工程、航空工程，还是化学工程、机械工程等都在日益广泛地应用着流体力学。就某种意义而言，也正是在流体力学的研究工作不断取得成就的前提下，才促进了这些部门的大力发展。

流体力学研究的对象包括液体和气体，它们统称为流体。流体力学研究的是流体中大量分子的宏观平均运动规律，而不考虑其具体的分子运动。

工程流体力学主要讲述流体力学的基本概念、基本理论及在工程实际中的应用。本教材是能源动力类和机械类各专业的教学用书，其研究内容以不可压缩流体的流动为主，但对某些专业所涉及的可压缩流体基本理论也作了相应的阐述。

由于在各种热能动力和许多机械设备中采用水、汽、空气、油、烟气等流

体作为工作介质，因此，只有掌握了流体的基本运动规律才能真正了解这些设备的性能和运行规律，才能正确地从事设计和运行管理。所以，工程流体力学是能源动力类和机械类各专业的主要专业基础课程之一。

流体力学作为一门技术科学，研究方法也遵循“实践－理论－实践”的基本规律。其研究过程可大致分为以下步骤：

（1）对自然界和生产实践中出现的流体力学现象进行观察、研究，从中找出共性问题作为研究课题；

（2）建立模型：对自然现象和实践问题进行研究、认识，从中找出主要因素，忽略次要因素，建立抽象的**数学模型**；

（3）对数学模型进行理论分析和实验研究，总结并验证基本规律，形成理论；

（4）以得到的基本理论去指导和预言实践，并在实践中检验、修正理论使其完善。

§1－2 流体力学发展简史

人类为了生存，自远古以来一直持续不断地与自然界进行着不懈的斗争。流体力学同其它自然科学一样，是在长期的生产实践和科学研究中逐渐发展成为自然科学的一个重要分支。

人们最早对流体知识的认识是从治水、供水、灌溉、航行等方面开始的，在远古时代就在诸多方面取得了很大的成就。公元前2000—公元前1000年，埃及、巴比伦、罗马、希腊和印度等地的水利工程、造船和航海等事业的发展就是很好的例证，说明人们在大量的与自然斗争和生产实践中，对水流运动的规律已经有了一定的认识。而我们的祖先于远古时代就在水利工程方面作出过许多杰出的贡献。公元前2286—公元前2278年的大禹治水已成为中华民族的千古佳话。公元前300多年，人们为了消除岷江水患和发展生产，在四川灌县修建了著名的都江堰水利工程，将岷江分为内外两江。在枯水期，由内江满足下游的灌溉用水；而在洪水期，由外江泄洪保证下游灌区的安全，由此总结出“深淘滩，低作堰”，说明当时我国人民对明渠水流和堰流已经有了一定的认识和掌握。由公元前485年开始修建，直到隋朝才完成的大运河，从杭州到北京长达1782 km，运河使用的多处船闸，以及各段设置的合理性，充分表明了我国劳动人民在建设水利工程方面的聪明才智。这些工程至今仍在农业生产和交通等方面起着重要的作用。

流体力学作为一门完整的学科发展起来是和历史上许多学者、科学家的努

力分不开的。正如奥地利物理学家汉斯·蒂林格在《从牛顿到薛定谔的理论物理学之路》一文中所指出："每一门科学都是用世世代代研究者无数努力的代价建立起来的大厦"。古今中外许许多多从事流体力学问题研究的学者，如同卓越的建筑师，用自己的聪明才智和辛勤劳动的汗水筑成了日趋完整的流体力学"大厦"。

最早从事流体力学现象系统研究并使之成为学科的学者是古希腊哲学家阿基米德(Archimedes,公元前287—公元前212)。他约在公元前250年撰写了《论浮体》一书，书中首次总结并提出了流体静力学的基本理论，奠定了流体静力学的基础。这是由于公元前3世纪古希腊生产力的发展促进了刚体力学和欧几里德几何等方面的发展，同时带动了人们对流体力学现象的研究。

在这以后的一段较长的历史时期，没有关于流体力学发展的有关资料的记载。

15世纪末以来，随着欧洲资本主义的兴起，工农业生产得到了很大发展，流体力学也与其它学科一起有了显著的进展。首先是著名的物理学家、艺术家列奥纳德·达·芬奇(Leonardo Da Vinci,1452—1519)在米兰附近建造了世界上第一个小型水渠，同时还比较系统地研究了沉浮、孔口出流、物体运动阻力、流体在管路和水渠中流动等问题，从而为水利工程和流体力学问题的研究开辟了一个新的时代。

从达·芬奇时代开始，水力学和流体力学得到了迅速的发展。1586年斯蒂芬(S.Stevin,1548—1620)发表了"水静力学原理"。1650年帕斯卡(B.Pascal,1623—1662)建立了液体中压强传递的"帕斯卡原理"。1612年伽利略(G.Galileo,1564—1642)建立了关于物体沉浮的基本原理，使流体静力学有了进一步的完善，他还首先将实验方法引人力学，用以研究运动物体受到的阻力。

从17世纪中叶至20世纪初是流体力学的形成与发展时期，其间逐步建立和发展了流体力学的理论与实验方法，并应用于解决各种流体力学的实际问题。

1643年托里拆利(E.Torricelli,1608—1647)论证了孔口出流的基本规律。1686年牛顿(I.Newton,1642—1727)提出了流体粘性的概念，通过实验建立了液体内摩擦力的确定方法——牛顿内摩擦定律，并进一步为建立粘性流体运动方程创造了条件。1738年伯努利(D.Bernoulli,1700—1782)对孔口出流和管道流动进行了大量的观察和测量研究，建立了理想流体的运动方程——伯努利方程。1775年欧拉(L.Euler,1707—1783)提出了描述无粘性流体的运动方程——欧拉运动微分方程，他是理论流体力学的奠基人。

这个时期的理论大多是对自然现象在一些假设下的数学推理和实验的总结，但是某些理论和实际之间还存在着较大的差异。1752年达朗贝尔(d'Alem-

bert,1717—1783)在研究物体在流体中运动时受到的阻力得出，物体在理想流体中运动时不存在对物体运动的阻力，但实验证明这个结论是不正确的，这个被称为“**达朗贝尔佯谬**”的问题说明了在那个时期解决流体流动问题中所用理论的局限性。

由于理论分析和实验研究两种方法的侧重有所不同，从这个时期起在流体流动问题的研究中出现了两个体系。一个是在某些假设下以严密的数学推论为主，从理论上处理问题，人们称为“理论流体力学”或“流体力学”；另一个则以实践和实验研究为主，侧重于解决工程实际问题，称为“水力学”。这两个体系的典型代表前者为欧拉，后者为伯努利。

这段时期内，由于工程技术快速发展的需要，人们通过大量的工程实际观察和实验研究，得到了解决各种流体力学实际问题的经验公式。1769年谢齐(A.Chézy,1718—1798)在总结各种渠道流动的基础上提出了明渠流动流速和流量计算的谢齐公式，为了计算谢齐系数，又总结得到了曼宁(R.Manning,1816—1897)公式和巴甫洛夫斯基公式。为进行流体流动的实验测试，1732年皮托(H.Pitot,1695—1771)发明了用于流速测量的皮托管，1797年文丘里(G.B.Venturi)研制了用于流量测量的文丘里管。

随着工业革命的发展，从19世纪开始，流体力学理论日趋完善。1823年纳维(M.Navier,1785—1836)和1845年斯托克斯(G.G.Stokes,1819—1903)分别通过不同途径，建立了实际粘性流体运动方程组——纳维－斯托克斯(N－S)方程，奠定了粘性流体力学的理论基础，并逐渐发展成为流体力学的一个重要组成部分。

19世纪末到20世纪，随着现代工农业和航空技术的迅速发展，大大促进了流体力学的进展。不断出现的很多新兴工业领域提出了流体力学问题，要求流体力学的学者们研究解决。显然，以纯理论分析为基础的流体力学和以实验研究为主的水力学已不能适应技术发展的需要，因此出现了理论分析和试验研究相结合的趋势，在这种结合的研究中，量纲分析和相似原理起着重要的作用。这一阶段中取得突出成就的代表有：1883年雷诺(O.Reynolds,1842—1912)通过实验得到的重要结果给出了液体流动的两种流动状态——层流和紊流，并得到了判别流态的雷诺数，从而为流动受到的阻力和能量损失的研究奠定了基础，接着在1894年雷诺又提出了紊流流动的基本方程——雷诺方程；瑞利(L.Rayleigh,1842—1919)的量纲分析方法和雷诺的相似理论解决了流体力学问题研究中的理论分析与实验研究的结合；而弗劳德(W.Froude,1810—1879)和雷诺等学者提出的一系列数学模型，为相似理论在流体力学中的应用开辟了更为广阔的途径，1872年弗劳德应用相似理论第一次建造了船舶拖曳实验用的水池；1891年兰彻斯特(F.W.Lanchester,1868—1946)提出绕流速度环量产生升力的概念，为升力理论的建立创造了条件，他也是第一个提出有限翼展理论的

人；1889年儒科夫斯基(N.E.Zhoukowski,1847—1921)导出了渗流流动微分方程，奠定了渗流的理论基础；同时，儒科夫斯基及齐奥尔科夫斯基(K.A.Zhiourkowski,1857—1935)、恰普雷金(S.A.Chaplygin,1869—1942)、库塔(W.M.Kutta,1867—1944)等研究了物体绕流和翼栅理论，在1905年提出了圆柱绕流的升力定理，奠定了现代空气动力学的基础；1904年普朗特(L.Prandtl,1875—1953)通过观测流体对固体边壁的绕流，提出了边界层的概念，并通过对层流边界层的研究，形成了层流边界层理论，解决了绕流物体的阻力计算问题，他还在研究紊流流动时提出了著名的混合长理论；20世纪40年代尼古拉兹(J.Nikuradse)对各种人工光滑管和粗糙管的水力摩擦损失因素进行了系统、准确的实验研究和量测，绘制了著名的尼古拉兹曲线图，为管道的沿程损失计算提供了依据。

20世纪中叶以后，随着人类开始进入太空飞行，以及随着各种科学技术的迅速发展，流体力学的学者们除了对湍流、涡动力学、流动稳定性与过渡和非恒定流动等理论问题继续进行研究外，更主要的是转而研究石油、化工、冶金、能源、环保、生物等领域中的流体力学问题，上述这些研究都取得了丰硕的成果，既促进了生产技术的发展，又大大丰富了流体力学的学科内容。1947年第一台电子计算机问世后，数值计算技术得到了飞速发展，有限差分法、有限元法、边界元法、有限分析法等计算方法相继派生出来，并且在求解流体力学的问题中得到了广泛的应用，流体力学中的数值计算已成为继理论分析和实验研究之后的第三种重要的研究方法，是目前对于各种复杂的流体流动问题求解压力场、速度场的重要工具。而且可以预见，随着计算机的计算速度和容量的提高，以及计算方法的不断进步，数值计算在复杂的流体力学问题的求解中将发挥愈来愈重要的作用。

科学技术的高速发展，以及科学技术和工业生产的日趋复杂，使现代流体力学的研究内容有了明显的变化，出现了与相关的邻近学科相互渗透，形成了许多新分支或交叉学科，如计算流体力学、**电磁流体力学**、生物流体力学、**多相流体力学**、非牛顿流体力学、流变流体力学、**高速气体动力学**、**稀薄气体动力学**、环境流体力学、物理-化学流体力学、流体机械流体力学等。由于流体力学的发展趋向于渗入更为广泛的领域，因而已使其成为宇宙航行、海洋学、气象学、现代医学、能源、化工、水利技术、流体机械等许多科学技术的重要组成部分。

§1-3 流体的连续介质模型

流体(牛顿流体)是指易于流动的物体。就其力学行为来讲，流体可以承受

很大的压力，但往往几乎不能承受拉力。对于流体而言，在极小的切力作用下都将产生无休止的变形，即流动，直到切力停止为止。而固体则既能承受压力又能承受拉力和切力。固体在外力作用下会产生变形，但在一定范围内，变形将随外力的消失而恢复。由此可以看出，固体有一定的形状，而流体却没有，它取决于盛装流体的容器的形状。

流体分为液体和气体。液体和气体的主要区别之一就是流动性的大小。由于气体远比液体具有更大的流动性，故它总是充满所存在的空间，而液体通常只占据容器体积的一部分，与气体接触处存在自由表面。这种区别的本质在于二者分子间距相差悬殊，气体分子间距大到使彼此间的牵制力显得很小，不足以造成相互间的约束。而液体分子间的距离较小，彼此的作用力大，使得液体的分子只能在一定的小范围内作无规则运动，不能像气体分子那样，作足以充满空间的自由运动。

液体和气体另一个主要区别在于可压缩性。气体在外力作用下，表现出很大的可压缩性，而液体却不然。例如：水的压强由一个大气压增加到100个大气压时，其体积仅减少原体积的0.5%；而完全气体在等温过程中的体积同绝对压强成反比关系变化。可见两者的可压缩性相差甚远。因此，在研究低速气体(马赫数小于0.3)流动规律时，将气体看作与液体一样的不可压缩流体处理，但在研究气体的高速流动时，必须考虑气体的压缩性。

从微观角度来看，流体和其它物体一样，也是由大量分子组成的。这些分子总是不停地、杂乱无章地运动着，分子之间存在着间隙。因此，流体实际上并非是连续充满空间的物质。如果从分子运动入手来研究流体流动的规律，显然将十分困难，甚至难以进行。而流体力学是研究在外力(如重力、压力、摩擦力等)作用下流体平衡和运动的规律，所研究的是大量分子的平均行为。另外，流体力学所研究的实际工程尺寸要比分子间距大得无法比拟(通常情况下，1 mm^3的空气约有2.7×10^{16}个分子)。因此，在流体力学的研究中，将实际的由分子组成的结构用一种假想的流体模型——流体微元来代替。流体微元由足够数量的分子组成，连续充满它所占据的空间，彼此间无任何间隙。这就是1753年由欧拉首先建立的“连续介质模型”。这样，就不再去研究流体分子的运动，而是去研究模型化了的连续流体介质。研究对象的转变，使我们可以将描述流体流动的一系列参数，如压强、速度、加速度、密度等在绝大多数情况下看成是连续分布的。从而可以把它们看作是坐标和时间的连续可微函数，这就使得在流体力学的研究中可以使用微分方程等强有力的数学工具。整个流体力学研究的飞速发展与引入连续介质模型是密切相关的，而从所建立的流体力学基本理论与实际工程应用结果来看，引入连续介质模型是完全合理的，也是完全必要的。

但是，我们也要指出，使用连续介质模型也有一定范围。在某些特殊流动的研究中，它并不适用。当所研究的工程实际尺寸与分子的自由行程为相同或相近的数量级时，就不能应用连续介质作为其研究模型了。例如，火箭在空气稀薄的高空中飞行的计算，极近壁(例如离壁面约 1×10^{-5} mm)处流动的计算等，就必须从微观着手进行研究。

§1－4 作用在流体上的力

任何物体的平衡和运动都是受力作用的结果。因此，在研究流体的力学规律之前，必须首先分析作用在流体上的力的种类和性质。

作用在流体上的力通常分为两大类。

1. 质量力

处于某种力场中的流体，所有质点均受有与质量成正比的力，这个力称为质量力。如重力就是在力学中常见的质量力，它是由**重力场**所施加的。当所研究的流体作加速运动时，根据达朗贝尔原理虚加于流体质点上的惯性力，和作匀速旋转运动的流体所受到的离心力均属于质量力。为研究方便起见，前者常称为外质量力，后者称为惯性力。

在流体力学中，常采用单位质量力作为分析质量力的基础。单位质量力是指单位质量的流体所受的质量力。显然，单位质量力的数值即为流体质点的加速度值，如 a，$\omega^2 r$。设单位质量力 f 在直角坐标系中三个坐标轴 x，y，z 方向的分量分别为f_x，f_y，f_z，则 f_x，f_y，f_z 就是加速度在三个轴向的分量。如在流体中取体积 ΔV，所含质量为 Δm，在重力场中(取直角坐标系的 z 轴垂直于水平面)单位质量力的分量为

$$f_x=0$$

$$f_y=0$$

$$f_z=\frac{-\Delta m\cdot g}{\Delta m}=-g$$

式中负号表示所取坐标轴 z 的方向与重力加速度方向相反。

由此可以看出，由流体受力状态很容易确定单位质量力的分量。因此，质量力或单位质量力通常是已知的。采用这种分量形式为流体力学的研究提供了许多方便。

2. 表面力

表面力是指作用在所研究流体外表面上与表面积大小成正比的力。

在流体力学的研究中，常常自流体内取出一个分离体作为研究对象。这时，表面力指的是周围流体作用于分离体表面上的力。

表面力与作用面积成正比，单位面积上的表面力称为应力，它是表面力在作用面积上的强度。为研究方便，常将应力分为切向应力和**法向应力**。**切应力** τ 是流体相对运动时因粘性内摩擦而产生的，因此，静止流体中不存在切向应力，即这时流体作用面积上只有法向力作用；又因为流体几乎不能承受拉力，所以静止流体中的法向力只能沿着流体表面的内法线方向，称为压力，其单位面积上的压力，即法向应力，称为**压强**。

在所取分离体表面上，取包围某点 A 的面积 ΔA，如图 1－1 所示。作用于 ΔA 上的总表面力为 ΔF，其法向分量为 ΔF_n，切向分量 ΔF_τ。当 ΔA 向 A 点收缩趋近于零时，得 A 点的应力、压强和切应力为

$$\sigma_A = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$p_A = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

$$\tau_A = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta A}$$

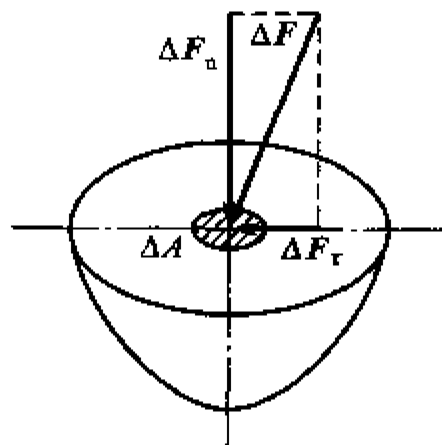


图 1－1

表面张力也是表面力的一种，它是作用在流体自由表面沿作用面法线方向的拉力。

§1－5 流体的主要物理性质

本节将讨论流体的主要物理性质。在进行流体力学的各种研究和工程计算时，必须首先了解流体的基本物理属性。

1. 流体的密度、比体积和相对密度

流体同其它物体一样，具有**质量**。流体的**密度**和比体积是流体的重要属性。

(1) 流体的密度

流体的密度以单位体积流体所具有的质量来表示，它表示流体在空间的密集程度，以符号 ρ 标记。

取包围空间某点微元体积 ΔV，其中所含流体质量为 Δm，比值 $\Delta m/\Delta V$

即为 ΔV 中之平均密度。若令 $\Delta V \to 0$，即当 ΔV 向该点收缩趋近于零时为该点的流体密度，即

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

对空间各点处密度相同的均质流体，其密度为

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1-1}$$

式中 ρ——流体的密度，kg/m^3；

m——流体的质量，kg；

V——流体的体积，m^3。

（2）流体的比体积

通常将单位质量流体所占据的空间体积称为**比体积**，以符号 v 标记。显然，流体的密度与比体积互为倒数，即

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{1-2}$$

式中 v——流体的比体积，m^3/kg。

流体的密度 ρ 和比体积 v 都随着其所处的压强 p 和温度 T 而变化，即 $\rho = \rho(p, T)$，$v = v(p, T)$。又因为压强和温度都是空间点坐标和时间的函数，所以，密度和比体积也都是空间点坐标和时间的函数，即 $\rho = \rho(x, y, z, t)$，$v = v(x, y, z, t)$。

表 1-1 列出了水、空气和水银在不同温度下的密度值。

表 1-1 不同温度下水、空气和水银的密度 $\rho/kg \cdot m^{-3}$

流　体	温　度（℃）						
	0	10	20	40	60	80	100
水	999.87	999.73	998.23	992.24	983.24	971.83	958.38
空气	1.29	1.24	1.20	1.12	1.06	0.99	0.94
水银	13 600	13 570	13 550	13 500	13 450	13 400	13 350

（3）流体的相对密度

某均质流体的质量与 4 ℃同体积纯水的质量的比称为该流体的**相对密度**，用符号 d 表示，即

$$d = \frac{\rho V}{\rho_w V} = \frac{\rho}{\rho_w} \tag{1-3}$$

式中 ρ_w——4 ℃时纯水的密度，kg/m^3。

显然，d 为一无单位因数。

表 1－2 列出了几种常见流体在一个标准大气压下的密度和相对密度。

表 1－2 常见流体的密度和相对密度

流 体	温度/℃	密度/(kg/m^3)	相 对 密 度
空 气	0	1.293	0.001 29
氧	0	1.429	0.001 43
氮	0	1.251	0.001 25
一氧化碳	0	1.250	0.001 25
二氧化碳	0	1.976	0.001 98
水蒸气	0	0.804	0.000 80
蒸馏水	4	1 000	1
海 水	15	1 020～1 030	1.02～1.03
普通汽油	15	700～750	0.70～0.75
石 油	15	880～890	0.88～0.89
酒 精	15	790～800	0.79～0.80
水 银	0	13 600	13.6
甲 醇	4	810	0.81
煤 油	15	750	0.75
矿物系液压油	15	850～900	0.85～0.90

2. 流体的压缩性和膨胀性

因为流体的密度是温度和压强的函数，所以流体所占据的体积将随压强、温度的变化而变化。变化的规律通常是：压强增加，体积缩小；温度升高，体积膨胀。流体的这种属性以压缩率和**体胀系数**来表示。

（1）体胀系数

体胀系数的定义为：当压强不变而流体温度变化 1 K 时，其体积的相对变化率，以符号 α 标记。即

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} \qquad (1-4)$$

式中 α——流体的体胀系数，1/K；

ΔT——流体温度的变化值，K。

水的体胀系数如表 1－3 所示。

表 1－3　水的体胀系数 α

压力 × 10^5 Pa	温度/K				
	274 ~ 283	283 ~ 293	313 ~ 323	333 ~ 343	363 ~ 373
0.981	0.14×10^{-4}	1.50×10^{-4}	4.22×10^{-4}	5.56×10^{-4}	7.19×10^{-4}
98.1	0.43×10^{-4}	1.65×10^{-4}	4.22×10^{-4}	5.48×10^{-4}	7.04×10^{-4}
196.2	0.72×10^{-4}	1.83×10^{-4}	4.26×10^{-4}	5.39×10^{-4}	

(2) 压缩率和体积模量

流体体积随压强变化的属性通常以压缩率或体积模量来表示。分别以符号 κ，K 来标记。

压缩率定义为：当流体保持温度不变，所受压强(帕)改变时，其体积的相对变化率，即

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} \tag{1-5}$$

式中　κ——压缩率，1/Pa；

V——压强为 p 时流体体积，m^3；

ΔV——压强增加 Δp 时流体体积的变化量，m^3。

因当 Δp 为正值时，ΔV 总是负值，反之亦然。我们在计算中总希望 κ 为一正值，故引入一个负号。

式(1－5)表明，对于同样的压强变化，κ 值大的流体，体积变化率大，即容易压缩；而 κ 值小的流体，不容易压缩。由此可见，κ 值标志着流体的可压缩性大小。

压缩率的倒数称为**体积模量**，用符号 K 来标记，即

$$K = \frac{1}{\kappa} = -\frac{V}{\Delta V}\Delta p$$

式中　K——体积模量，Pa。

显然，用 K 来表示流体可压缩性的大小将更为方便。K 值大的流体可压缩性小，K 值小的流体可压缩性大。

流体的体积模量也随压强和温度的变化而变化，表 1－4 给出了在不同状态下水的体积模量。

表 1－4　水的体积模量 $K/10^9$ Pa

温度/K	压强 × 0.980 665 × 10^5 Pa				
	5	10	20	40	80
273	1.85	1.86	1.88	1.91	1.94
278	1.89	1.91	1.93	1.97	2.03

续表

温度/K	压强 × 0.980 665 × 10^5 Pa				
	5	10	20	40	80
283	1.91	1.93	1.97	2.01	2.08
288	1.93	1.96	1.90	2.05	2.13
293	1.94	1.98	2.02	2.08	2.17

(3) 可压缩流体和不可压缩流体

由表 1-4 可以看出，水的可压缩性是很小的，压强每增加一个大气压，其体积变化不到万分之一。工程中常用的其它工作液体，如液压油、机械油等，其体积模量数值也都很大，例如矿物系液压油 $K = 1.4 - 2.0 \times 10^9$ Pa，在一般工程计算中，往往可以忽略其可压缩性的影响，将液体看作为**不可压缩流体**。

气体的可压缩性与液体相比则大得很多。因此，在研究气体的时候，无论温度还是压强对其体积和密度的影响都必须考虑。对于完全气体，其间的关系可以用状态方程表示，即

$$pv = RT \tag{1-6}$$

或

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

式中 p——气体的绝对压强，Pa；

v——气体的比体积，m^3/kg；

R——气体状态常数，m·N/(kg·K)；

T——热力学温度，K。

因此，气体的比体积与绝对压强成反比，而与热力学温度成正比，除了高压和低温状态外(压强不超过 20 MPa,热力学温度不低于 253 K)，常用气体(如空气、氮、氧、二氧化碳等)基本上都遵循状态方程。

由上述分析可以看出，尽管任何流体都具有可压缩的基本属性，但就其压缩率的大小来看，相差还是十分悬殊的。

在流体力学的研究和实际的工程计算中，若把液体看作为不可压缩流体，则可显著地简化理论分析和计算工作，并在大多数问题的研究中具有足够的精确度。但在某些特殊场合，如在水击现象的研究中，则只有考虑其可压缩性才能得出合理的结论。故对于液体可压缩性的考虑与否也不能一概而论。

最后应指出，在低速(通常取小于 50 m/s)气流中，当压强变化不大时，通

常可以忽略可压缩性的影响，按不可压缩流体来处理，其结果也是足够精确的。例如：在一个标准大气压下，当空气流速为 68 m/s 时，不考虑可压缩性所引起的相对误差只有 1%左右。在以后的研究中将会看到，按不可压缩流体来处理低速气体流动问题，可使研究工作大为简化。

3. 流体的粘性

粘性是流体所具有的重要属性。凡实际流体(无论气体还是液体)都具有粘性。在流体力学问题的研究中，由于粘性影响所带来的复杂性使无数研究者付出了艰辛的劳动。因而，对流体的这一属性必须给予足够的重视。

(1) 粘性的概念及粘性内摩擦力产生的原因

我们来作一个简单的实验。如图 1-2 所示的装置，在固定扭丝下端悬挂一个圆筒体，其外面放置一个能绕铅直轴旋转的圆筒形容器。在内、外圆筒体的小缝隙间充以某种液体，水或油均可。当外筒开始旋转时，可以发现内圆筒随之产生同方向的扭转。当外筒转速达到定值 ω 时，内圆筒将平衡在一定的扭转角度上，一旦外筒停止转动，内圆筒也将随之恢复到原来的位置。

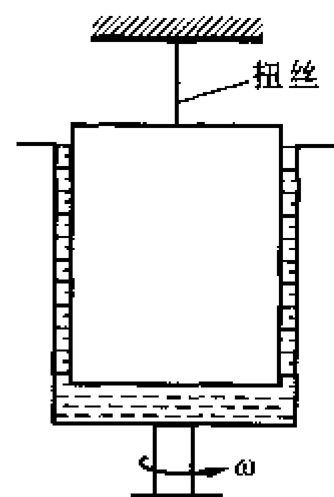


图 1-2

这个实验清楚地说明了在附着于内筒和旋转外筒上的流体之间存在着一种彼此阻碍对方运动的趋势。更多的实验和现象告诉我们，当流体在外力作用下，流体微元间出现相对运动时，随之产生阻抗流体层间相对运动的内摩擦力，流体产生内摩擦力的这种性质称为粘性。

必须注意，只有在流体流动时才会表现出粘性，静止流体不呈现粘性。粘性的作用表现为阻碍流体内部的相对滑动，从而阻碍流体的流动。这种阻碍作用只能延缓相对滑动的过程，而不能消除这种现象。这是粘性的重要特征。

粘性内摩擦力或**粘性阻力**产生的原因，必须从分子的微观运动来加以说明。概括地说，这种阻力是由分子间的相互吸引力和分子不规则运动的动量交换产生的阻力组合而成。

(a) 分子间吸引力产生的阻力：当相邻的两液层要产生相对运动时，必然要破坏原来分子间的平衡状态，引起相邻分子间距的加大。这种间距的加大使分子间的吸引力明显地表现出来，即快速运动的分子层拖动慢速的分子层使其加快运动，而慢速运动的分子层反过来阻滞快速层的运动，这种相互作用的结果，宏观表现为内摩擦力或称为**粘性力**。

(b) 分子不规则运动的动量交换产生的阻力：当流体定向或不定向流动时，由于分子总在不规则运动，总会有分子作层与层间的跳跃迁移。这种迁移

的结果不可避免的将导致动量交换。设某流体二相邻层的速度差为 dv，分子的质量为 m，当快速层分子跃入慢速层时，将动量增量 mdv 带入慢速层。由于分子运动，必将撞击慢速层分子，结果将本身的动量增量交换给慢速层，使慢速层的分子加速。同理，当慢速层分子跃入快速层时，动量交换的结果将使快速层分子减速。这样，由于分子不规则运动所形成的动量交换也会形成彼此牵制的作用力，宏观表现就是粘性力。

由上述分析进一步得出，对于液体，由于分子间距小，在低速流动时，不规则运动弱，因此粘性力的产生显然将主要取决于分子间的吸引力。但在逐渐转为高速流动时，流体不规则运动逐渐增强，粘性力将逐渐变为由不规则运动的动量交换引起。而对于气体，由于分子间距大，吸引力很小，不规则运动强烈，所以其粘性力产生的原因主要取决于分子不规则运动的动量交换。

（2）牛顿内摩擦定律和粘性的表示方法

流体的粘性，即流动流体内部所产生的内摩擦力如何用定量的数学关系予以表达？这种力的大小取决于哪些条件？这是一个必须首先解决的问题。

1686 年，牛顿通过大量的实验，总结出“牛顿内摩擦定律”，现在以简图 1－3 说明牛顿实验的内容及其结果。

图 1－3 为两块水平放置的平行平板，间距为 h，两平板间充满某种液体。使上板以 V 向右运动，下板保持不动。由于液体与板之间存在着附着力，故紧邻于上板的流体必以 V 之速度随上板一同向右运动。而紧邻于下板的流体则依然附着于下板静止不动。二板间的流体作平行于平板的流动，可以看成是许许多多无限薄层的流体作平行运动，实际测得流体的速度为线性分布，如图 1－3 所示。而流体的内切力（摩擦力）就产生在我们设想的这种有相对运动的薄层之间。

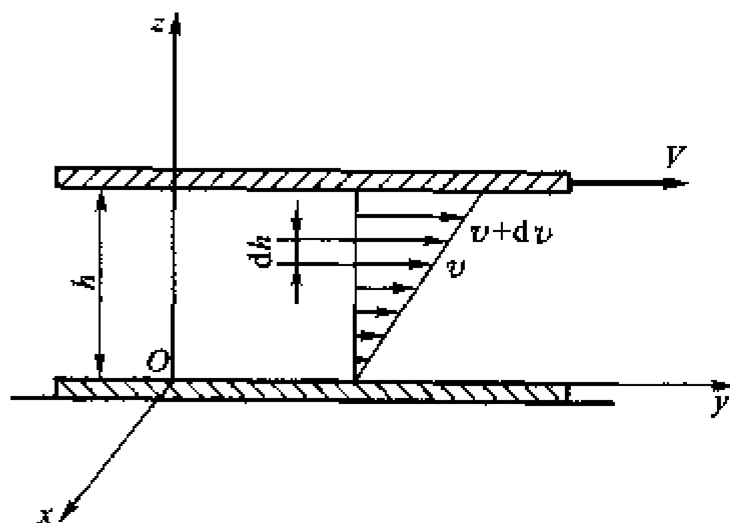


图 1－3

实验可知在二维平行直线运动中流层间的切力（内摩擦力）的大小与流体粘性有关，并与**速度梯度** $\frac{dv}{dh}$ 和接触面积 A 成正比，与接触面上的压力无关，即

$$F_f = \mu A \frac{dv}{dh} \tag{1-7}$$

单位面积上的切力，即切应力 τ 为

$$\tau = \mu \frac{dv}{dh} \tag{1-8}$$

式中 F_f——内摩擦力，N；

A——接触面积，m^2；

$\frac{dv}{dh}$——速度梯度；

μ——与流体性质有关的系数，称**动力粘度**(或粘度系数)，Pa·s。

考虑到速度梯度的方向，式(1-8)通常写为 $\tau = \pm \mu \frac{dv}{dh}$

式(1-7)和(1-8)所表示的关系称为**牛顿内摩擦定律**。其物理意义为：流体内摩擦力的大小与流体的速度梯度和接触面积大小成正比，并且与流体的性质，即粘性有关。

由式(1-7)可以看出，当 $dv/dh=0$ 时，显然 $F_f=0$，亦即当流体薄层之间或流体微团之间没有速度差时、以及处于静止状态的流体之中不存在内摩擦力。

由牛顿内摩擦定律可以看出，流体与固体在摩擦规律上是截然不同的。流体中的摩擦力取决于流体间的相对运动，即其大小与速度梯度成正比；固体间的摩擦力与速度无关，与两固体之间所承受的正压力成正比。

流体的粘性通常以粘度来度量，粘度常用以下三种方法表示。

(a) 动力粘度 μ

动力粘度也称为绝对粘度，以符号 μ 表示，它直接来自牛顿内摩擦定律。由式(1-8)得

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dz}$$

显然，μ 表示单位速度梯度时内摩擦切应力的大小。

在 SI 中，μ 的单位为 Pa·s。在 CGS 制中，μ 的单位为 $dyn \cdot s/cm^2$，称为泊，记为 P。计算中常用泊的百分之一来度量，称为厘泊，记为 cP。其换算关系为

$$1\ P = 100\ cP = 10^{-1}\ Pa \cdot s$$

μ 之所以称之为动力粘度是因为在其量纲中存在动力学因素。

(b) 运动粘度 ν

在理论分析和工程计算中，常用动力粘度 μ 和流体密度 ρ 的比值来度量流体的粘度，称为**运动粘度**，以符号 ν 标记

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1-9}$$

在 SI 中 ν 的单位为 m^2/s。在 CGS 制中为 cm^2/s，称为斯，记为 St。常用斯的百分之一作为计量单位，称为厘斯，记为 cSt。

运动粘度没有明确的物理意义，不能像 μ 那样直接表示粘性切应力的大小。它的引入只是因为在理论分析和工程计算中常常出现 μ 与 ρ 的比值，引入 ν 以后可使其分析、计算简便而已。所以称为运动粘度，是因为在量纲中仅有运动学因素。

在工程实际中，运动粘度也可以给出比较形象的粘度概念。我国现行的机械油牌号数所表示的即是以厘斯为单位的粘度值。确切点说，系指机械油在 50 ℃时运动粘度的平均值。例如，20 号机械油表示该种油在 50 ℃时其运动粘度大致为 20 cSt。又因为蒸馏水在 20.2 ℃时，其运动粘度恰好为 1 cSt，所以油的牌号数是代表其运动粘度与水运动粘度的比值，例如 20 号机械油，运动粘度约为水运动粘度的 20 倍。

(c) 相对粘度

相对粘度又称为条件粘度。

尽管在流体力学研究中广泛使用动力粘度和运动粘度，可它们是难以直接测量的。由于流体的粘度是必须掌握的重要属性，因此，经过多年的实践，人们找出了多种直接测量的途径。其中之一是用对比法测量流体的粘度，通常称为相对粘度，又称为条件粘度。目前，由于测量条件不同，各国所用的相对粘度单位也不同，美国采用赛氏粘度，代号 *SSU*；英国采用雷氏粘度，代号为 *R*；我国和苏、德等国采用**恩氏粘度**，代号为°*E*，它们的换算关系可在有关手册中查得。这里，我们只介绍恩氏粘度的测量和换算方法。

恩氏粘度用恩氏粘度计测量。这种粘度计只适用于液体。恩氏粘度值系被测液体与水粘度的比较值。其测定方法为，将 200 cm³ 的被测液体装入恩氏粘度计的容器中，测定在温度 T 时通过容器底部小孔(直径为 2.8 mm)流出的时间 t_1 (s)；将蒸馏水 200 cm³，加入容器中，在 20 ℃时测出其流尽所需的时间 t_2 (s)。时间 t_1 和 t_2 的比值就是该液体在温度 T 时的恩氏粘度值。

$$^{\circ}E = \frac{t_1}{t_2} \tag{1-10}$$

t_2 的平均值一般为 51s。

在实际应用中，须将恩氏粘度换算为运动粘度，其换算关系为经验公式

$$\nu = 0.073\,1^{\circ}E - \frac{0.063\,1}{^{\circ}E} \tag{1-11}$$

为运算方便，°E 与 ν 的换算关系已制成表格和图线，在有关的手册中可直接查得。

(3) 压强对流体粘性的影响

由于压强变化对分子动量交换影响甚微，所以气体的粘度随压强变化很小。而压强的加大将使分子间距减小，故压强对液体粘性的影响较大。但在低

压下(通常指低于100大气压)压强变化对液体粘度的影响很小，通常予以忽略。例如：在20℃时，当压强由1个大气压增至100个大气压时，变压器油的动力粘度大约增加7.6%；而当压强增至3 400个大气压时，其动力粘度将增大6 500倍。水的动力粘度在10^5大气压下较在1个大气压下增大到2倍。

人们把液体粘度随压强的变化规律总结如下面的经验公式

$$\mu_p = \mu_0 e^{ap} \qquad (1-12)$$

式中 μ_p——压强为p时的粘度；

μ_0——压强为1个大气压时的粘度；

a——粘压系数，取决于液体的物理性质和温度，通常可近似取为$(2 \sim 3) \times 10^{-8}$ 1/Pa。

(4) 温度对流体粘性的影响

当温度升高时，流体的分子间距增大，由前面的分析可知，液体的粘度将显著减小。对气体而言，当温度升高时，分子的不规则运动加剧，使动量交换更加频繁，因此，气体的粘度将随之增大。可见，当温度变化时，气体和液体的粘度变化规律是不同的。表1-5给出了水的粘度随温度的变化值，表1-6为空气的粘度随温度的变化值，图1-4是机械油的粘温关系。

表1-5 水的粘温变化值

t ℃	$\mu \times 10^3$ Pa·s	$\nu \times 10^6$ m²/s	t ℃	$\mu \times 10^3$ Pa·s	$\nu \times 10^6$ m²/s
0	1.792	1.792	40	0.656	0.661
5	1.519	1.519	50	0.549	0.556
10	1.308	1.308	60	0.469	0.477
15	1.140	1.140	70	0.406	0.415
20	1.005	1.007	80	0.357	0.367
25	0.894	0.897	90	0.317	0.328
30	0.801	0.804	100	0.284	0.296

人们通过大量实验得出了许多表达流体粘度随温度变化的经验公式。例如在20℃~80℃温度范围内，机械油粘度随温度变化关系式为

$$\mu_t = \mu_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad (1-13)$$

式中 μ_t——温度为t时的动力粘度；

μ_0——温度为t_0时的动力粘度；

λ——粘温系数，对矿物油系机械油可取

表 1-6 空气的粘温变化值

t ℃	$\mu\times10^3$ Pa·s	$\nu\times10^6$ m^2/s	t ℃	$\mu\times10^3$ Pa·s	$\nu\times10^6$ m^2/s
0	0.017 2	13.7	90	0.021 6	22.9
10	0.017 8	14.7	100	0.021 8	23.6
20	0.018 3	15.7	120	0.022 8	26.2
30	0.018 7	16.6	140	0.023 6	28.5
40	0.019 2	17.6	160	0.024 2	30.6
50	0.019 6	18.6	180	0.025 1	33.2
60	0.020 1	19.6	200	0.025 9	35.8
70	0.020 4	20.5	250	0.028 0	42.8
80	0.021 0	21.7	300	0.029 8	49.9

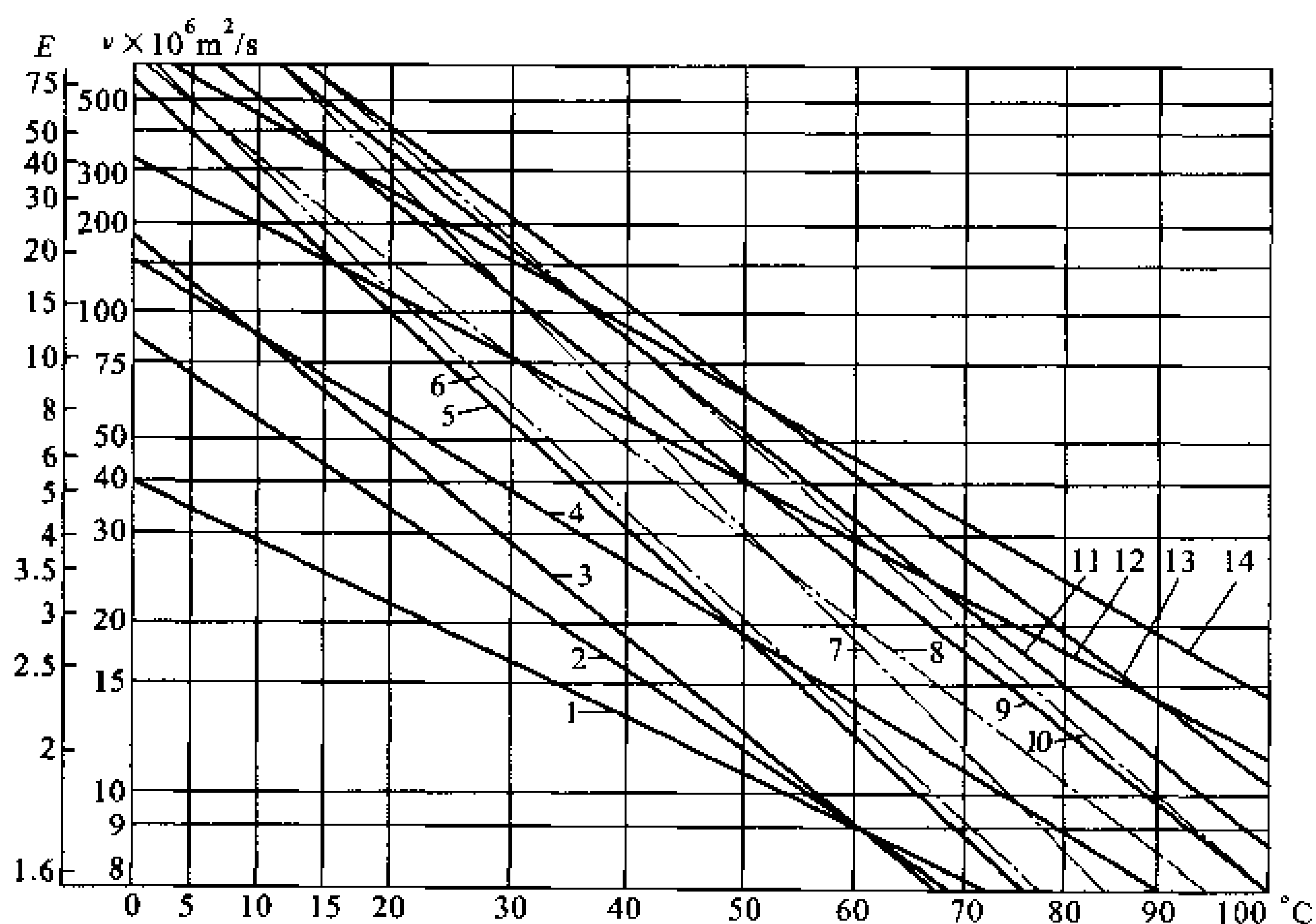


图 1-4

1-10号航空液压油;2-10号机械油;3-10号低凝液压油;4-20号低凝液压油;5-20号机械油;6-22号汽轮机油;7-30号汽轮机油;8-30号机械油;9-40号机械油;10-46号汽轮机油;11-50号机械油;12-40号低凝液压油;13-70号机械油;14-70号低凝液压油

$$\lambda \approx (1.8 \sim 3.6) \times 10^{-3}$$

水的动力粘度与温度关系的经验公式为

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0.033\,7t + 0.000\,221t^2} \tag{1-14}$$

式中 μ_0——水在0 ℃时的动力粘度。

低压(小于10个大气压)时，气体粘度与温度关系的经验公式为

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C}\left(\frac{T}{273}\right)^{2/3} \tag{1-15}$$

式中 μ_0——气体在0 ℃时的动力粘度；

T——气体的温度；

C——按气体种类确定的常数，对于空气，常取 $C = 11$。

常见流体的粘度可以在相应的设计手册中查得。

(5) 理想流体

由前面的分析可以看出，一切实际流体都存在有粘性，而粘性本身是一个十分复杂的问题，影响因素是多方面的。在一定程度上，它给实际流体运动规律的研究带来几乎是不可克服的困难。在实际工程和某些理论研究中，有些时候可以不考虑粘性的影响，即内摩擦作用在这些场合的影响并不明显，或小到微不足道的程度。所以在流体力学的研究中，人们提出了一种假想的没有粘性的流体，称为**理想流体**。当然，理想流体实际上是不存在的，只是一种假想的物理模型。然而，这种理想化模型的引入，使得流体力学问题的研究大为简化。在某种程度上也可以说，理想流体的引入是流体力学发展的关键性步骤。

在**实际流体流动规律**的研究中，人们首先按理想流体来进行理论分析和数学推导，得出基本规律。而粘性对流动规律的影响将主要通过实验加以修正。

(6) 牛顿流体和非牛顿流体

在流体力学的研究中，凡切应力与速度梯度成线性关系，即服从牛顿内摩擦定律的流体，称为牛顿流体。在图1-5的坐标下，可以用通过原点的直线(坐标轴除外)表示的流体是**牛顿流体**(曲线 A)，自然界中的水、空气、各种气体和各种油类都属于牛顿流体。凡切应力与速度梯度间不存在线性关系，即不服从牛顿内摩擦定律的流体，称为**非牛顿流体**。非牛顿流体的种类很多，通常有**塑性流体**(曲线

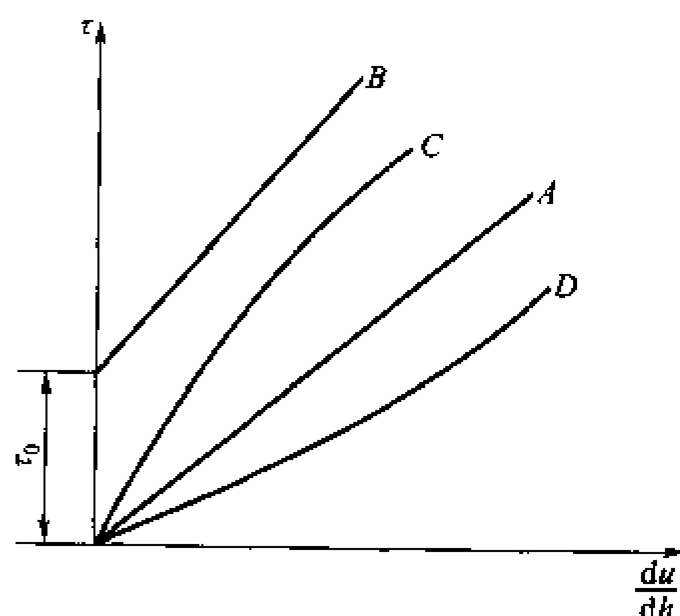


图 1-5

B)，**拟塑性流体**(曲线 *C*)和**胀流型流体**(曲线 *D*)等多种。前者有牙膏等，这种流体只有在克服某个不发生剪切变形的初始应力 τ_0 之后，其切应力才与速度梯度成正比；高分子溶液、纸浆、泥浆等流体属于拟塑性流体，这种流体在速度梯度达到相当值后，其切应力随$\frac{du}{dh}$的增长率逐渐降低；油漆、乳化液等属于胀流型流体，在速度梯度达到相当值后，这种流体的切应力随$\frac{du}{dh}$的增长率逐渐增加。

非牛顿流体多数在化工、食品等工业中出现，而本书所研究的仅限于牛顿流体。

§1-6 表面张力和毛细现象

在日常生活中我们常常看到水滴悬挂在墙壁上或水龙头出口处，水银在平滑表面上成球形滚动等现象，表明液体自由表面有明显的欲成球形的收缩趋势，引起这种收缩趋势的力称为**表面张力**。

表面张力是由分子的内聚力引起的，其作用结果使液体表面看起来好像是一张均匀受力的弹性膜。不难想象，处于自由表面附近的液体分子所受到周围液体和气体分子的作用力是不相平衡的，气体分子对它的作用力远小于相应距离另一侧液体分子的作用力。因此，这部分分子所受到的合力是将它们拉向液体内部。受这种作用力最大的当然是处于液体自由表面上的分子，随着同自由表面距离的增加，所受到的作用力将逐渐减少。直到一定距离以后，液体周围所施加的力彼此抵消。

若假想在液体自由表面上任取一条线将其分开，则表面张力的作用将使两边彼此吸引，作用方向将与该线相垂直。可见，表面张力实际是一种拉力。我们将单位长度上所受到的这种拉力定义为表面张力系数，以 σ 标记，它的单位是 N/m。

可以想象出，表面张力的数值是很小的，在一般计算中可以不予考虑。只有当流体自由表面的边界尺寸非常小，如很细的玻璃管，很狭的缝隙等时，表面张力的影响才明显，必须计及。

表面张力随温度变化而变化。当温度升高时，表面张力减小。表面张力也因液体自由表面所接触的气体不同而有差异。表 1-7 中给出了在一个标准大气压下，水和空气接触的表面张力系数 σ 随温度的变化值。表 1-8 给出了几种常见液体的表面张力系数。

表 1-7 水的表面张力系数 σ

温度℃	0	10	20	30	40	60	80	100
10^{-3} N/m	75.6	74.2	72.8	71.2	69.6	66.2	62.6	58.9

表 1-8 几种常见液体的表面张力系数 σ（20℃与空气接触）

液体名称	酒精	苯	煤油	润滑油	原油	水	水银
10^{-3} N/m	22.3	28.9	27	36	30	72.8	465

表面张力所引起的附加法向压强可由拉普拉斯公式求得

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{1-16}$$

式中 σ——表面张力系数；

r_1，r_2——液体曲面在互相垂直的二平面上的曲率半径。

对于球形液滴，$r_1 = r_2 = r$，附加压强，即液滴内外的压差为

$$\Delta p = 2\sigma / r \tag{1-17}$$

当把直径很小两端开口的细管插入液体中时，表面张力的作用将使管内液体出现升高或下降的现象，我们称之为**“毛细现象”**。这种足以形成毛细现象的细管称为**“毛细管”**。

毛细现象可以由液体分子和管壁分子之间的吸引力(通常称为**附着力**)来说明。当液、固间的附着力大于流体的内聚力时，液体将沿壁面向外伸展，使液面向上弯曲成为凹面(这种现象通常称为“浸润”)。而由于表面张力的作用将使液面尽量缩小，力图使中间液面上凸成为平面。二者作用的结果使液体上升，直到上升液柱的重力和表面张力的垂直分量平衡为止，当玻璃管插入水中时所出现的这种情况如图 1-6 a 所示。当玻璃管插入水银中时，由于水银的内聚力远大于其与玻璃的附着力(这种情况称为“不浸润”)，其结果与上述相反，水

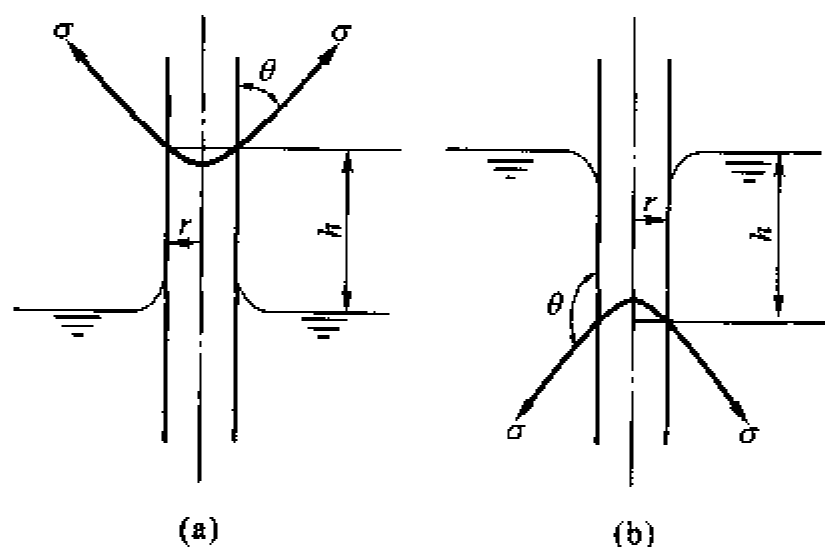


图 1-6

银表面向下弯曲形成凸形，水银柱下降，如图 1-6 b 所示。

毛细现象中液柱的上升或下降高度可由图 1-6 求得。设液面与管壁的接触交角为 θ，管半径为 r，液体密度为 ρ，表面张力系数为 σ，由液柱重力与表面张力垂直分量相平衡，即

$$2\pi r\sigma\cos\theta = \pi r^2 h\rho g$$

可得

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r} \tag{1-18}$$

式中的 θ 角取决于液、气的种类，管壁材料等因素。通常，对于水和洁净的玻璃 $\theta = 0°$，水银和洁净的玻璃 $\theta = 140°$。

对于工程中常用的测压管，毛细现象往往造成较大的误差。一般情况下，当测压管径大于 10 mm，误差可以忽略不计。

例 题

例 1-1 圆柱容器中的某种可压缩流体，当压强为 1 MPa 时体积为 1 000 cm^3，若将压强升高到 2 MPa 时体积为 995 cm^3，试求它的压缩率 κ。

解 由压缩率定义

$$\kappa = -\frac{1}{V_1}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

本题中

当 $p_1 = 1\times10^6$ Pa 时，$V_1 = 1\,000\ cm^3$，

当 $p_2 = 2\times10^6$ Pa 时，$V_2 = 995\ cm^3$，

所以

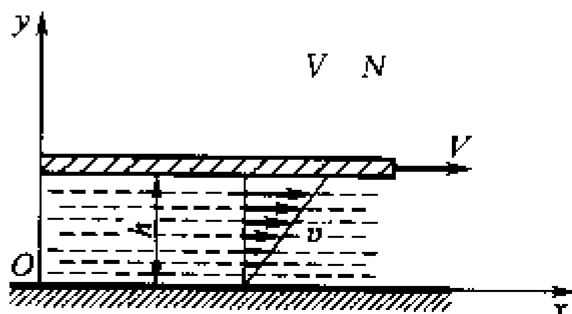
$$\Delta p = p_2 - p_1 = 1\times10^6\ Pa$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -5\times10^{-6}\ m^3$$

其压缩率为

$$\kappa = 5\times10^{-9}\ 1/Pa$$

例 1-2 一块可动平板与另一块不动平板之间为某种液体，两块板相互平行(如图)，它们之间的距离 $h = 0.5$ mm。若可动平板以 $V = 0.25$ m/s 的水平速度向右移动，为了维持这个速度需要单位面积上的作用力为 2 Pa，求这二平板间液体的粘度。



例 1-2 图

解 由牛顿内摩擦定律

$$\tau = \mu\frac{dv}{dh}$$

认为两板间液体速度呈线性分布，故

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}h}=\frac{V}{h}$$

所以

$$\mu=\tau\Big/\frac{V}{h}=4\times10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}$$

例 1－3 用恩氏粘度计测量某种石油的粘度。50 ℃时 200 $\mathrm{cm^3}$ 石油滴出时间为 163.4 s。求该石油的恩氏粘度和运动粘度。

解 由于 20 ℃时纯水自恩氏粘度计滴落时间为 $t_2=52$ s，得 50 ℃时该石油的恩氏粘度为

$$°E=\frac{t_1}{t_2}\approx3.15$$

其运动粘度为

$$\nu=0.0731°E-\frac{0.0631}{°E}\approx0.2102\ \mathrm{St}$$

例 1－4 图示油缸尺寸为 $d=12$ cm，$l=14$ cm，间隙 $\delta=0.02$ cm，所充油的 $\mu=0.65\times10^{-1}$ Pa·s。试求当活塞以速度 $V=0.5$ m/s 运动时所需拉力 F 为多少？

解 由牛顿内摩擦定律知

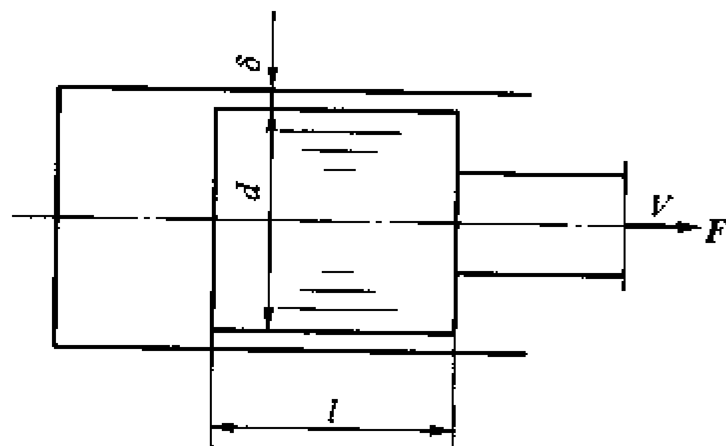
$$F=\mu AV/\delta$$

式中

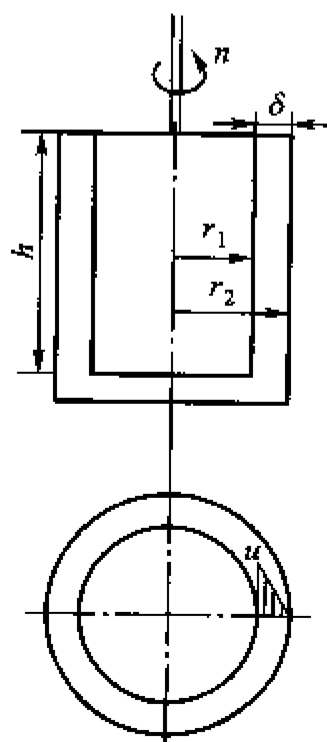
$$A=\pi dl$$

由此得

$$F=\pi\mu dlV/\delta\approx8.57\ \mathrm{N}$$



例 1－4 图



例 1－5 图

例 1-5 旋转圆筒粘度计，外筒固定，内筒由同步电机带动旋转，内外筒间充入实验液体。已知内筒半径 $r_1 = 1.93$ cm，外筒半径 $r_2 = 2$ cm，内筒高 $h = 7$ cm，实验测得内筒转速 $n = 10$ r/min，转轴上扭矩 $M = 0.004\,5$ N·m。试求该实验液体的粘度。

解 充入内外筒间隙中的实验液体，在内筒带动下作圆周运动。因间隙很小，速度近似直线分布，不计内筒端面的影响，内筒切应力

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \mu \frac{\omega r_1}{\delta}$$

其中内筒旋转角速度 $\omega = \dfrac{2\pi n}{60}$

扭矩

$$M = \tau \cdot 2\pi r_1 \cdot h \cdot r_1 = \frac{\mu\omega 2\pi r_1^3 h}{\delta}$$

$$\mu = \frac{M\delta}{2\pi\omega r_1^3 h} = 0.952 \text{ Pa·s}$$

习　题

1-1 按连续介质的概念，流体质点是指：(a) 流体的分子；(b) 流体内的固体颗粒；(c) 几何的点；(d) 几何尺寸同流动空间相比是极小量，又含有大量分子的微元体。

1-2 作用于流体的质量力包括：(a) 压力；(b) 摩擦阻力；(c) 重力；(d) 表面张力。

1-3 单位质量力的国际单位是：(a) N；(b) m/s；(c) N/kg；(d) $\mathrm{m/s^2}$。

1-4 与牛顿内摩擦定律直接有关的因素是：(a) 切应力和压强；(b) 切应力和剪切变形速度；(c) 切应力和剪切变形；(d) 切应力和流速。

1-5 水的[动力]粘度随温度的升高：(a) 增大；(b) 减小；(c) 不变；(d) 不定。

1-6 流体运动粘度 ν 的国际单位是：(a) $\mathrm{m^2/s}$；(b) $\mathrm{N/m^2}$；(c) kg/m；(d) $\mathrm{N\cdot s/m^2}$。

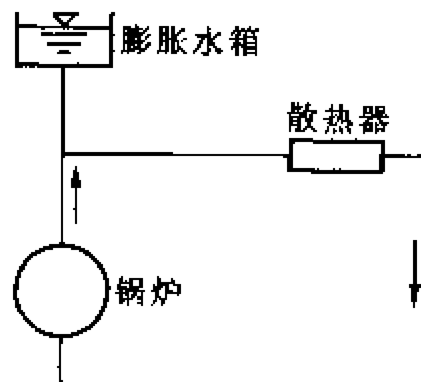
1-7 理想流体的特征是：(a) 粘度是常数；(b) 不可压缩；(c) 无粘性；(d) 符合 $pv = RT$。

1-8 为什么可以把流体看作为连续介质？为什么要把流体作为连续介质？

1-9 已知 0.5 $\mathrm{m^3}$ 水银的质量为 6 795 kg，求其密度和比体积数值。

1-10 温度为 0 ℃，压强为一大气压的标准状态下，烟气的密度为 1 $\mathrm{kg/m^3}$，当压强不变而温度为 800 ℃，求以法定单位制表示的密度和比体积。

1-11 采暖系统在顶部设置一个膨胀水箱(如图)，系统内的水在温度升高时可以自由膨胀进入水箱，若系统内水的总体积为 8 $\mathrm{m^3}$，温度改变的最大值为 50 ℃，水的体胀系数 $\alpha = 5\times10^{-4}$ 1/K，问膨胀水箱最小应有多大容积？

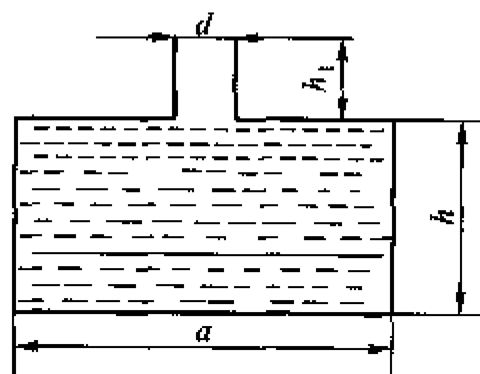


题 1-11 图

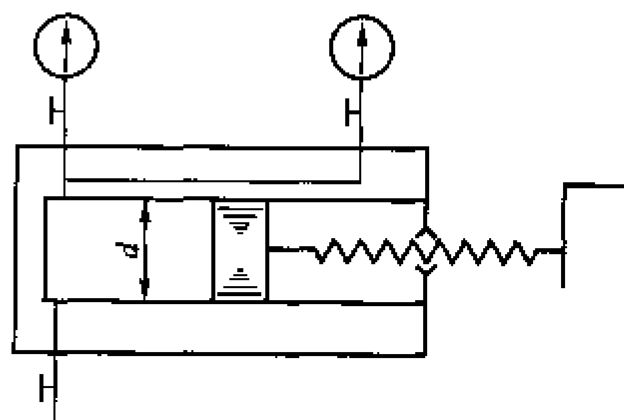
1－12　图示为一油箱纵断面，其尺寸为长 $a=0.6$ m，宽 $b=0.4$ m，高 $h=0.5$ m，油嘴直径 $d=0.05$ m，高 $h_1=0.08$ m。油装到齐油箱的上壁。求：

（1）如果只考虑油液的体胀系数 $\alpha=6.5\times10^{-4}$ 1/K 时，油液从 $t_1=-20$ ℃上升到 $t_2=20$ ℃时，油箱中有多少体积的油溢出？

（2）如果还考虑到油箱的线胀系数 $\alpha_l=1.2\times10^{-5}$ 1/K，这时情况如何？



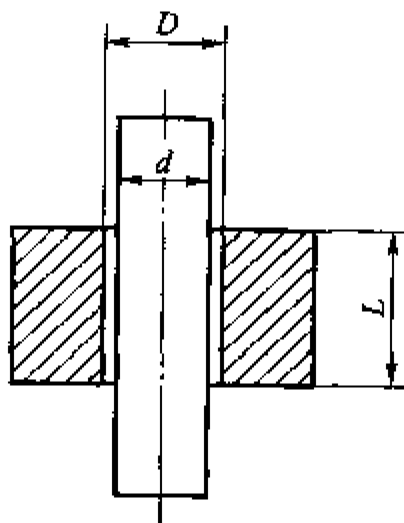
题 1－12 图



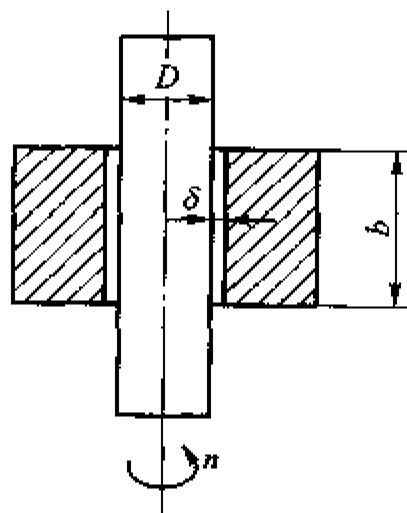
题 1－13 图

1－13　图示为一压力表校正装置示意图。装置内充满油液，其压缩率 $\kappa=5\times10^{-10}$ 1/Pa，装置内压强由手轮丝杠和活塞造成，活塞直径 $d=1$ cm，丝杠螺距 $t=2$ mm。无压时装置内油液体积为 200 ml，若要形成 2×10^7 Pa 的压强，手轮需摇多少转？(不计壳体的变形)

1－14　有一金属套由于自重沿垂直轴下滑(如图)。轴与套间充满 $\nu=3\times10^{-5}$ m²/s，$\rho=850$ kg/m³ 的油液。套的内径 $D=102$ mm，轴外径 $d=100$ mm，套长 $L=250$ mm，套重 100 N。试求套筒自由下滑时的最大速度(不计空气阻力)。



题 1－14 图



题 1－15 图

1－15　轴在滑动轴承中转动，已知轴的直径 $D=20$ cm，轴承宽度 $b=30$ cm，间隙 $\delta=0.08$ cm，间隙内充满 $\mu=0.245$ Pa·s 的润滑油，若已知轴旋转时润滑油阻力的损耗功率为 $P=50.7$ W，试求轴承的转速 $n=$？若转速 $n=1\,000$ r/min 时，消耗功率为多少？

1－16　两无限大平板相距 $b=25$ mm 平行放置，其间充满 $\mu=1.5$ Pa·s 的甘油，在两板间以 $V=0.15$ m/s 的速度拖动一面积为 $A=0.5$ m² 的极薄平板，如果保持在中间位置需要多

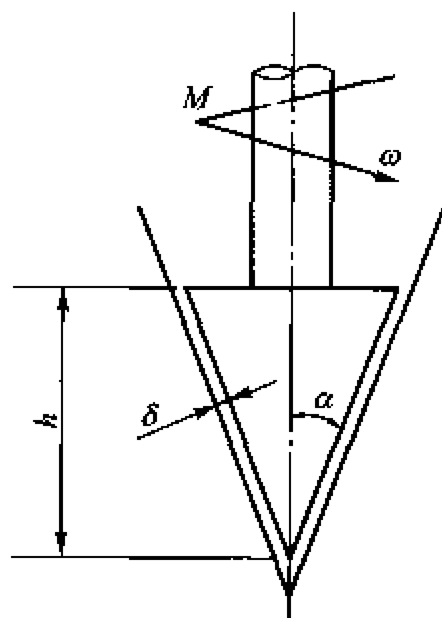
大的力？如果置于距一板 10 mm 的位置，则需要多大的力？

1-17 一很大的薄板放在 $b=0.06$ m 宽水平缝隙的中间位置，板上下分别放有不同粘度的油，一种粘度是另一种的 2 倍。当平板以 $V=0.3$ m/s 的速度被拖动时，每平方米受合力为 $F=29$ N，求两种油的粘度。

1-18 在一高为 h 的窄缝中以速度 V 拖动一很大的薄板，板一边的油粘度为 μ，另一边为 $k\mu$，试计算平板上阻力最小的位置。

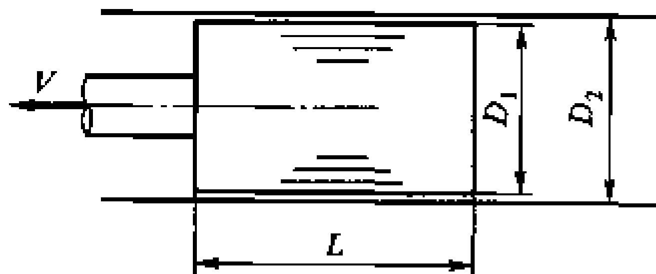
1-19 在垂直放置相距 $b=25$ mm 的缝隙中充满相对密度 $d=0.95$，$\mu=2.4$ Pa·s 的油。一块质量 $m=4.5$ kg，厚 $\delta=1.6$ mm，边长为 $L=1.5$ m 的正方形板处于中间位置。试计算以速度 $V=0.06$ m/s 提升平板所需的力为多少？

1-20 图示圆锥间隙为 δ，半锥角为 α，锥体高为 h，所充油的粘度为 μ。若使锥体以恒角速度 ω 旋转，求所需扭矩 M 为多少？

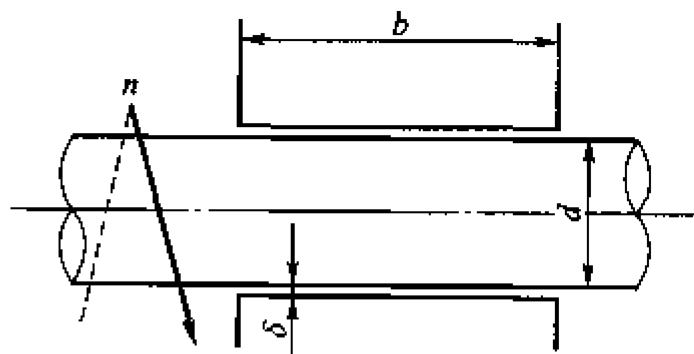


题 1-20 图

1-21 图示活塞直径 $D_1=140$ mm，长 $L=250$ mm，油缸内径 $D_2=140.2$ mm，所充油液的相对密度 $d=0.95$，粘度 $\nu=2.5\times10^{-5}$ m²/s，若活塞以 $V=8$ m/s 的速度运动，需消耗功率为多少？



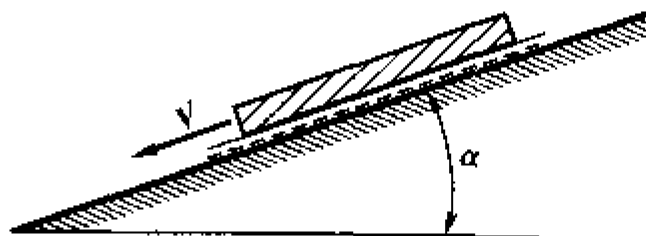
题 1-21 图



题 1-22 图

1-22 图示滑动轴承宽 $b=300$ mm，轴径 $d=100$ mm，间隙 $\delta=0.20$ mm，间隙中所充油液粘度为 $\mu=0.75$ Pa·s，试求当轴以 $n=300$ r/min 旋转时所需功率为多少？

1-23 图示斜面倾角 $\alpha=20°$，一块质量为 25 kg，边长为 1 m 的正方形平板沿斜面等速下滑，平板和斜面间油液厚度为 $\delta=1$ mm，若下滑速度 $V=0.25$ m/s，求油的粘度。



题 1-23 图

第2章

流体静力学

流体静力学研究静止流体平衡的力学规律及其在工程技术上的应用。

应该说，宇宙中并没有完全静止的物体。这里所说的静止流体，是指流体宏观质点之间没有相对运动。因此，流体处于静止状态可包括两种情况：一种情况是流体整体对于地球没有相对运动；另一种情况是流体整体对地球有相对运动，而流体质点间及流体与容器壁之间没有相对运动。一般地，前者称作绝对静止；后者称作相对静止。

因在静止流体内不呈现粘性，所以静力学所讨论的力学规律对理想流体及实际流体均适用。

§2-1 流体静压强及其特性

当流体处于**绝对静止**或**相对静止**状态时，流体中的压强称为**流体静压强**。

图2-1所示为一块处于**平衡状态**的流体，若用 BC 平面把它分成Ⅰ和Ⅱ两部分，将Ⅰ取走，为保持Ⅱ的平衡，必须有作用力 F 来代替Ⅰ对Ⅱ部分的作用。设被 BC 所截的流体截面面积为 A，则流体所受到的平均静压强为

$$p = \frac{F}{A}$$

若面积 A 上各点压力不等，则面积 A 上任意点 D 处的静压强为

$$p_D = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

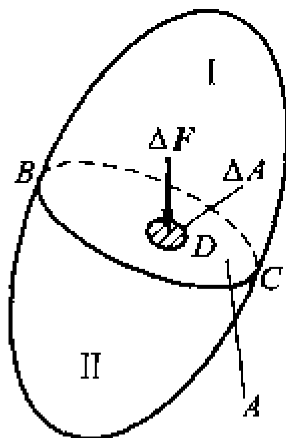


图 2-1

它的单位为 N/m^2 或 Pa。

二者的换算关系为

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$$

流体静压强有两个重要特性：

(1) 流体静压强的方向沿作用面的内法线方向。

这一特性可直接由流体的性质来说明。由第一章中已知，对于牛顿流体，在任何微小切力的作用下，都将产生连续的变形，所以流体在保持静止状态下就不可能有切力存在。此外，又根据流体的内聚力很小，几乎不能承受拉力这一特点，可以得出结论：流体静压强的方向沿作用面的内法线方向。

(2) 流体静压强的数值与作用面在空间的方位无关。即任一点的压强不论来自何方均相等。

为证明这一特性，在静止流体中取出直角边长各为 dx，dy，dz 的**微小四面体** $OABC$（图 2－2）。若作用在 $\triangle BOC$、$\triangle OAC$、$\triangle AOB$ 及 $\triangle ABC$ 四个平面上的流体静压强分别以 p_x，p_y，p_z 和 p_n 表示，由于所取的是**微小四面体**，所以可认为各作用面上的静压强 p_x，p_y，p_z 和 p_n 为对应面上的压强平均值，则作用在各面上的流体总压力应等于各对应面上的压强与其作用面面积的乘积，即

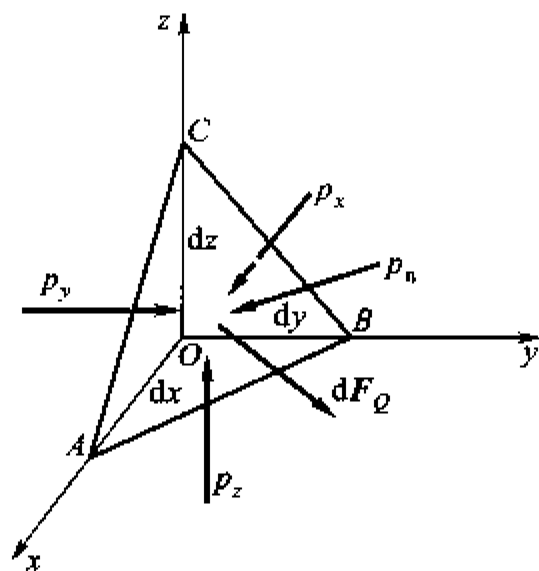


图 2－2

$$F_{Px} = \frac{1}{2}p_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$F_{Py} = \frac{1}{2}p_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$F_{Pz} = \frac{1}{2}p_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$F_{Pn} = p_n\cdot\triangle ABC$$

现在讨论作用在微小四面体上的**质量力**（体积力）。设单位质量流体的质量力在 x，y 和 z 轴上的分量分别为 f_x、f_y 和 f_z，该微小四面体的体积为 $\frac{1}{6}\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$，流体密度为 ρ，则该四面体的质量 $\mathrm{d}m = \frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$，所以质量力在各坐标轴上的分量为

$$\mathrm{d}F_{Qx} = \frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zf_x$$

$$\mathrm{d}F_{Qy} = \frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zf_y$$

$$\mathrm{d}F_{Qz} = \frac{1}{6}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}zf_z$$

微小四面体正是在上述各力作用下处于平衡状态。于是可写出微小四面体在 x 轴方向上的**力平衡方程式**为

$$\sum F_x = 0$$

即
$$\frac{1}{2}p_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z - p_n \triangle ABC \cdot \cos(p_n, x) + \frac{1}{6}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f_x = 0$$

由于 $\triangle ABC \cdot \cos(p_n, x) = \frac{1}{2}\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$，即有

$$p_n \triangle ABC \cdot \cos(p_n, x) = \frac{1}{2}p_n \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

于是上式可写成

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z(p_x - p_n) + \frac{1}{6}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f_x = 0$$

即
$$p_x - p_n + \frac{1}{3}\rho\ \mathrm{d}x f_x = 0$$

因为 $\mathrm{d}x$ 是无穷小量，质量力项可以略去，因此得

$$p_x = p_n$$

同理，由 $\sum F_y = 0$，$\sum F_z = 0$ 可证得

$$p_y = p_n$$

$$p_z = p_n$$

故有
$$p_x = p_y = p_z = p_n \tag{2-1}$$

由于 $\triangle ABC$ 是任取的，所以由式(2-1)可得出结论：从各个方向作用于一点的流体静压强大小相等，即作用在一点上的流体静压强大小与其作用面在空间的方位无关。所以，在流体静力学中，对于一点的压强可以直接写成 p 而不必标明方向，但空间不同点上的静压强则可以是不一样的，即流体静压强应是空间点坐标的函数

$$p = f(x, y, z)$$

以上特性不仅适用于流体内部，而且也适用于流体与固体接触的表面。无论器壁的形状位置如何，流体的静压强对器壁的作用不仅垂直于作用面，而且其方向总是指向作用面的。

§2-2 流体平衡微分方程式、力函数、等压面

为进一步研究流体平衡规律和压强分布规律，我们在静止流体中取一边长分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 的平行正六面体微元(图 2-3)。设该微元体的中心

$A(x,y,z)$点处的压强为 p，以 M，N 分别表示 $2-2'-4'-4$ 面和 $1-1'-3'-3$ 面的形心点。因为压强的分布是空间坐标连续函数 $p=f(x,y,z)$，所以，可按**泰勒级数**展开并舍去二阶以上微小项，得 M，N 点的静压强表达式为

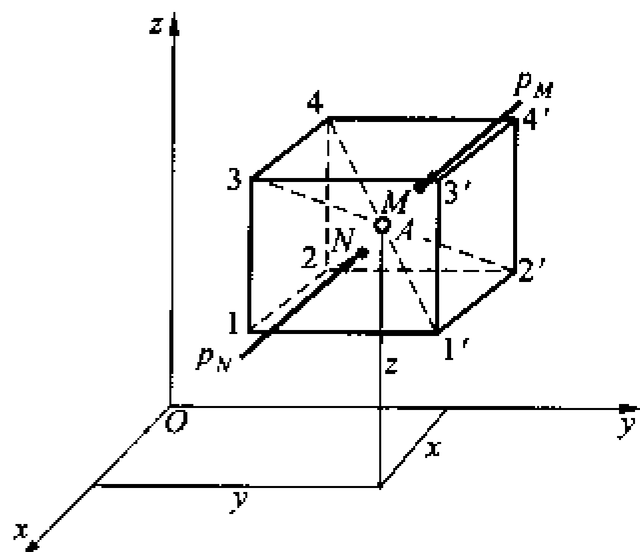


图 2-3

$$p_M = p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$p_N = p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

其中$\frac{\partial p}{\partial x}$为压强 p 在 x 方向上的变化率。因为所取的是微元六面体，所以 p_M 和 p_N 可分别代表作用在 $2-2'-4'-4$ 面和 $1-1'-3'-3$ 面上的平均压强。这样可以得到这二个面上的表面力为

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ 和} \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

设作用在该六面体上的**单位质量力**在各坐标轴方向上的分量分别为 f_x，f_y 和 f_z，流体的密度为 ρ，微元体的体积 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，则六面体沿 x 轴向的质量力为

$$\mathrm{d}F_{Qx} = \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z f_x$$

因为所研究的流体处于平衡状态，所以作用在该微小六面体流体上的各力在各坐标轴方向上的分力之和等于零。

沿 x 轴方向，$\sum F_x=0$，有

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z + \rho f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

化简得

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

同理可得

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (2-2)$$

$$f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

这就是**静止流体的平衡微分方程式**，它是欧拉于 1755 年首先得出的，所以通常又称之为**欧拉平衡微分方程**。以下在讨论静止流体的压强分布规律时，都将以欧拉平衡方程式为基础，所以这一方程式在流体静力学中占有很重要的

地位。

式(2-2)的物理意义为：在静止流体中，作用在单位质量流体上的质量力的分量与作用在该流体表面上的表面力的分量相互平衡。

将式(2-2)中各式分别乘以 dx，dy，dz，相加得

$$\rho\left(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z\right)=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2-3}$$

因为压强 p 是坐标的函数，即$p=f(x,y,z)$，所以式(2-3)右边为压强 p 的**全微分**，即

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2-4}$$

代入式(2-3)，得

$$\mathrm{d}p=\rho\left(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z\right) \tag{2-5}$$

对于不可压缩流体，$\rho=$常数。方程式的右边可看成是单位质量力沿某一方向移动微元距离所作的功。若平衡方程组(2-2)中的各式分别对坐标交错求偏导数，得到

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial f_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial z}=\frac{\partial f_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial x}=\frac{\partial f_x}{\partial z}$$

这是质量力所作的功与路径无关的充分必要条件，即只与起点和终点的位置有关，这样的质量力场称为势力场，质量力是有势力。若满足上述条件，必存在某一函数 $U(x,y,z)$，该函数对相应坐标的偏导数，等于单位质量力在相应坐标轴上的投影，即

$$\frac{\partial U}{\partial x}=f_x$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=f_y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=f_z$$

因此，方程式(2-5)的右边是函数 $U(x,y,z)$的全微分，即

$$\mathrm{d}p=\rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\rho\mathrm{d}U \tag{2-6}$$

由于函数 $U(x,y,z)$与质量力之间存在着上述关系，称函数 U 为力的势函数。满足这种关系的力称为**有势力**。

在空间力场中任取一点 $A(x,y,z)$(见图 2-4)，如果 A 点处的单位质量

流体在**有势质量力**f_x，f_y，f_z 的作用下，移动了 dl 的距离，dl 在各坐标方向的分量分别为 dx，dy，dz，则单位有势质量力所作的功应分别等于 $f_x dx$，$f_y dy$，$f_z dz$，它也反映了单位质量流体势能的变化。如在重力场内，重力是有势的质量力，则重力场中力的势函数就表示单位质量流体的位势能。

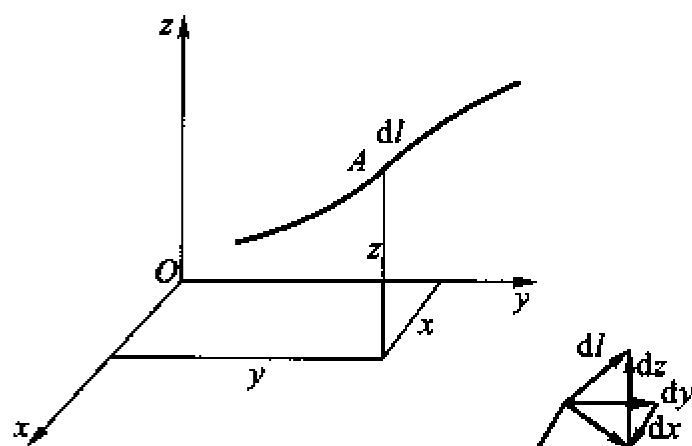


图 2-4

由上述可以得出结论，方程式(2-6)表明，只有在有势质量力的作用下，流体才能保持平衡。

在充满平衡流体的空间，连接压强相等的各点所组成的面称**等压面**。等压面具有三个重要的特性。

第一个特性：等压面就是**等势面**。

因为在等压面上 p 为常数，即 $dp=0$，根据式(2-5)可得

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \qquad (2-7)$$

即

$$dU = 0$$

$$U = 常数 \qquad (2-8)$$

由此可得出结论：等压面即为等势面。

式(2-7)、(2-8)称等压面方程或等势面方程，当取不同的积分常数值时，可得一簇等压面，而在平衡液体中等压面就是等势面。

第二个特性：在平衡的流体中，通过每一质点的等压面必与该点所受的质量力相垂直。这一特性可证明如下：

因为在等压面上有

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

其中单位质量力的向量为 $\boldsymbol{f}(f_x, f_y, f_z)$，在等压面上取向量 $d\boldsymbol{l}(dx, dy, dz)$。由矢量代数，一个向量的点积为

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{l} = f_x dx + f_y dy + f_z dz = |\boldsymbol{f}||d\boldsymbol{l}|\cos(d\boldsymbol{l}, \boldsymbol{f}) = 0$$

而一般情况下

$$|\boldsymbol{f}| \neq 0 \qquad |d\boldsymbol{l}| \neq 0$$

所以，若上式成立，则必须有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{f}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是在等压面上任选的向量。这一结果也可以解释为质量力沿等压面所作的功为零，所以我们说质量力必与等压面相垂直。

由等压面这一特性，我们可根据作用在流体质点上质量力的方向来确定等压面的形状。例如，对于只受重力作用的静止流体，因重力的方向总是铅直向下的，所以其等压面必是水平面。

第三个特性：两种互不相混的流体，当它们处于平衡状态时，其分界面必为等压面。这一特性简单说明如下：

如果在分界面上任意取两点 A 和 B，若两点之间存在着静压差 $\mathrm{d}p$，势差 $\mathrm{d}U$，因为 A，B 二点系取在分界面上，所以 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}U$ 同属于两种液体。设其中一种流体的密度为 ρ_1，另一种流体的密度为 ρ_2，则可分别有关系式

$$\mathrm{d}p = \rho_1 \mathrm{d}U$$

$$\mathrm{d}p = \rho_2 \mathrm{d}U$$

因为 $\rho_1 \neq \rho_2$，且都不为零，所以只有当 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}U$ 均为零时方程式才能成立。由此可见，分界面必为等压面或等势面。

§2-3 重力作用下流体平衡基本方程式

流体平衡微分方程式(2-5)是平衡流体的普遍规律，它对在任何有势质量力作用下的平衡流体均适用。工程技术上最常见的是质量力只有重力作用下的平衡流体。下面来分析质量力只有重力作用时的静止流体中压强分布规律——流体静压强基本方程式。

1. 均质流体

由于一般液体的密度随液体中的压强、温度等力学参数变化很小，所以在工程技术上，通常将液体看作均质流体。

现以容器中处于绝对静止的液体为研究对象，选坐标系如图 2-5 所示。由于液体所受质量力只有重力，所以单位质量流体的质量力在各坐标轴上的分量为

$$f_x = 0;\ f_y = 0;\ f_z = \frac{-mg}{m} = -g$$

式中 m 为流体的质量。将 f_x，f_y，f_z 代入式(2-5)得

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$$

移项得

$$\rho g \mathrm{d}z + \mathrm{d}p = 0$$

对于均质流体，有

$$\mathrm{d}(\rho g z + p) = 0$$

积分得

$$\rho g z + p = C \tag{2-9}$$

式中 C 为积分常数，由边界条件确定。若 1，2 是连续均质流体中任意二点。设点 1 的垂直坐标为 z_1，静压强为 p_1；点 2 的垂直坐标为 z_2，静压强为 p_2（图 2-5），则式(2-9)可写成

$$\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_2 + p_2 = \text{常数}$$

或

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \text{常数} \tag{2-10}$$

式(2-9)或式(2-10)就是重力作用下**流体平衡基本方程式。**

流体平衡基本方程式的适用范围是在重力作用下的连续均质平衡流体。对于分装在互不连通的两个容器内的流体(不满足连续性条件)，以及虽装在同一容器中但密度不同(不满足均质流体条件)的流体，不能应用上式。

将流体平衡基本方程式(2-10)改变一下形式，可得表示流体中任意点压强的静压强分布公式。如图 2-5 所示，取流体中任意点 A，其对基准面的高度为 z，自由表面上的一点 B 的高度为 z_0，压强为 p_0。对 A、B 两点列出平衡方程式

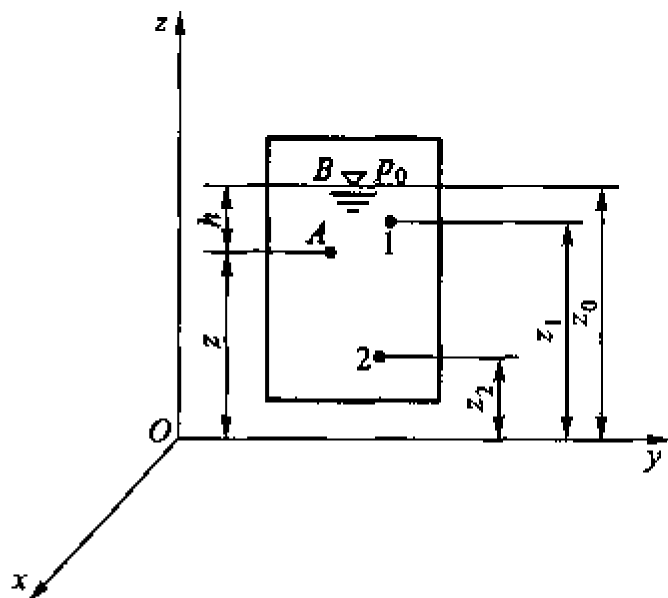


图 2-5

$$\rho g z + p = \rho g z_0 + p_0$$

整理后可得

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z)$$

式中$(z_0 - z)$为任一点 A 的垂直液体深度，又称淹深，若以 h 表示，可得

$$p = p_0 + \rho g h \tag{2-11}$$

式(2-11)表示均质流体在重力作用下压强的分布规律，又称流体静压强基本公式，是流体静力学计算中最常用的公式。对此公式进一步分析可知：

(1) 在重力作用下的均质流体内部的压强随深度 h 按线性关系变化。其斜率大小由密度 ρ 决定。

(2) 重力作用下的流体中任一点的压强由 p_0 和 $\rho g h$ 这二部分组成。p_0 称流体自由表面上的静压强，$\rho g h$ 称为剩余压强。

(3) 因为在深度 h 相同的点压强相等，故在重力作用下均质绝对静止流体中，等压面为一簇水平面。

2. 重力作用下气体的平衡规律

对于气体，若在某些场合下，其密度可视为常数时，则以上所讨论均质流体平衡规律完全适用。而在气体的密度不能看作为常数的场合下，在均质流体的前提下所讨论的平衡规律不能适用。以下对变密度气体的平衡规律加以讨论。

若气体处于等温状态，由物理学中我们知道有气体的物态方程式

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

式中　R——气体常数；

　　　T——气体的温度。

将上式和重力作用下单位流体质量力的各分量 $f_x = 0$，$f_y = 0$ 和 $f_z = -g$ 代入方程式(2-5)中，得

$$\mathrm{d}p = \frac{p}{RT}(-g\mathrm{d}z)$$

$$RT\frac{\mathrm{d}p}{p} = -g\mathrm{d}z$$

或写成

$$RT\frac{\mathrm{d}p}{p} + g\mathrm{d}z = 0$$

积分得

$$gz + RT\ln p = C$$

当 $z = z_0$ 时，$p = p_0$，可得出积分常数

$$C = gz_0 + RT\ln p_0$$

最后得

$$z - z_0 = \frac{RT}{g}\ln\frac{p_0}{p} \tag{2-12}$$

此即为等温气体平衡状态下压强的分布规律。

若气体处于**绝热状态**时，根据气体绝热过程有 pv^{κ} = 常数，可知

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}} \quad 或 \quad \frac{p}{v^{\kappa}} = \frac{p_0}{v_0^{\kappa}}$$

式中　v——气体的比体积；

　　　κ——等熵指数。

将上式代人式(2-5)得

$$dp = -\rho_0 g\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa} dz$$

或

$$dz = -\frac{1}{\rho_0 g}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\kappa} dp$$

积分上式，并取 $z = z_0$ 处 $p = p_0$，整理后得

$$z - z_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0 g}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] \tag{2-13}$$

此式即为气体在重力作用下绝热平衡时的压强分布规律。

如果将压强与密度的关系式代人式(2-13)，可得

$$z - z_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0 g}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa-1}\right] \tag{2-14}$$

上式表示气体在重力作用下，绝热平衡时密度的变化规律。若气体处于任意多变过程时，式(2-13)将变为

$$z - z_0 = \frac{n}{n - 1}\frac{p_0}{\rho_0 g}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{n-1}\right] \tag{2-15}$$

式中　n——气体的多变常数。

因为气体的密度 ρ 较小，所以在讨论容器和管道中的气体时，一般都忽略气体密度随高度的变化。

§2-4　流体中压强的表示方法、平衡基本方程式的物理意义

当度量压强的大小时，在法定单位制(即 SI)中用 N/m^2 (即 Pa)作为压强单位。此外，还常用工程大气压来度量压强的大小。在重力场中表示很小的压强或要精密测定压强的场合下，压强的单位又往往用液柱的高度来表示。

由式(2-11)可知，$h = (p - p_0)/\rho g$。在一般情况下，p_0 和 ρ 为已知的常数，所以压强就可用液柱高 h 来表示。如果所用的液体是水银、水或其它液体，压强便可分别表示为 mm 水银柱，mm 或 m 水柱，mm 或 m 某种液柱等。上述各单位之间的变换关系如表 2-1 所示。

根据不同场合，压强的表示形式又有**绝对压强**、**计示压强**和**真空度**之分。

表 2-1 压强单位制的换算

单位制表示	帕 Pa	巴 bar	公斤力每平方厘米 kgf/cm^2
互换关系	1	1×10^{-5}	$1.019\,72\times10^{-5}$
	1×10^{5}	1	1.019 72
	$9.806\,65\times10^{4}$	$9.806\,65\times10^{-1}$	1
	$1.013\,25\times10^{5}$	1.013 25	1.033 23
	9.806 38	$9.806\,38\times10^{-5}$	$9.999\,72\times10^{-5}$
	$1.333\,22\times10^{2}$	$1.333\,22\times10^{-3}$	$1.359\,51\times10^{-3}$
单位制表示	标准大气压 atm	毫米水柱 mmH_2O	毫米水银柱 mmHg
互换关系	$9.869\,23\times10^{-6}$	$1.019\,74\times10^{-1}$	$7.500\,64\times10^{-3}$
	$9.869\,23\times10^{-1}$	$1.019\,74\times10^{4}$	$7.500\,64\times10^{2}$
	$9.678\,41\times10^{-1}$	$1.000\,03\times10^{4}$	$7.355\,61\times10^{2}$
	1	$1.033\,26\times10^{4}$	$7.600\,02\times10^{2}$
	$9.678\,14\times10^{-5}$	1	$7.355\,41\times10^{-2}$
	$1.315\,79\times10^{-3}$	$1.359\,54\times10$	1

对于式(2-11)来说，若**自由表面**之压强为大气压强，即 $p_0=p_a$ 则又可写成

$$p=p_a+\rho gh$$

定义

$$p_m=p-p_a=\rho gh$$

式中 p——称为流体的绝对压强；

p_a——当地大气压强；

p_m——称为流体的计示压强，因为它通常由压力表直接测得，故可简称为表压强。又因为它是流体的绝对压强与大气压强的差值，所以又可称为**相对压强**。

对绝对压强、计示压强和真空度的概念进一步说明如下：

(1) 绝对压强

绝对压强是指以绝对真空为零点开始计量的压强(图 2-6)，以 p_{ab}表示

$$p_{ab}=p_0+\rho gh_0=p_a+\rho gh=p_a+p_m$$

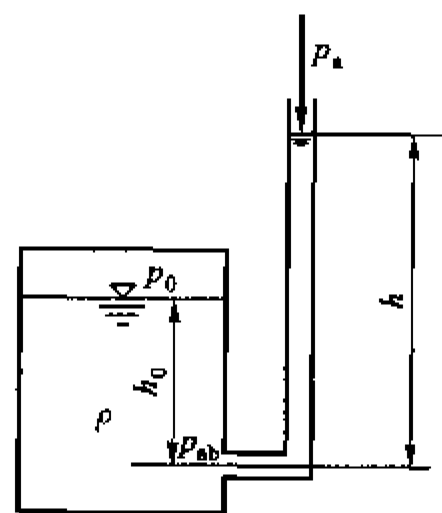


图 2-6

在气体状态方程式中，压强就是以绝对压强标

记的。

(2) 计示压强

计示压强指以大气压为零计量的压强，即为绝对压强与大气压之差(图2-6)，以 p_m 表示

$$p_m = p_{ab} - p_a = p_a + \rho gh - p_a = \rho gh$$

在许多工程设备中，由于其内、外各处所受大气压相互抵消而不显示其作用，因而在大多数压力仪表中都是以大气压为起点计量。在开口容器及不可压缩流体的静压强计算问题中，一般都采用表压，以无角标的符号 p 表示。

(3) 真空度

工程上有绝对压强大于大气压的情况，也有绝对压强小于大气压的情况。例如水泵、油泵的吸入管中，风机吸风管内的气体压强，都低于大气压。这些部位的相对压强 $p_{ab} - p_a$ 是负值，绝对压强不足于大气压的差值称为真空度(图2-7)。所以真空度是指流体的绝对压强小于大气压而形成真空的程度。如用数学式表示，即为

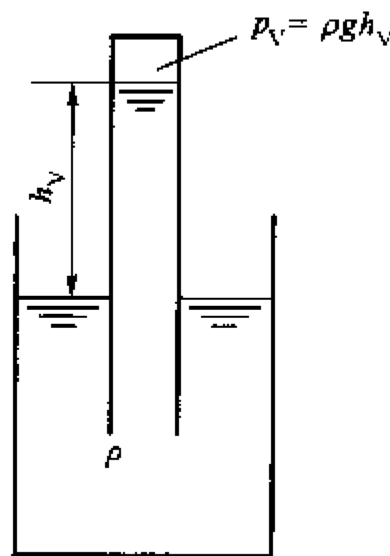


图 2-7

$$p_V = p_a - p_{ab} = \rho gh_V = -p_m$$

如用液柱高来表示，即

$$h_V = \frac{p_V}{\rho g} = \frac{p_a - p_{ab}}{\rho g}$$

例如某容器内流体的绝对压强为0.03 MPa，则它相应的真空度为

$$p_V = p_a - p_{ab} = 0.07\ \text{MPa}$$

或

$$h_V = \frac{p_V}{\rho g} = 7.14\ \text{m 水柱}$$

绝对压强、计示压强和真空度相互之间的关系可用图2-8表示。从零压线计起的压强为绝对压强，绝对压强高于大气压强时，计示压强为正值；绝对压强低于大气压强线时，计示压强为负值，负的计示压强就是真空度。

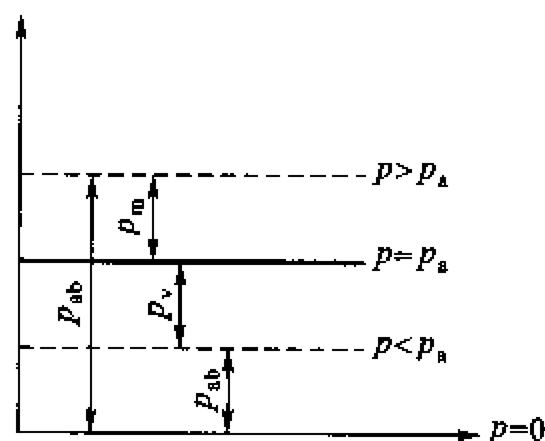


图 2-8

上述定义可归纳如下：

绝对压强 = 大气压 + 计示压强

计示压强 = 绝对压强 - 大气压

绝对压强 = 大气压 - 真空度

真空度 = 大气压 - 绝对压强

应该注意的是，计示压强 = 负的真空度。

有了以上一些基本知识，我们回过头再来看一下平衡基本方程式的意义。

对于式(2-9)的物理意义可进一步分析如下：

图 2-9 表示一封闭容器，其中盛有密度为 ρ 液体，自由液面上的压强为 p_0。在距容器底面为 z 的边壁上开一小孔 C；设该点压强为 p，小孔与一根上端完全封闭且抽成真空的小管相连通。可以发现小管中的液位迅速上升至 A 点，液柱高度为 h，恰好等于 $p/\rho g$。而 C 点和 A 点处单位重力流体的位能差为 h，这说明 $p/\rho g$ 代表一种能量，通常称为压力能，而 z 可看成单位重力流体所具有的位能。因此，式(2-9)说明液体中任何一点的压力能与位能之和是一常数。即压力能与位能可以相互转换，但其总和保持不变。式(2-9)可以说是能量守恒定律在流体静力学中的具体体现。

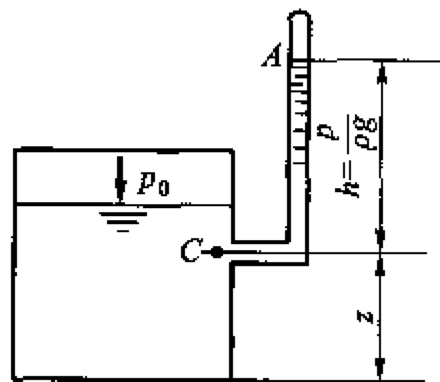


图 2-9

§2-5 重力和其它质量力同时作用下流体的平衡

在相对平衡的流体中，虽然相对地球存在着运动，但由于流体质点间不存在相对运动，所以流体中仍不显现粘滞力作用。此时流体质点除受重力作用外，另外虚加上与加速运动相对应的惯性力。这样，根据达朗伯原理，我们在相对平衡的流体质点上虚加以相应的惯性力，就可按静力学的方法来研究相对平衡流体，此时，在应用欧拉平衡方程式(2-2)时，其中 f_x，f_y，f_z 应包含所有各种质量力(即重力及惯性力)。

以下我们将讨论流体在重力与定向等值惯性力联合作用下，以及重力与定值离心惯性力联合作用下相对静止流体的平衡规律。

1. 等加速直线运动流体的平衡

图 2-10a 为一盛有流体的容器，容器相对地球作匀速直线运动。此时，流体虽相对地球是运动着的，但流体相对容器却是静止的，流体质点间也不发生相对运动。这种情况下，流体的质量力只有重力，只要把坐标系取在容器上，则前面介绍的关于重力作用下绝对静止流体的平衡规律和特性将完全适

用。它们的等压面也是一簇水平面。流体内任意一点的压强可以由静力学基本公式求得。

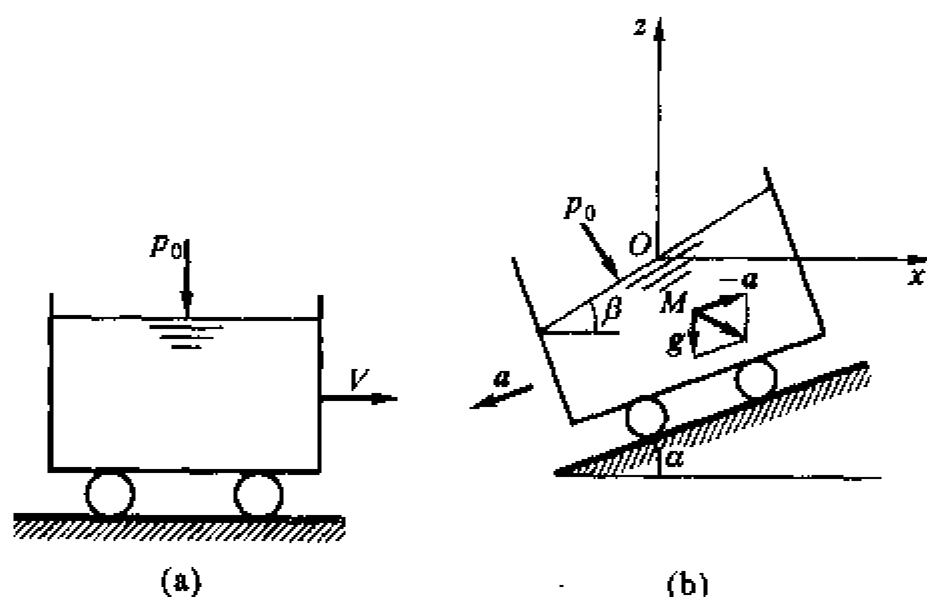


图 2－10

图 2－10b 中表示一盛有液体的容器沿与水平面成 α 角的斜坡以等加速度 a 向下运动，容器内液体在图示的新的状态下达到平衡，液体质点间不存在相对运动。我们仍将坐标系选在容器上。此时，液体除受有重力作用之外，还要加上一个假想的达朗贝尔力，就是直线惯性力，它的大小为液体质量乘以加速度，方向与加速度相反。现在研究图 2－10b 所示液体的压强分布规律。

液体单位质量所受的质量力在各坐标方向上的分量为

$$f_x = a\cos\alpha,\ f_y = 0,\ f_z = a\sin\alpha - g$$

将 f_x，f_y，f_z 分别代入式(2－5)后，相加得

$$\mathrm{d}p = \rho\left[a\cos\alpha\,\mathrm{d}x + (a\sin\alpha - g)\mathrm{d}z\right] \tag{2-16}$$

积分得到

$$p = \rho\left[a\cos\alpha\cdot x + (a\sin\alpha - g)z\right] + C$$

当 $x=0$，$z=0$，即在自由表面上时，压强为 $p = p_0$，得到积分常数 $C = p_0$。于是有

$$p = p_0 + \rho\left[a\cos\alpha\cdot x + (a\sin\alpha - g)z\right] \tag{2-17}$$

式(2－17)即为等加速运动容器中液体的静压强分布公式。公式表明，压强 p 既随坐标 z 变化，又随坐标 x 变化。

在讨论图 2－10b 情况下的液体压强分布时，最有实际应用意义的是研究处于同一铅垂线上(即 z 轴方向)各点的压强分布规律。对于这种情况，由于在 z 轴上各点的 x 坐标并无变化，即 $\mathrm{d}x=0$，因而式(2－16)变为

$$\mathrm{d}p = \rho(a\sin\alpha - g)\mathrm{d}z$$

积分得

$$p = \rho(a\sin\alpha - g)z + C$$

在自由表面 $z=0$ 处，有 $p=p_0$，得积分常数 $C=p_0$，因而得

$$p = p_0 + \rho(a\sin\alpha - g)z$$

当设点 M 的淹深 $h=-z$ 时，上式又可写成

$$p = p_0 + \rho(g - a\sin\alpha)h$$

这是图 2-10b 所示液体沿液深的压强分布规律，由此式可求出任一水深 h 处的压强。

现在来讨论图 2-10b 所示液体中的等压面方程。由等压面的定义 $\mathrm{d}p=0$，式(2-16)变为

$$a\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{d}x + (a\sin\alpha - g)\mathrm{d}z = 0$$

又可写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}$$

式中$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$即为等压面的斜率。由于 a，g 及 α 都是常数，所以等压面的斜率是一个定值。令$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\tan\beta$，则

$$\tan\beta = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha} \tag{2-18}$$

这就是等压面的方程式，它说明等压面是一簇与水平面成 β 角的平行平面，此斜率为一定值。

当液体随容器作水平方向等加速运动时，由于此时 $\alpha=0$，故这种情况下的液体压强分布规律为

$$p = p_0 + \rho gh \tag{2-19}$$

等压面方程为

$$\tan\beta = \frac{a}{g} \tag{2-20}$$

当液体随容器在铅垂方向作等加速运动时，$\alpha=\frac{3}{2}\pi$ 或 $\alpha=\frac{1}{2}\pi$，故这种情况下的液体压强分布规律为

$$p = p_0 + \rho h(g \pm a) \tag{2-21}$$

等压面为一簇水平面。

2. 重力与离心力同时作用下流体的平衡

如图 2-11 所示，一盛有液体的容器绕垂直轴 z 以等角速度 ω 旋转。在开始转动时，由于液体具有粘性，所以液体与容器壁接触表面上因相对运动而产生了粘性力。液体在粘滞力作用下，从边壁到中心逐渐都随容器绕 z 轴转动。

与此同时，液体由于离心作用而向外甩，这一初始过程结束后，液体将成为一个相对稳定的整体随同容器一起转动，即达到了液体对容器的相对平衡。此时，作用在液体质点上的质量力除重力外，还有一大小等于液体质点的质量乘以向心加速度、方向与向心加速度相反的离心惯性力。

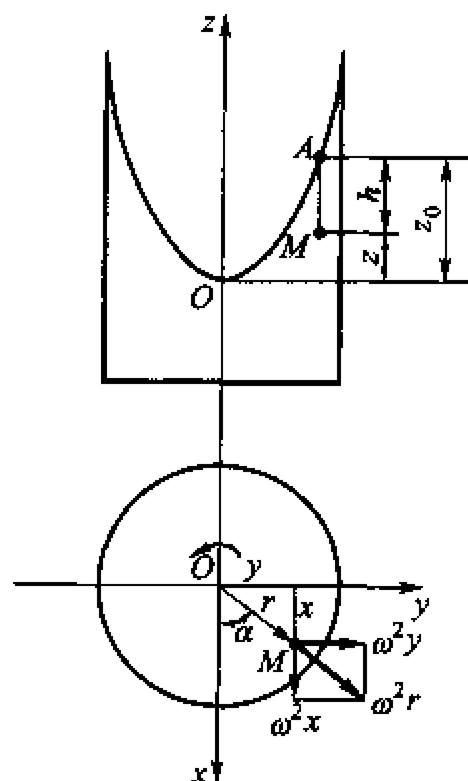


图 2-11

现在我们来研究图2-11所示液体的压力分布规律，选择相对参考坐标系 $Oxyz$ 如图中所示。

此时，单位质量液体所受的质量力为

$$f_x = \omega^2 r\cos\alpha = \omega^2 x$$

$$f_y = \omega^2 r\sin\alpha = \omega^2 y$$

$$f_z = -g$$

式中 r——质点到旋转轴的距离，亦即质点的旋转半径；

x，y——r 在二水平坐标轴上的投影。

将单位质量力的坐标分量代入欧拉平衡方程的全微分式(2-5)中，得

$$\mathrm{d}p = \rho\,(\omega^2 x\mathrm{d}x + \omega^2 y\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z) \tag{2-22}$$

积分得

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz\right) + C$$

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right) + C$$

根据边界条件，当 $r=0$，$z=0$ 时，$p=p_0$，可求得积分常数 $C=p_0$，于是得

$$p = p_0 + \rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z\right) \tag{2-23}$$

式(2-23)就是等角速度旋转容器中液体的静压强分布公式。由公式可见，在同一几何高度上，液体的静压强沿径向按半径的二次方增大。

下面研究图2-11情况下液体的等压面方程。

将各单位质量力的分量代入等压面方程式(2-7)，得

$$\omega^2 x\mathrm{d}x + \omega^2 y\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z = 0$$

积分得

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = C$$

或

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C \tag{2-24}$$

此式即为等角速旋转容器中液体的等压面方程。由方程可见，等压面是一簇绕 z 轴的旋转抛物面。

在自由表面上，当 $r=0$ 时，$z=0$，可得积分常数 $C=0$。故自由表面方程为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_0 = 0$$

或

$$z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{2-25}$$

若将式(2-25)代入式(2-23)，又可得压强分布规律的另一种表达形式

$$p = p_0 + \rho g\ (z_0 - z) = p_0 + \rho gh \tag{2-26}$$

由式(2-26)可见，绕垂直轴等角速度旋转容器中液体的静压强分布规律与绝对静止流体中静压强分布公式(2-11)完全相同，即液体内任一点的静压强，等于液面上的压力 p_0 加上液体的 ρg 与该点淹深 h 的乘积。

§2-6 静止流体对平面壁的作用力

在工程实际中，常常不仅需要了解流体内部的压强分布规律，还需要知道与流体接触的不同形状、不同几何位置上的固体壁面所受到流体对它作用的总压力，以及这种力的计算方法。

本节中将首先讨论流体在重力作用下对固体平面壁的总作用力及其压力中心。

如图 2-12 所示，假设 ab 为一块面积为 A 的任意形状的平板，它与液体表面成 θ 角倾斜放置，设液体自由表面上的压强为 p_0。

我们分析作用在平板 ab 上的力。为了便于分析起见，将平板 ab 绕 Oy 轴转动 90°，如图 2-12 所示。在平板上取一微元面积 $\mathrm{d}A$，其中心点距自由表面的距离为 h，作用在 $\mathrm{d}A$ 中心点上的压强为 p，则 $p = p_0 + \rho gh$。只要 $\mathrm{d}A$ 取得足够小，就可以认为作用在 $\mathrm{d}A$ 上面的液体压强都为 p。因此，作用在 $\mathrm{d}A$ 面上的合力应为

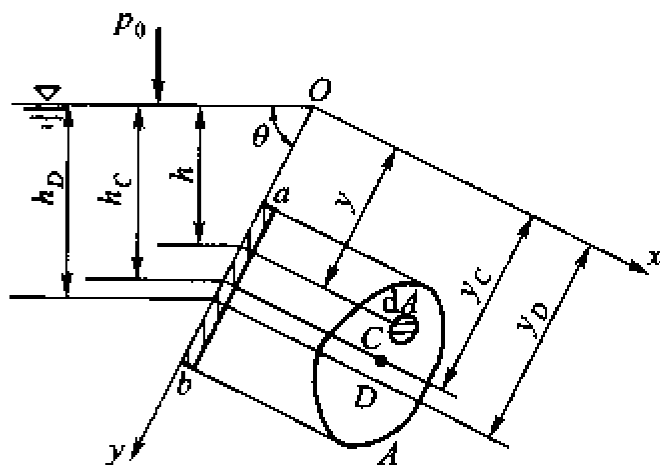


图 2-12

$$dF_P = p\,dA = (p_0 + \rho gh)dA = p_0 dA + \rho gy\sin\theta dA$$

作用在整个平板 ab 上的合力应为

$$F_P = \int_A dF_P = \int_A p_0 dA + \int_A \rho gy\sin\theta dA$$
$$= p_0 A + \rho g\sin\theta\int_A y dA$$

式中$\int_A y dA$ 为平板面积 A 对于 x 轴的**静力矩**。若设 C 点为平面 A 的**形心**，则根据**静力矩定理**有

$$\int_A y dA = Ay_C$$

式中 y_C 为 C 点至 x 轴的垂直距离。这样，又可得

$$F_P = p_0 A + \rho gy_C\sin\theta A = (p_0 + \rho gh_C)A \tag{2-27}$$

式中$(p_0 + \rho gh_C)$为面积 A 的形心点处的静压强。式(2－27)表示静止液体作用在平面壁上的合力大小，它等于平面形心处的静压强与平面面积的乘积。

下面讨论总压力 F_P 的作用点，即**压力中心**。

设 D 点为平面 A 的压力中心。因为作用在平面 A 上的每一微小面积 dA 上的压强是互相平行的，因此所有微小面积所受的力对 x 轴的静力矩之和应等于作用在面积 A 上的合力对 x 轴的静力矩，即

$$F_P y_D = \int_A y dF_P$$

式中 dF_P——作用在微小面积 dA 上的力；

y——dA 的中心到 x 轴的距离；

y_D——合力作用中心到 x 轴的距离。

将 F_P 和 dF_P 的表达式代入上式得

$$(p_0 + \rho gh_C)\ Ay_C = \int_A (p_0 + \rho gy\sin\theta)\ y dA$$

或

$$(p_0 + \rho gy_C\sin\theta)\ Ay_D = \int_A p_0 \cdot y dA + \rho g\sin\theta\int_A y^2 dA \tag{a}$$

式中

$$\int_A p_0 y dA = p_0 y_C A \tag{b}$$

根据材料力学中惯性矩的定义可得

$$\int_A y^2 dA = I_x \tag{c}$$

再根据**平行移轴定理**得

$$I_x = I_{Cx} + y_C^2 A \tag{d}$$

式中 I_x——平面 A 对 x 轴的惯性矩；

I_{Cx}——平面 A 相对于通过形心 C 并与 x 轴平行的轴的惯性矩。常见平面

图形的 y_C 和 I_C 可查表 2-2。

表 2-2 常见图形的 y_C 和 I_C

图形名称		y_C	I_C
半圆		$\dfrac{4R}{3\pi}$	$\dfrac{(9\pi^2-64)R^4}{72\pi}$
圆		R	$\dfrac{\pi R^4}{4}$
圆环		R	$\dfrac{\pi(R^4-r^4)}{4}$
矩形		$\dfrac{h}{2}$	$\dfrac{bh^3}{12}$
等边梯形		$\dfrac{h(a+2b)}{3(a+b)}$	$\dfrac{h^2(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$
三角形		$\dfrac{2h}{3}$	$\dfrac{bh^3}{36}$

将(b)、(c)、(d)代入式(a)得

$$y_D=\frac{p_0y_CA+\rho g\sin\theta\,(I_{Cx}+y_C^2A)}{(p_0+\rho gy_C\sin\theta)A}$$

$$=y_C+\frac{I_{Cx}\rho g\sin\theta}{(p_0+\rho gy_C\sin\theta)A} \tag{2-28}$$

当 $p_0=0$ 时，得

$$y_D=y_C+\frac{I_{Cx}}{y_CA} \tag{2-29}$$

因为 $I_{Cx}/(y_CA)$恒为正值，故有 $y_D>y_C$，即压力中心 D 永远处于形心 C 的下面，其间的距离为 $I_{Cx}/(y_CA)$。

若平板 ab 在 x 方向不对称，可用与上述相同的方法求得**压力中心**的 x 坐标为

$$x_D=\frac{I_{xy}}{y_CA}$$

式中　I_{xy}——平板对 x 轴和 y 轴的惯性积。

§2-7　静止流体对曲面壁的作用力、压力体

本节中将着重讨论流体在重力作用下对曲面壁的总作用力。

作用在曲面上各点的流体静压力都垂直于容器壁，但对于曲面壁上不同的点，作用力的大小和方向都发生变化，这就形成了一个复杂的空间力系，求总压力的问题可以看做为空间力系的合成问题。工程上常用到二维曲面，下面我们就以二维曲面为例，来讨论静止流体作用在曲面壁上的合力，从而得出求曲面壁合力的一般方法。

如图 2-13 所示，设有一承受液体压力的二维曲面，其面积为 A，且沿宽

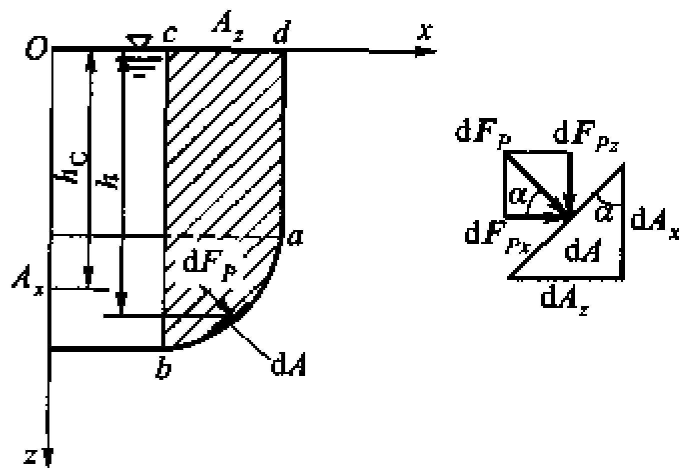


图　2-13

度方向是对称的。令参考坐标系的 y 轴与二维曲面的母线平行，则曲面在 Oxz 平面上的投影便成为曲线 ab。在曲面 ab 上任意取一微小面积 $\mathrm{d}A$，它的淹深为 h，则液体作用在它上面的总压力为

$$\mathrm{d}F_P=(p_0+\rho gh)\mathrm{d}A$$

为计算方便起见，我们将 $\mathrm{d}F_P$ 分解为水平方向与垂直方向的两个分力 $\mathrm{d}F_{Px}$，$\mathrm{d}F_{Pz}$，并将此二力分别在整个面积 A 上进行积分，这样便可求得作用在曲面上的总压力的水平分力与垂直分力 F_{Px}，F_{Pz}，并求出总压力的大小、方向及作用点。

1. 总压力的水平分力 F_{Px}

设 α 为微元面积 $\mathrm{d}A$ 的法线与 x 轴的夹角，则微元水平分力为

$$\mathrm{d}F_{Px}=(p_0+\rho gh)\mathrm{d}A\cos\alpha$$

其中 $\mathrm{d}A\cos\alpha=\mathrm{d}A_x$，则总压力的水平分力为

$$F_{Px}=\int_A(p_0+\rho gh)\,\mathrm{d}A_x=p_0A_x+\rho g\int_A h\mathrm{d}A_x$$

式中 $\int_A h\mathrm{d}A=h_CA_x$ 为面积在 Oyz 坐标面上的投影面积 A_x 对 y 轴的面积矩，故上式可写成

$$F_{Px}=p_0A_x+\rho gh_CA_x=(p_0+\rho gh_C)A_x \qquad (2-30)$$

式(2-30)即为流体作用在曲面上的总压力的水平分力计算公式，即液体作用在曲面上的总压力的水平分力，等于流体作用在该曲面对垂直坐标面 Oyz 的投影 A_x 上的总压力。同液体作用在平面上的总压力一样，水平分力 F_{Px} 的作用点通过 A_x 的压力中心。

2. 总压力的垂直分力 F_{Pz}

由图 2-13 可见，微元垂直分力为

$$\mathrm{d}F_{Pz}=(p_0+\rho gh)\mathrm{d}A\cdot\sin\alpha$$

其中 $\mathrm{d}A\sin\alpha=\mathrm{d}A_z$，得总压力的垂直分力为

$$F_{Pz}=\int_A(p_0+\rho gh)\,\mathrm{d}A_z=p_0A_z+\rho g\int_A h\mathrm{d}A_z \qquad (2-31)$$

不难看出式中 $\int_A h\mathrm{d}A_z=V$——曲面 ab 上的体积 $abcd$（图 2-13 的阴影部分）。通常称体积 V 为压力体，这样式(2-31)变成

$$F_{Pz}=p_0A_z+\rho gV \qquad (2-32)$$

式(2-32)表明了流体作用在曲面上的垂直分力，等于压力体乘以流体的重力与表面力作用在该曲面对自由液面的投影 A_z 上的总压力之和。

求出流体对曲面的分力 F_{Px}，F_{Pz}后，就不难求出流体对曲面的总作用力。总作用力的大小为

$$F_P = \sqrt{F_{Px}^2 + F_{Pz}^2} \tag{2-33}$$

总作用力的作用方向与垂线之间的夹角可由下式确定

$$\tan\theta = \frac{F_{Px}}{F_{Pz}} \tag{2-34}$$

总作用力的作用点可以这样确定：如图 2-14 所示，垂直分力的作用线通过压力体的重心而指向受压面，水平分力的作用线通过 A_x 平面的压力中心而指向受压面，总作用力的作用线必通过两条作用线的交点 D'，且与垂线成 θ 角。这条总作用力的作用线与曲面的交点 D 就是总作用力在曲面上的作用点。

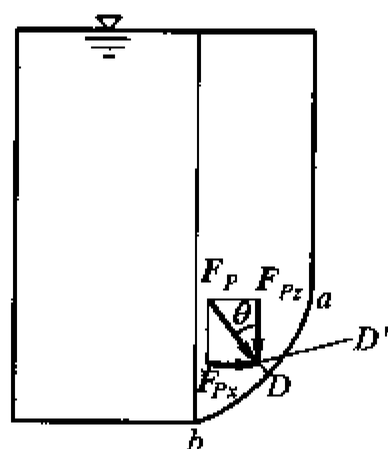


图 2-14

对于求取三维曲面在流体作用下所受总作用力的方法，与以上讨论的二维曲面情况完全相同，即用求总作用力各坐标分量的方法来确定曲面所受的作用力。其中 x 轴方向与 z 轴方向的分力 F_{Px}，F_{Pz}与以上求取方法完全相同，y 轴方向的分力 F_{Py}为

$$F_{Py} = (p_0 + \rho g h_C) A_y \tag{2-35}$$

总作用力

$$F_P = \sqrt{F_{Px}^2 + F_{Py}^2 + F_{Pz}^2} \tag{2-36}$$

3. 压力体

在求取流体作用在曲面壁上的垂直分力时，我们引出了**压力体**的概念。压力体是从积分式$\int_A h\mathrm{d}A_z$ 得到的一个体积，这是一个纯数学的概念。即压力体本身并不计较其内是否有流体存在。所以对压力体可进一步定义为：由所研究的曲面，通过曲面周界所作的垂直柱面和流体的自由表面（或其延伸面）所围成的封闭体积叫做压力体 V。

流体作用在曲面上的垂直分力在不同情况下是不同的，可能向下，也可能向上。在图 2-15 中，不难分辨流体作用在曲面 A 上的力的作用方向，a，c 两种情况垂直分力向下，面 b，d 两种情况垂直分力向上。当以计示压强表示的表面压强 p_0 为零时，曲面 A 上的流体垂直方向作用力大小为

$$F_{Pz} = V \cdot \rho g$$

式中 $V\cdot\rho g$ 从形式上看，它表示具有体积为 V 的流体重力。一般认为重力是向下的，但图 b，d 两种情况流体作用的结果，垂直分力向上。所以我们又称图

b，d 这种情况的压力体为虚压力体；图 a，c 这两种情况的压力体为实压力体。因此定义：当所讨论的流体作用面为压力体的内表面时，称该压力体为实压力体；而当作用面为压力体的外表面时，称该压力体为虚压力体。

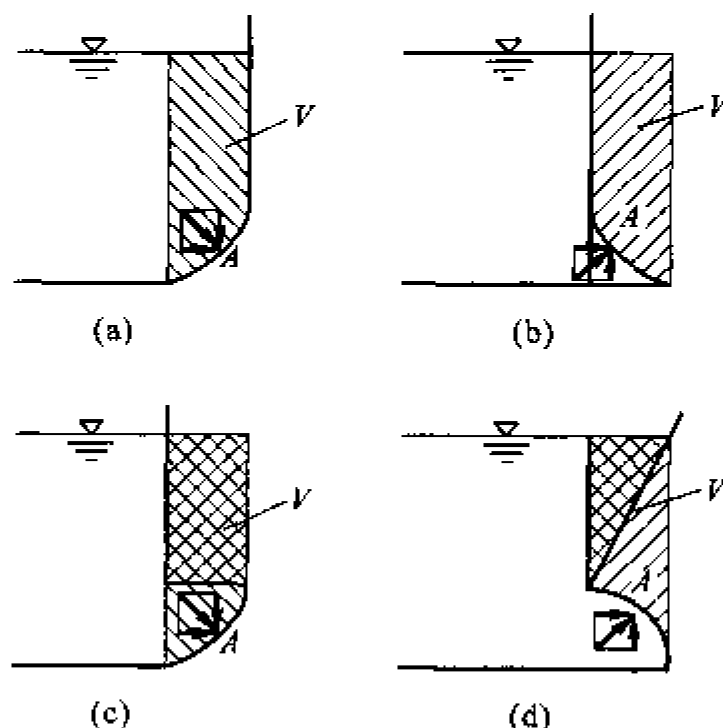


图 2-15

在计算流体对作用面上的总作用力时，在很多场合下(包括液体存在其它质量力的情况)，如能灵活运用压力体的概念，会给计算带来很大的方便。

利用压力体这一概念及方法，可以方便的证明阿基米德浮力原理。

液体对潜入其中的物体的作用力称为浮力。阿基米德原理为：沉没在液体中的物体，受到垂直向上的浮力，浮力的大小等于物体所排开的同体积液重。在物理学中，曾采用实验方法证明这一原理。现在我们用求平面或曲面上的液体总压力的计算方法来加以证明。

假设在静止液体中有一平衡的物体如图 2-16*a* 所示，因该物体的表面是封闭曲面，不难看出，液体对该物体的水平方向上的作用力相互抵消，即 $F_{Px}=F_{Py}=0$。对于垂直方向上的合力，可应用压力体的方法求取。

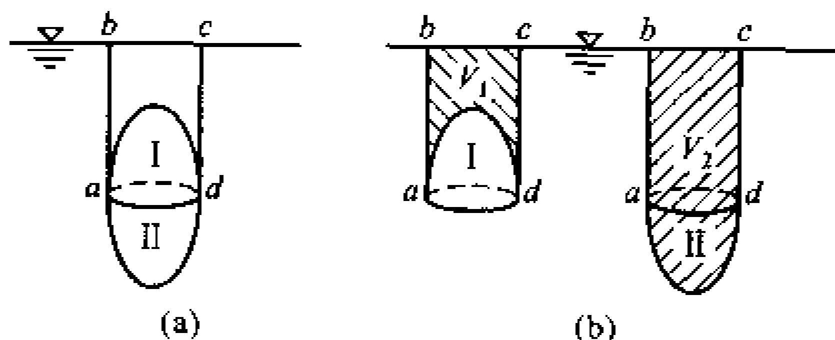


图 2-16

将物体按外表面分割为上凸曲面Ⅰ和下凸曲面Ⅱ两部分。对于上凸曲面，液体在垂直方向上的作用力为

$$F_{z1} = \rho g V_1$$

式中 V_1 为实压力体，F_{z1}方向向下；对于下凸曲面，液体在垂直方向上的作用力为

$$F_{z2} = \rho g V_2$$

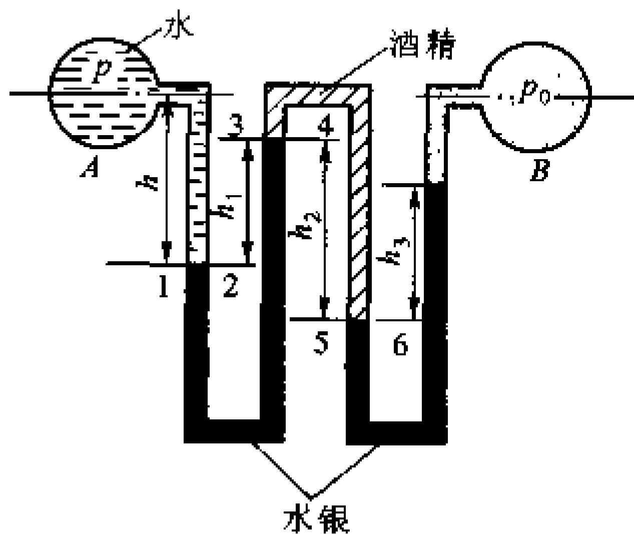
式中 V_2 为虚压力体，F_{z2}方向向上。液体对整个物体的垂直合力为

$$F_z = F_{z2} - F_{z1} = \rho g (V_2 - V_1) = \rho g V$$

式中 V 为物体的体积，F_z 力向上，此力即为液体对浸入物体的浮力，从而证明了阿基米德原理。浮力通过物体的几何形心，称之为浮心。

例 题

例 2-1 用如图所示测压计测量容器 4 中水的压强 p。已知 $h = 0.5$ m，$h_1 = 0.2$ m，$h_2 = 0.25$ m，$h_3 = 0.22$ m，酒精相对密度 $d_{al} = 0.8$，水银相对密度 $d_{me} = 13.6$，真空计读数 $p_0 = 0.25 \times 10^5$ Pa 真空度。求 p。



例 2-1 图

解 在绝对静止条件下，对均质连续介质，由 1-2，3-4 和 5-6 等压面关系，有

$$p_1 = p_2, \quad p_3 = p_4, \quad p_5 = p_6$$

由重力作用下静止液体中压强分布公式，得如下诸关系式

$$p_6 = p_0 + \rho_{me} g h_3$$

$$p_4 = p_5 - \rho_{al} g h_2$$

$$p_2 = p_3 + \rho_{me} g h_1$$

$$p = p_1 - \rho_w g h$$

这里不计空气的重量，联立上述各式，整理得

$$p = p_0 + \rho_{me} g (h_3 + h_1) - \rho_{al} g h_2 - \rho_w g h = 24\,167.72 \text{ Pa}$$

例 2-2 如图所示一个锅炉烟囱，燃烧时烟气将在烟囱中自由流动排出。已知烟囱高 $h = 30$ m，烟囱内烟气的平均温度为 $t = 300$ ℃，烟气的密度 $\rho_s = (1.27 - 0.002\,75t)\text{kg/m}^3$，当时空气的密度 $\rho_a = 1.29\ \text{kg/m}^3$。试确定引起烟气自

由流动的压差。

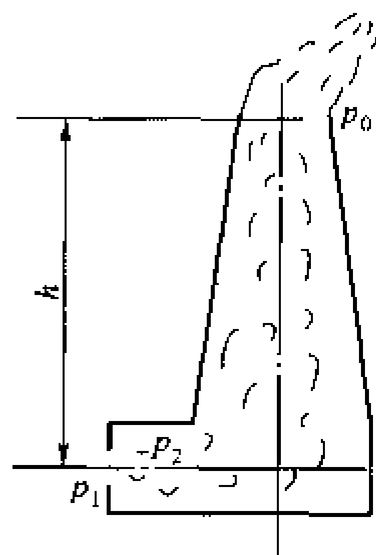
解　不计烟气流动产生的效应，认为温度处处相等。令烟囱出口处的压强为 p_0，炉门内、外的压强分别为 p_2 和 p_1。p_1 是由 h 高空气柱所引起的压强，p_2 是由 h 高烟气柱所引起的压强，即

$$p_1 = p_0 + \rho_a h$$
$$p_2 = p_0 + \rho_s h$$

因为 $\rho_a > \rho_s$，所以在炉门内外产生压差 Δp，这就是烟气能自由流动的压差。

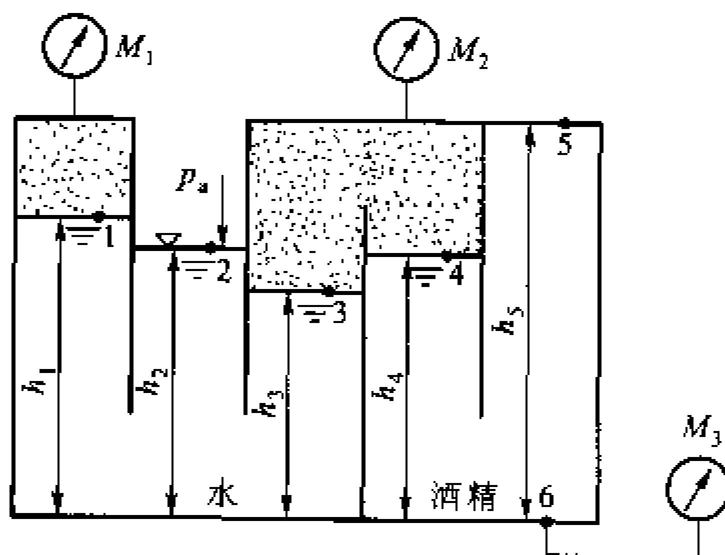
$$\Delta p = p_1 - p_2 = h(\rho_a - \rho_s)g \approx 248.4 \text{ Pa}$$

由此可见烟囱越高，流动情况越好。



例 2-2 图

例 2-3　如图所示，$h_1 = 1.2$ m，$h_2 = 1$ m，$h_3 = 0.8$ m；$h_4 = 1$ m，$h_5 = 1.5$ m，大气压强 $p_a = 101\ 300$ Pa，酒精的密度 $\rho_l = 790\ \text{kg/m}^3$。不计装置内空气的质量，求 1、2、3、4、5、6 各点的绝对压强及 M_1、M_2、M_3 三个压力表之表压强或真空度。



例 2-3 图

解　根据流体静压强基本公式，对于 1，2 两点有

$$p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2)$$

则

$$p_1 = p_2 - \rho g(h_1 - h_2) \approx 99\ 338 \text{ Pa}$$

从而 $p_{M1} = p_a - p_1 = 1\ 962$ Pa（真空度）

$p_2 = p_a = 101\ 300$ Pa

对于2，3两点有

$$p_3 = p_2 + \rho g\ (h_2 - h_3) \approx 103\ 262\ \text{Pa}$$

$$p_{M2} = p_3 - p_a = 1\ 962\ \text{Pa}\ (\text{表压强})$$

$$p_4 = p_3 = 103\ 262\ \text{Pa}$$

对于4，5两点有

$$p_5 = p_4 - \rho_1 g\ (h_5 - h_4) \approx 99\ 387.05\ \text{Pa}$$

对于4，6两点有

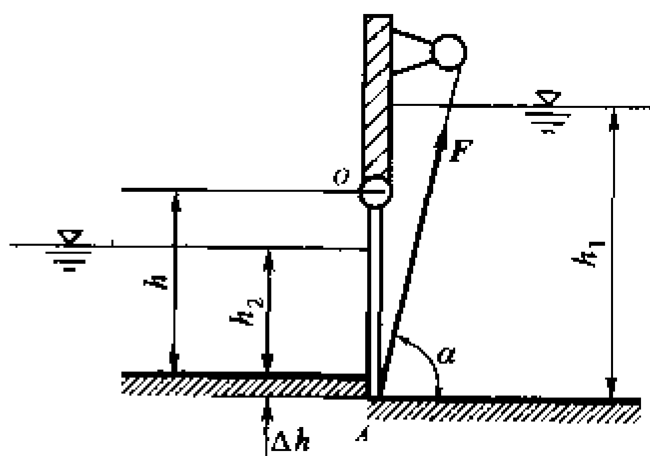
$$p_6 = p_4 + \rho_1 g h_4 \approx 111\ 011.9\ \text{Pa}$$

$$p_{M3} = p_6 - p_a = 9\ 711.9\ \text{Pa}\ (\text{表压强})$$

例2-4 某水坝用一长方形闸门封住放水孔，闸门高 $h=3$ m，宽 $b=4$ m，闸门两边的水位分别为 $h_1=5$ m，$h_2=2$ m。闸门垂直放置，试确定：

(1) 开启闸门时绳索的拉力 F（绳索与水平面夹角为 $\alpha=60°$）。图中 Δh 与 h，h_1，h_2 比较很小，计算中忽略不计。

(2) 关闭位置时 A 点处的支承力。



例2-4图

解 (1) 作用在闸板右侧的总压力为

$$F_{P1} = \rho g y_{C1} A_1 = \rho g \left(h_1 - \frac{h}{2} \right) hb \approx 412\ 020\ \text{N}$$

力 F_{P1}的作用点

$$y_{D1} = y_{C1} + \frac{J_{C1}}{y_{C1} A_1} = \left(h_1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{\dfrac{bh^3}{12}}{\left(h_1 - \dfrac{h}{2} \right) h \cdot b} = h_1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12\left(h_1 - \dfrac{h}{2} \right)} \approx 3.7\ \text{m}$$

作用在闸门左侧的总压力为

$$F_{p2}=\rho g y_{C2}A_2$$
$$=\rho g\left(\frac{h_2}{2}\right)h_2 b$$
$$\approx 78\ 480\ \mathrm{N}$$

力 F_{p2}的作用点

$$y_{D2}=y_{C2}+\frac{J_{C2}}{y_{C2}A_2}$$
$$=\frac{h_2}{2}+\frac{\frac{bh_2^3}{12}}{\frac{h_2}{2}h_2 b}$$
$$=\frac{2}{3}h_2$$
$$\approx 1.33\ \mathrm{m}$$

将闸门两侧的总压力及绳索拉力对转轴 O 取矩 $\Sigma M_0=0$

$$F_{P2}[h-(h_2-y_{D2})]+Fh\sin(90°-\alpha)=F_{P1}[y_{D1}-(h_1-h)]$$

得到绳索拉力

$$F=\frac{F_{P1}[y_{D1}-(h_1-h)]-F_{P2}[h-(h_2-y_{D2})]}{h\cdot\cos\alpha}$$
$$\approx 348\ 895.92\ \mathrm{N}$$

（2）闸门处于关闭状态时，绳索上拉力为零，闸板下端支承于 A 点，有力 F_{PA}作用。将闸板上的受力对 O 点取矩，即可求得 F_{PA}。

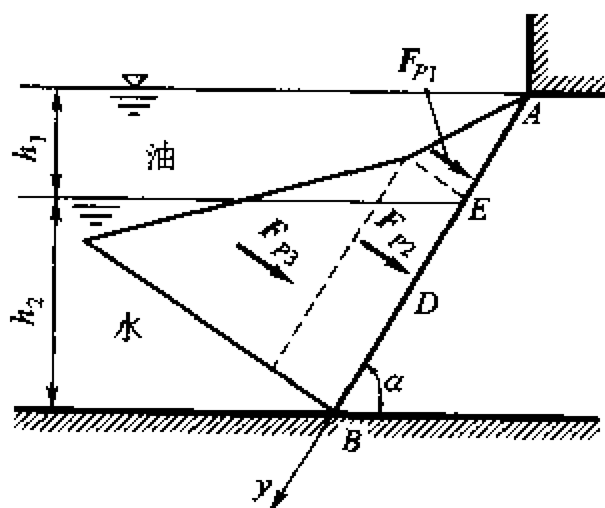
$$F_{PA}h=F_{P1}[y_{D1}-(h_1-h)]-F_{P2}[h-(h_1-y_{D2})]$$

所以

$$F_{PA}=\frac{F_{P1}[y_{D1}-(h_1-h)]-F_{P2}[h-(h_1-y_{D2})]}{h}$$
$$\approx 174\ 447.96\ \mathrm{N}$$

例 2-5　如图所示，矩形闸门 AB，宽 $b=1$ m，左侧油深 $h_1=1$ m，油液密度 $\rho_1=800\ \mathrm{kg/m^3}$，水深 $h_2=2$ m，闸门的倾角 $\alpha=60°$，求作用在闸门上的液体总压力及作用点的位置。

解　设闸门上油水分界点为 E，总压力的作用点为 D，为了便于求作用点的位置，将液体总压力分为 F_{P1}，F_{P2}，F_{P3}三部分，如图所示。



例 2-5 图

$$F_{P1}=\rho_1 g h_{1c} A_1=\rho_1 g \frac{h_1}{2}\frac{h_1}{\sin\alpha} b\approx 4\ 531\ \mathrm{N}$$

$$F_{P2}=\rho_1 g h_1 A_2=\rho_1 g h_1 \frac{h_2}{\sin\alpha} b\approx 18\ 124\ \mathrm{N}$$

$$F_{P3}=\rho g h_{2c} A_2=\rho g \frac{h_2}{2}\frac{h_2}{\sin\alpha} b\approx 22\ 655\ \mathrm{N}$$

上式中 ρ 为水的密度。

由 F_{P1}，F_{P2}，F_{P3}可求得液体总压力 F_P 为

$$F_P=F_{P1}+F_{P2}+F_{P3}=45\ 310\ \mathrm{N}$$

总压力的作用点可由合力矩原理求得

$$F_P y_D=F_{P1}y_1+F_{P2}y_2+F_{P3}y_3$$

上式中

$$y_1=\frac{2}{3}\frac{h_1}{\sin\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\ \mathrm{m}$$

$$y_2=\left(h_1+\frac{h_2}{2}\right)/\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{m}$$

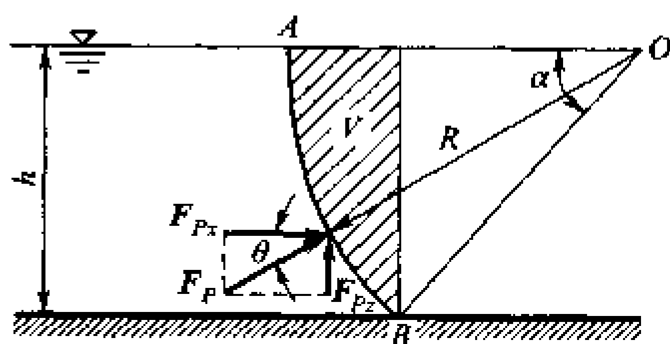
$$y_3=\frac{h_1}{\sin\alpha}+\frac{2}{3}\frac{h_2}{\sin\alpha}=\frac{14}{9}\sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

故

$$y_D=\frac{F_{P1}y_1+F_{P2}y_2+F_{P3}y_3}{F_P}\approx 2.35\ \mathrm{m}$$

$$h_D=y_D\sin\alpha\approx 2.04\ \mathrm{m}$$

例 2-6 如图所示，有一弧形闸门 AB，宽度 $b=4\ \mathrm{m}$，$\alpha=45°$，半径 $R=2\ \mathrm{m}$，闸门转轴恰好与门顶齐平，求作用在曲面 AB 上的静水总压力。



例 2-6 图

解 水平方向总压力 F_{Px}：

$$F_{Px}=\rho g h_c A_x=\frac{1}{2}\rho g R^2 b\sin^2\alpha$$

$$\approx 39\ 240\ \mathrm{N}$$

垂直方向的总压力 F_{Pz}：

垂直方向的总压力等于压力体 V（见图示）内的水重，该压力体为虚压力

体，F_{Pz}的方向向上。

$$
\begin{aligned}
F_{Pz} &= \rho g V \\
&= \rho g\left(\frac{1}{8}\pi R^2 - \frac{1}{2}R\sin\alpha R\cos\alpha\right)b \\
&= \frac{1}{8}\rho g R^2\left[\pi - 2\sin 2\alpha\right]b \\
&\approx 22\ 366\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

作用在曲面 AB 上的总压力 F_P 为

$$F_P = \sqrt{F_{Px}^2 + F_{Pz}^2} \approx 45\ 166\ \mathrm{N}$$

设总压力与水平方向的夹角为 θ，则

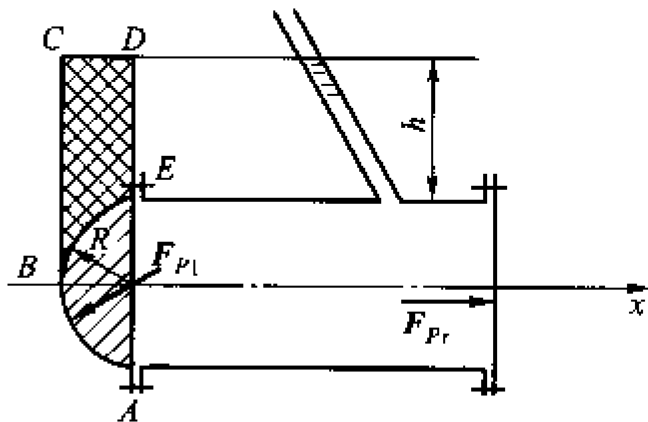
$$\tan\theta = \frac{F_{Pz}}{F_{Px}}$$

所以

$$\theta = \arctan\frac{F_{Pz}}{F_{Px}} \approx 29.7°$$

因为总压力的作用线与曲面 AB 垂直，故一定通过弧 AB 的圆心，其作用点可由过 O 点与水平面成 θ 角的直线与圆弧线相交得到。

例 2－7　图示一水箱，左端为一半球形端盖，右端为一平板端盖。水箱上部有一加水管，已知 $h = 600$ mm，$R = 150$ mm。试求两端盖所受的总压力及其方向。



例 2－7 图

解　(1) 右端盖是一个铅垂的圆平面，只有 x 方向作用力，其面积为

$$A_r = \pi R^2$$

其上作用的总压力为

$$
\begin{aligned}
F_{Pr} &= \rho g\ (h + R)A_r \\
&\approx 520\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

方向垂直于端盖，水平向右。

(2) 左端盖

此为一半球面。由曲面上总压力的求法，将 F_P 分解成三个方向分量 F_{Px}，F_{Py}，F_{Pz}。

$$
\begin{aligned}
F_{Px} &= \rho g\ (h + R)A_x \\
&= \rho g\ (h + R)\pi R^2 \\
&\approx 520\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

方向水平向左。

由于半球面对于 y 轴对称，故有

$$F_{P_Y}=0$$

z 方向总压力由压力体来求。将半球面分成 AB、BE 两部分，AB 部分的压力体为 $ABCDEA$，即图中左斜线部分，记为 V_{ABCDEA}，它为实压力体，方向向下；BE 部分压力体为 $BCDEB$，即图中右斜线部分，记为 V_{BCDEB}，为虚压力体，方向向上。因此总压力体为它们的代数和

$$\begin{aligned} V &= V_{ABCDEA}-V_{BCDEB} \\ &= V_{ABEA} \end{aligned}$$

这正好为半球的体积。所以

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

因此

$$\begin{aligned} F_{P_z} &= \rho gV=\rho g\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 \\ &\approx 69.3\ \text{N} \end{aligned}$$

方向垂直向下。

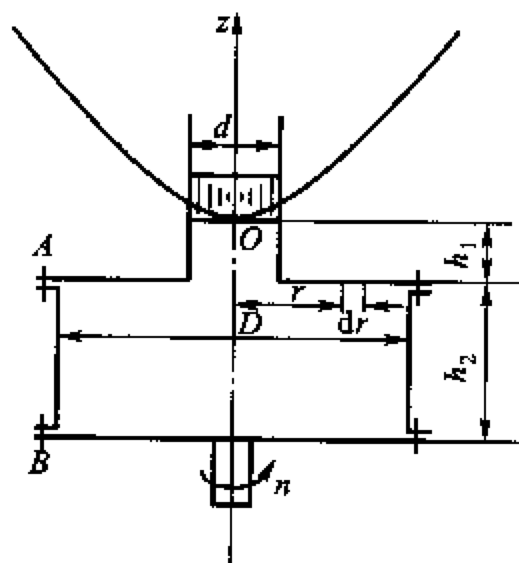
所以，总作用力为

$$F_{P1}=\sqrt{F_{Px}^2+F_{P_y}^2+F_{P_z}^2}=524.6\ \text{N}$$

合力方向与水平方向夹角

$$\alpha=\arctan\frac{F_{P_z}}{F_{P_x}}=7°35'28''$$

例 2－8 如图所示，盛水容器以转速 $n=450$ r/min 绕垂直轴旋转。容器尺寸 $D=400$ mm，$d=200$ mm，$h_2=350$ mm，水面高 $h_1+h_2=520$ mm，活塞质量 $m=50$ kg，不计活塞与侧壁的摩擦，求螺栓组 A、B 所受的力。



例 2－8 图

解 将坐标原点 O 取在液面处(如图)，则液面方程为

$$Z=\frac{\omega^2r^2}{2g}$$

设液面上 O 点处压强为 p_0，则 $\int_0^{d/2}\left(p_0+\frac{\rho\omega^2r^2}{2}\right)2\pi r\mathrm{d}r=mg$，解得

$$p_0=\frac{4mg-\pi\rho\omega^2\left(\frac{d}{2}\right)^4}{4\pi r^2}$$

(1) 求螺栓组 A 受力

在上盖半径为 r 处取宽度为 $\mathrm{d}r$ 的环形面积，该处压强为

$$p = p_0 + \left(h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)\rho g$$

上盖所受总压力为

$$\begin{aligned} F_{P1} &= \int_{d/2}^{D/2} p \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= \int_{d/2}^{D/2}\left[p_0 + \left(h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)\rho g\right] \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)(p_0 + \rho g h_1) + \frac{\pi\rho\omega^2}{64}(D^4 - d^4) \\ &\approx 3\ 723\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

此力方向垂直向上，亦即为螺栓组 A 受的力。

(2) 螺栓组 B 受力

在下底 r 处压强为

$$p = p_0 + \left(h_1 + h_2 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)\rho g$$

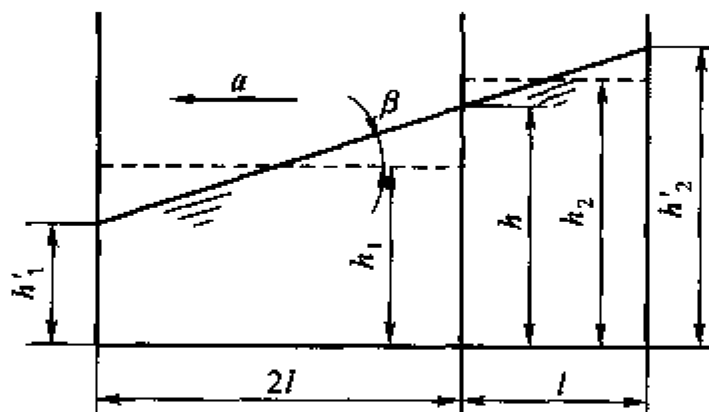
因此，下底受总作用力

$$\begin{aligned} F_{P2} &= \int_0^{D/2} p 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= \int_0^{D/2}\left[p_0 + \left(h_1 + h_2 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)\rho g\right] 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4}D^2\left[p_0 + (h_1 + h_2)\rho g\right] + \frac{\pi\rho\omega^2}{64}D^4 \\ &\approx 4\ 697\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

此即为螺栓组 B 所受之力。

此题也可以用压力体的方法求解，读者不妨一试。

例 2-9　设有如图所示的容器以加速度 a 向左方运动，尺寸 l，h_1 和 h_2 为已知，求隔板不受力时 a 值应为若干？



例 2-9 图

解 隔板不受力时前后箱中的液面应形成一条直线，此直线斜率应为

$$\tan\beta = \frac{a}{g}$$

设箱中液面间的关系如例 2－9 图所示，其中 h'_1，h'_2 和 h 为未知数，由几何关系可得

$$\tan\beta = \frac{h'_2 - h'_1}{3l}$$

由油液运动前后体积不变的关系可得

$$h_1 = \frac{h'_1 + h}{2}$$

$$h_2 = \frac{h + h'_2}{2}$$

即

$$h'_1 = 2h_1 - h$$

$$h'_2 = 2h_2 - h$$

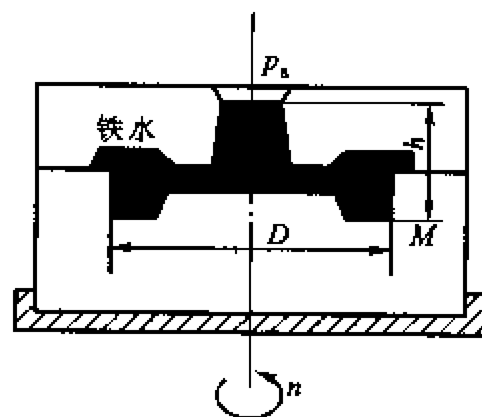
将以上关系代入 $\tan\beta$ 的表达式中可得

$$\tan\beta = \frac{a}{g} = \frac{2h_2 - h - (2h_1 - h)}{3l}$$

于是

$$a = \frac{2g}{3}\frac{h_2 - h_1}{l}$$

例 2－10 浇铸生铁车轮的砂型如图所示，已知 $h = 180$ mm，$D = 600$ mm，铁水密度 $\rho = 7\,000$ kg/m^3，求 M 点压强为多少？为使铸件密实，采用离心铸造，使砂型以 $n = 600$ r/min 的速度旋转，则 M 点的压强将是多少？



例 2－10 图

解 不采用离心铸造时 M 点的压强为

$$p_M = p_a + \rho g h$$

此处 p_a 为大气压强，按表压强计算为零。则

$$p_M = \rho g h \approx 1.24 \times 10^4\ \text{Pa}$$

如采用离心铸造，则 M 点的压强 p_M 为

$$p_M = p_a + \rho g h + \rho\omega^2 r_M^2/2$$

式中

$$p_a = 0$$

$$\omega = 2\pi n = 20\pi\ \text{r/s}$$

$$r_M = D/2 = 0.3\ \text{m}$$

$$h = 0.18\ \text{m}$$

代入上式得

$$p_M \approx 1.25 \times 10^6 \text{ Pa}$$

由计算结果可知，采用离心铸造，可使 M 点上的压强增大约 100 倍，从而使轮缘部分密实耐磨。

习　题

2－1　静止液体中存在：(a) 压应力；(b) 压应力和拉应力；(c) 压应力和切应力；(d) 压应力、拉应力和切应力。

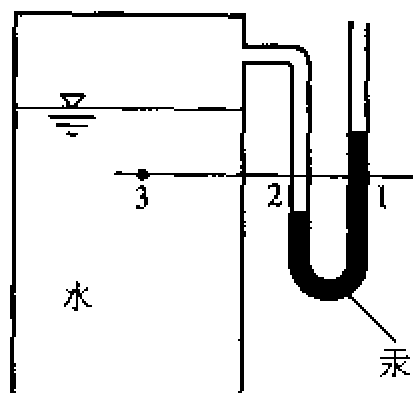
2－2　相对压强的起点是：(a) 绝对真空；(b) 1 个标准大气压；(c) 当地大气压；(d) 液面压强。

2－3　金属压力表的读值是：(a) 绝对压强；(b) 相对压强；(c) 绝对压强加当地大气压；(d) 相对压强加当地大气压。

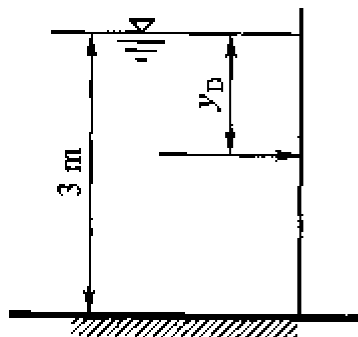
2－4　某点的真空度为 65 000 Pa，当地大气压为 0.1 MPa，该点的绝对压强为：(a) 65 000Pa；(b) 35 000 Pa；(c) 165 000 Pa。

2－5　绝对压强 p_{abs} 与相对压强 p、真空度 p_v、当地大气压 p_a 之间的关系是：(a) $p_{abs} = p + p_v$；(b) $p = p_{abs} + p_a$；(c) $p_v = p_a - p_{abs}$。

2－6　在密闭容器上装有 U 形水银测压计，其中 1，2，3 点位于同一水平面上，其压强关系为：(a) $p_1 = p_2 = p_3$；(b) $p_1 > p_2 > p_3$；(c) $p_1 < p_2 < p_3$。



题 2－6 图



题 2－7 图

2－7　垂直放置的矩形平板挡水，水深 3 m，静水总压力 F_p 的作用点，到水面的距离 y_D 为：(a) 1.25 m；(b) 1.5 m；(c) 2 m；(d) 2.5 m。

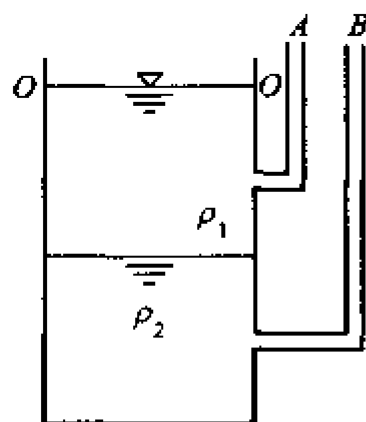
2－8　容器中盛有密度不同的两种液体，问测压管 A 及测压管 B 的液面是否和容器中液面 $O-O$ 齐平？为什么？若不齐平，则 A、B 测压管液面哪个高？

2－9　试绘出图中四种情况侧壁上的压强分布图。

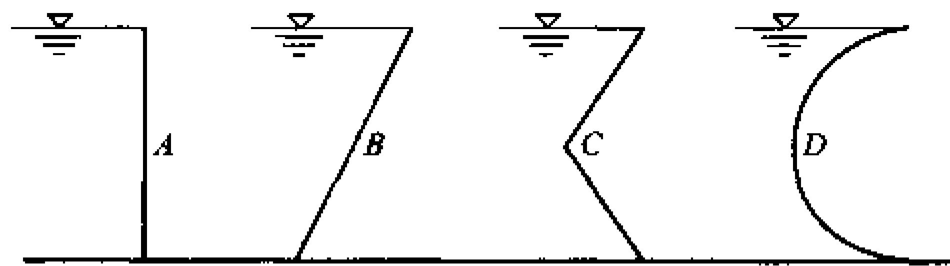
2－10　有如图所示的被油充满的弯管。油的密度为 880 kg/m^3，管中油液静止不流，$h = 2$ m，$h_1 = 0.5$ m，容器 B 是密封的．求 A 和 B 点的相对压强并换算为相应的水柱高。

2－11　容器中盛有水和密闭空气，各水面相对差分别为：$h_1 = h_4 = 0.91$ m，$h_2 = h_3 = 0.305$ m，求 A，B，C 和 D 点的绝对压强，并指出哪些是真空状态(不计空气质量，取 p_a =

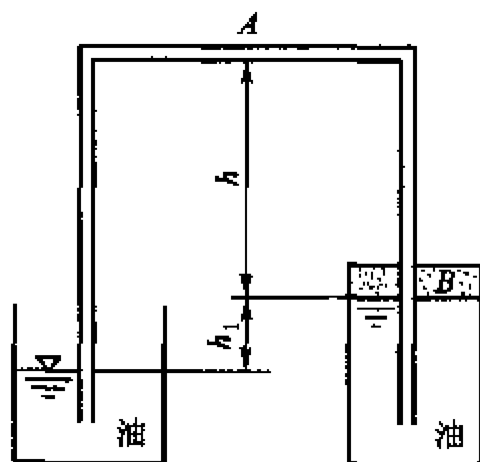
9.81×10^4 Pa)?



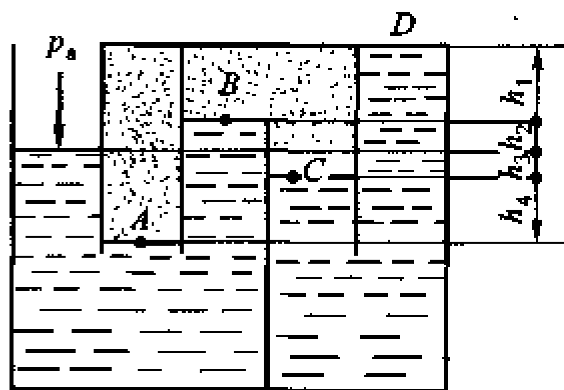
题 2-8 图



题 2-9 图

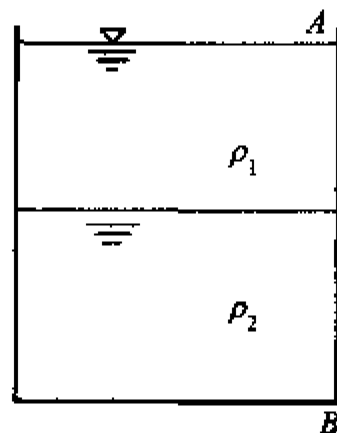


题 2-10 图

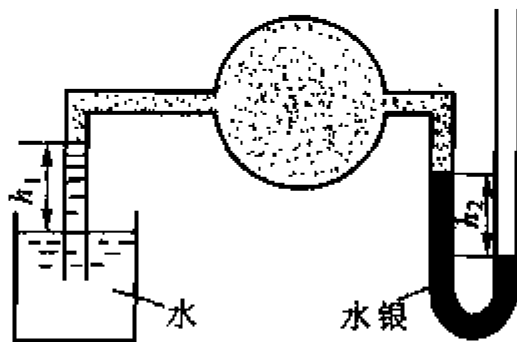


题 2-11 图

2-12 容器中有密度为 ρ_1 和 ρ_2 两种液体，试绘出 AB 面上的压强分布图。



题 2-12 图

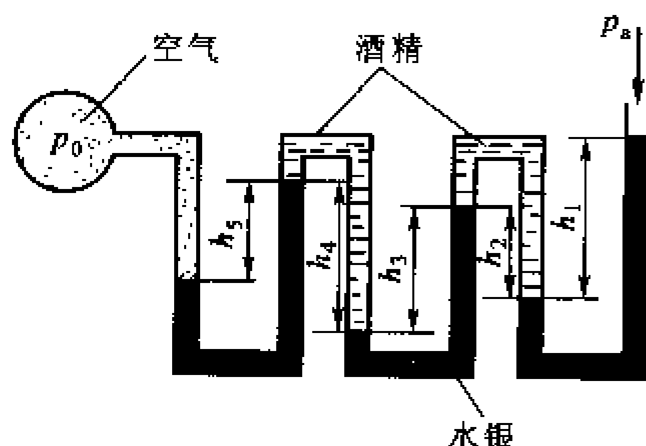


题 2-13 图

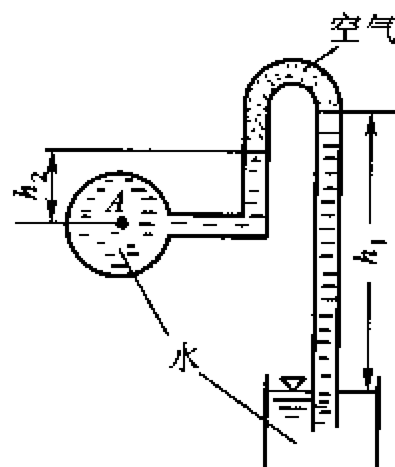
2-13 在盛有空气的球形密封容器上联有两根玻璃管，一根与水杯相通，另一根装有水银，若 $h_1=0.3$ m，求 h_2 为多少？

2-14 为了测得较大的压强且便于观察，有时利用如图所示的测压管组。若 $h_1=0.7$ m，$h_2=0.66$ m，$h_3=0.68$ m，$h_4=0.72$ m，$h_5=0.66$ m，$\rho_{水银}=13\,600$ kg/m³，$\rho_{酒精}=800$ kg/m³，不计

空气质量，求空气室内相对压强 p_0。若仅用一个U形管，当注满水银后测量同样的压强 p_0，则需多长的测压管？



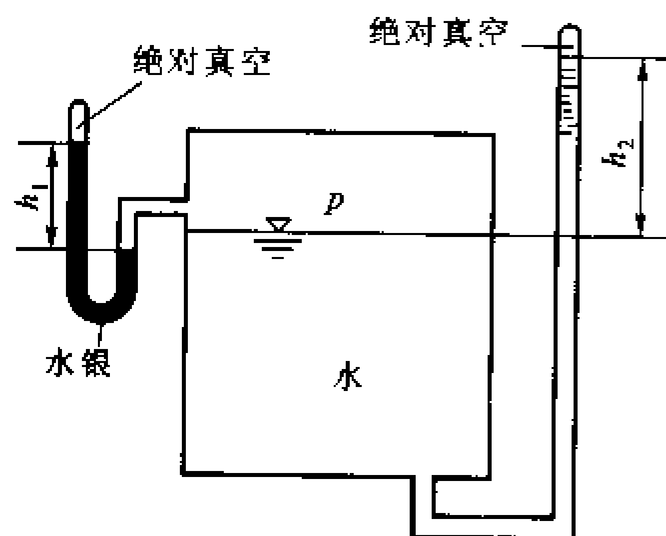
题2-14图



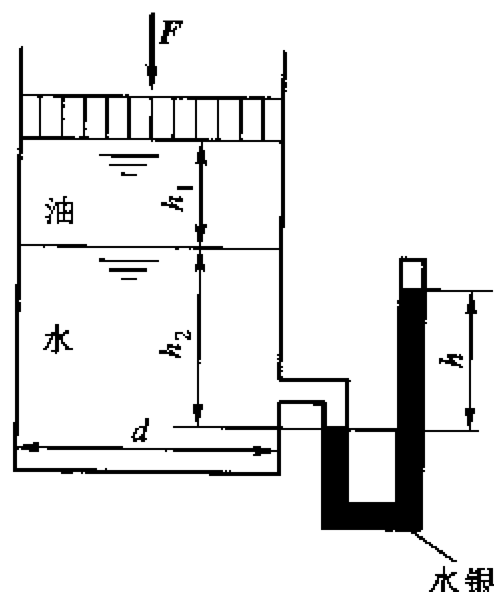
题2-15图

2-15　已知倒U形测压管中的读数为 $h_1=2$ m，$h_2=0.4$ m，求封闭容器中 A 点的相对压强。

2-16　如图所示，若测压管上端完全封闭，并为完全真空，测得 $h_1=50$ mm，求封闭容器中液面上的绝对压强 p 及 h_2 值。



题2-16图



题2-17图

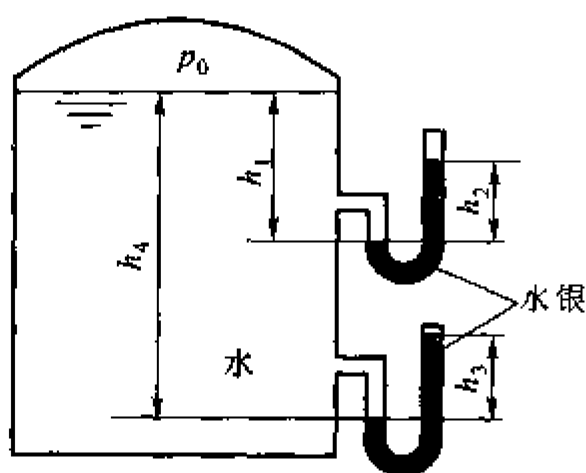
2-17　一直径为 $d=0.4$ m 的圆柱形容器，$h_1=0.3$ m，$h_2=0.5$ m，盖上荷重 $F=5\ 788$ N，油的密度为 800 kg/m^3，求测压计中汞柱高 h 为多少？

2-18　一盛水的封闭容器，装有两支水银测压计，已知 $h_1=0.6$ m，$h_2=0.25$ m，$h_3=0.3$ m，求深度 h_4。

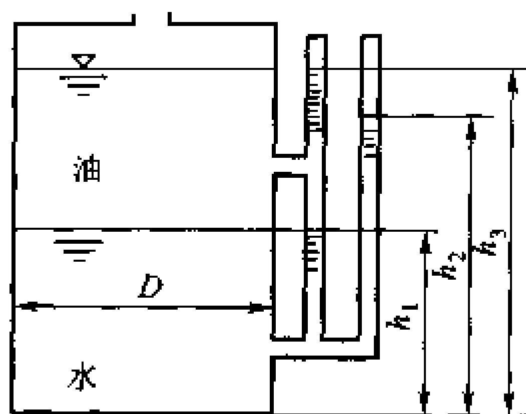
2-19　一敞口圆柱形容器，直径 $D=0.4$ m，上部为油，下部为水。

(1) 若测压管中读数为 $h_1=0.2$ m，$h_2=1.2$ m，$h_3=1.4$ m，求油的密度；

(2) 若油的密度为 840 kg/m^3，$h_1=0.5$ m，$h_2=1.6$ m，求容器中水和油的体积。



题 2-18 图

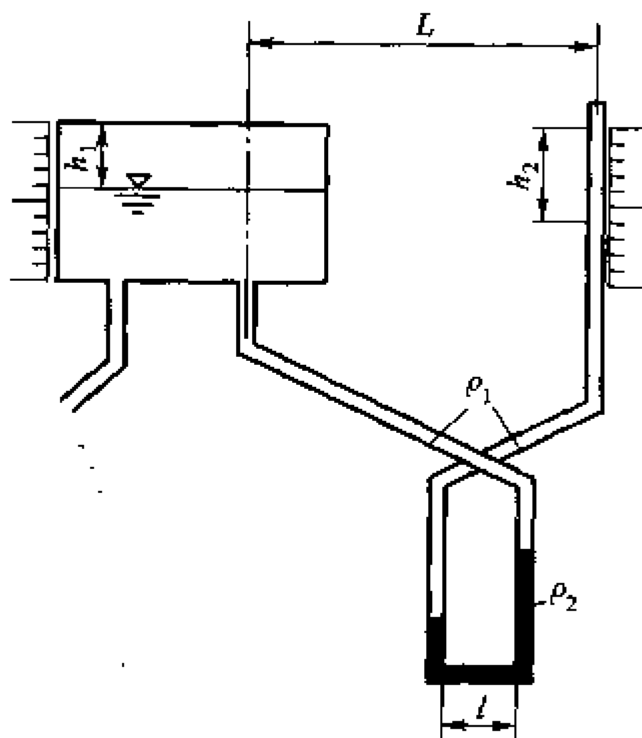


题 2-19 图

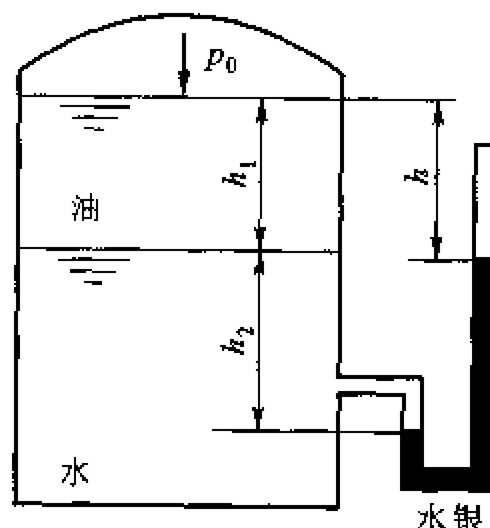
2-20 用一个具有交叉分支的U形管作为液面指示器。U形管内装有密度为 ρ_1 及与之不相混的密度为 ρ_2 的液体。试确定：

（1）以箱内充满时为起始位置的液面降 h_1 和管内液面降 h_2 间的关系；

（2）当比值 l/L 为何值时，在图示平面内系统倾斜将不影响到管内液面降落的数值。



题 2-20 图



题 2-21 图

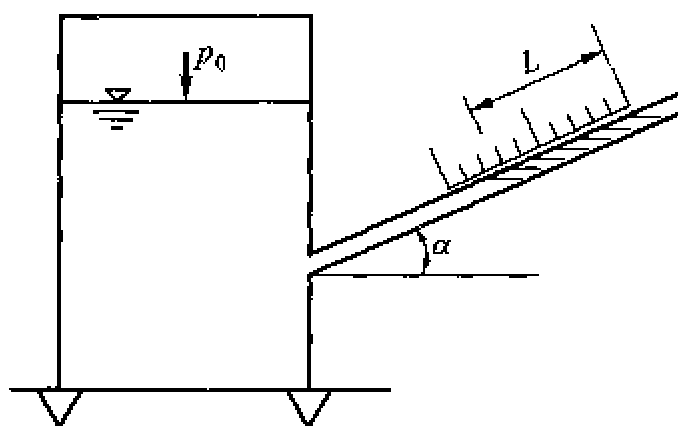
2-21 一封闭容器内盛有油和水，油的密度 $\rho_{油}=890\ kg/m^3$，$h_1=0.3\ m$，$h_2=0.5\ m$，$h=0.4\ m$，试求油面上的表压强。

2-22 测量很小的压强时，利用倾斜式微压计原理，测压液体为酒精。

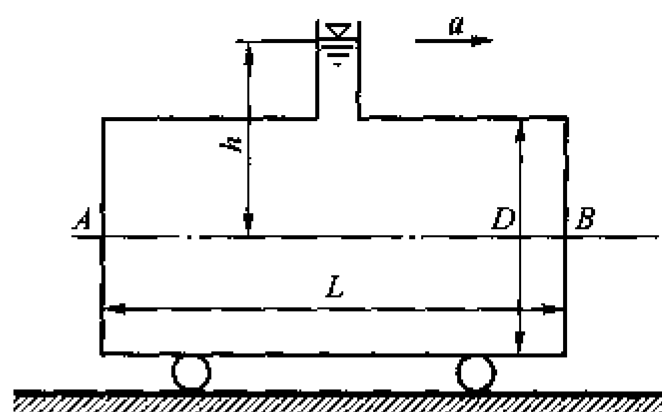
（1）若用肉眼观察标线精度为 0.5 mm，测量压强在 1 kPa ~ 2 kPa 范围内时，测量误差不超过 ±0.2%。试确定测管与水平面应成多大角？

（2）若用具有直立标线的杯式水银测压计来测量同样压强，最大误差又是多少？

2-23 一个充满水的密闭容器，以等角速度 ω 绕一水平轴旋转。试证明它的等压面为圆柱面，且该圆柱面的轴线与转动轴平行并相距 g/ω^2。



题 2－22 图

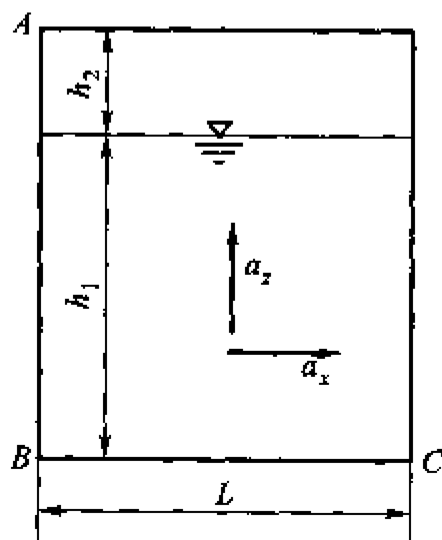


题 2－24 图

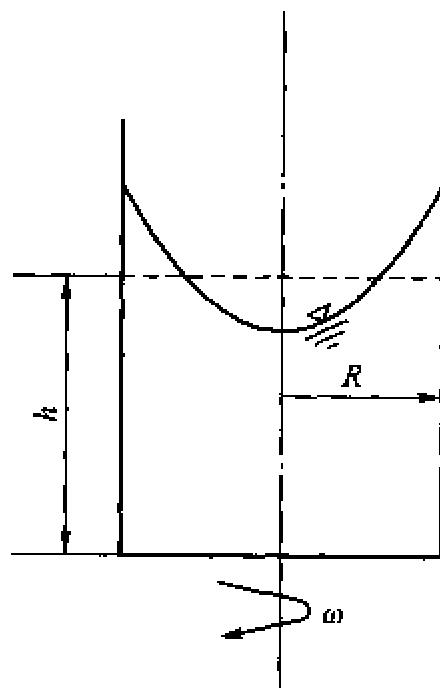
2－24　直径 $D=1.2$ m，长 $L=2.5$ m 的油罐车，内装密度 $\rho=900$ kg/m^3 的石油，油面高度为 $h=1$ m，以 $a=2$ m/s^2 的加速度水平运动。试确定油罐车侧盖 A 和 B 上所受到的油液的作用力。

2－25　图示为一开口容器，若 $a_x=a_z=4.905$ m/s^2，$h_1=1$ m，$h_2=0.3$ m，$L=1.0$ m，求 A、B、C 各点的压强。

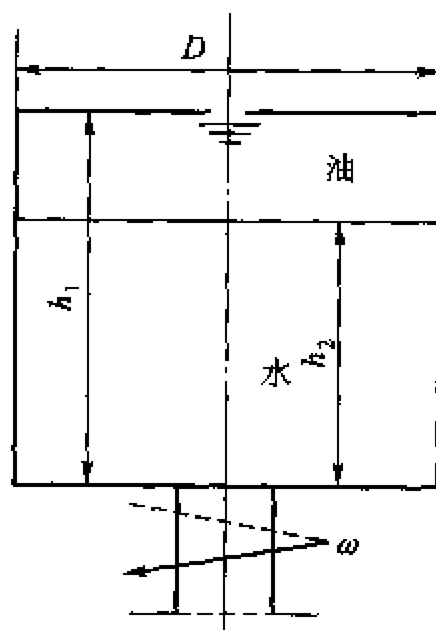
2－26　盛有水的圆筒形容器以角速度 ω 绕垂直轴作等速旋转，设原水高为 h，容器半径为 R，试求当 ω 超过多少时可露出筒底？



题 2－25 图



题 2－26 图

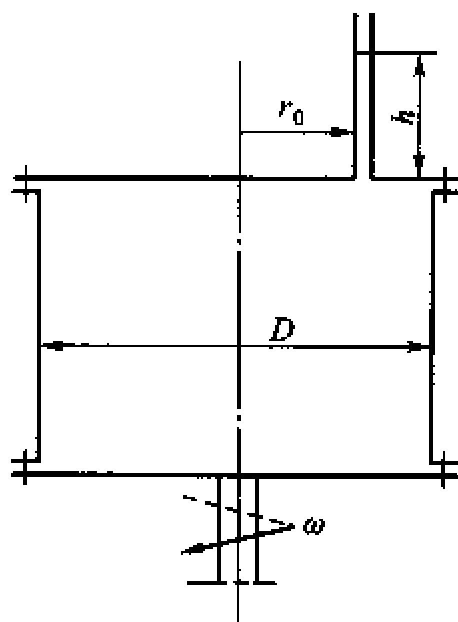


题 2－27 图

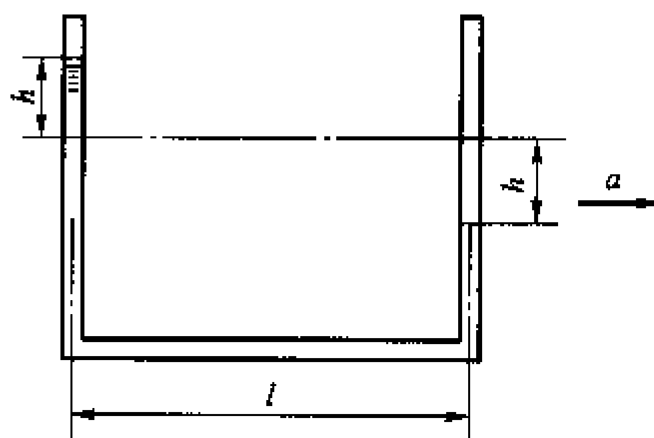
2－27　直径 $D=0.6$ m，高 $h_1=0.5$ m 的圆柱形容器盛水到高度 $h_2=0.4$ m 处，容器剩余的容积装油，其密度为 800 kg/m^3。用一中心有孔口的顶盖将容器盖住，且使容器绕垂直轴旋转。试确定为了使容器分界面接触容器底，容器应以什么样的角速度来旋转？并求此时作用在容器底和顶盖上的力。

2－28　一圆柱形容器，直径 $D=1.2$ m，完全充满水，顶盖上在 $r_0=0.43$ m 处开一小

孔，敞口测压管中的水位 $h=0.5$ m，问此容器绕垂直轴旋转的角速度 ω 多大时，顶盖所受的静水总压力为零？



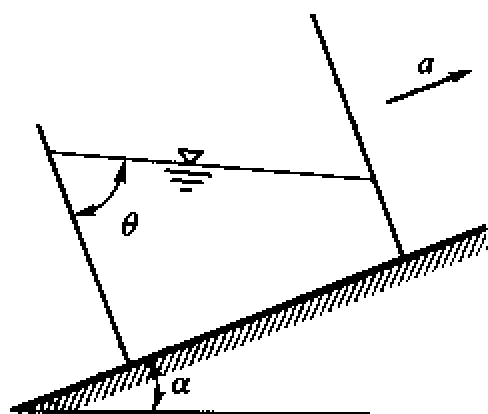
题 2－28 图



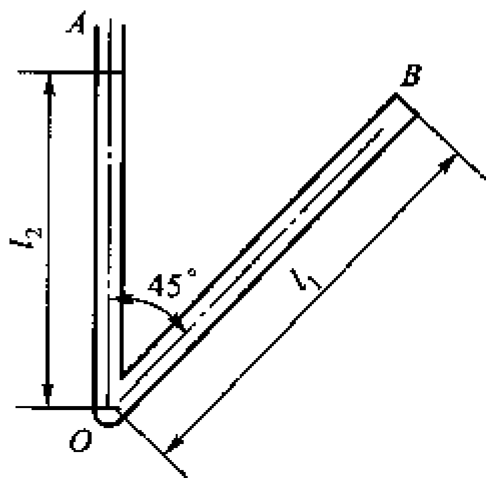
题 2－29 图

2－29 在物体上装置一个 U 形管以测定物体的直线加速度 a，若 $l=0.3$ m，$h=0.1$ m，求加速度 a 值。

2－30 一盛水的矩形敞口容器，沿 $\alpha=30°$的斜面向上作等加速运动，加速度 $a=2\ \mathrm{m/s^2}$，求液面与壁面的夹角 θ。



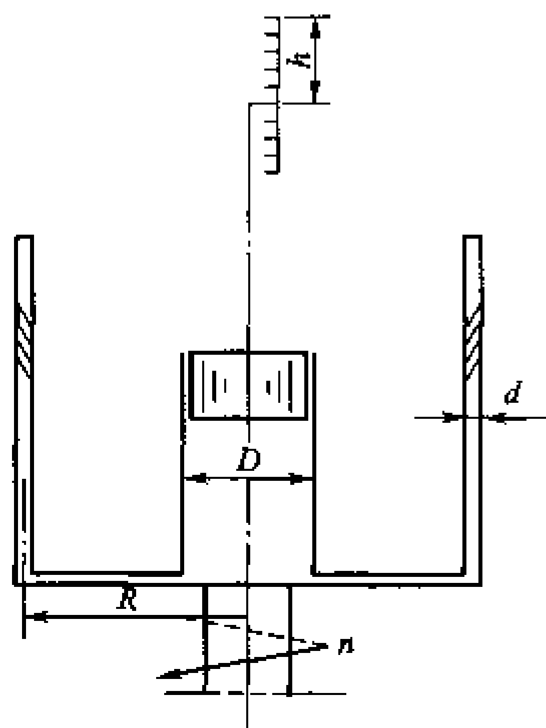
题 2－30 图



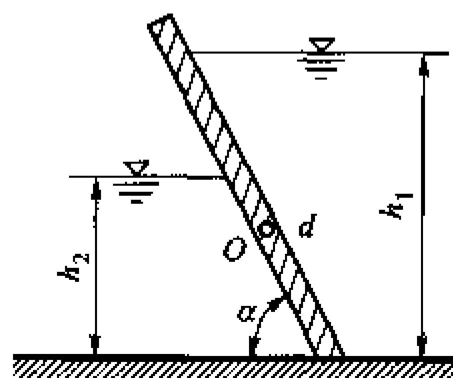
题 2－31 图

2－31 有如图所示的曲管 AOB。OB 段长 $l_1=0.3$ m，$\angle AOB=45°$，AO 垂直放置，B 端封闭。管中盛水，其液面到 O 点的距离 $l_2=0.23$ m。此管绕 AO 轴旋转。问转速为若干时 B 点的压强将与 O 点相同？OB 段中最低的压强是多少？位于何处？

2－32 有如图所示的液体转速计内装水银，其尺寸为 $d=8$ mm，$R=40$ mm，活塞直径 $D=20$ mm，质量 $m=0.3$ kg。当转速发生变化时活塞将有位移，$n=0$ 时，$h=0$，试建立转速 n 与活塞位移 h 之间的关系。再计算当转速 $n=1\ 000$ r/min 时的 h 值。



题 2－32 图



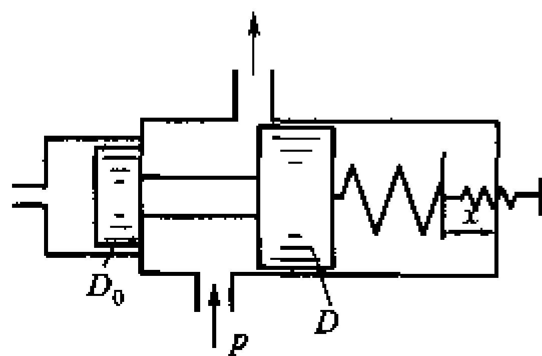
题 2－33 图

2－33　为了泄水，当水位 $h_1 \geqslant 6$ m 时，水坝的平板闸门自动倾倒。闸门绕直径 $d = 0.4$ m，具有摩擦系数 $f = 0.2$ 的轴颈 O 翻转。假设闸门的另一侧具有固定不变的水位 $h_2 = 3$ m。试求：

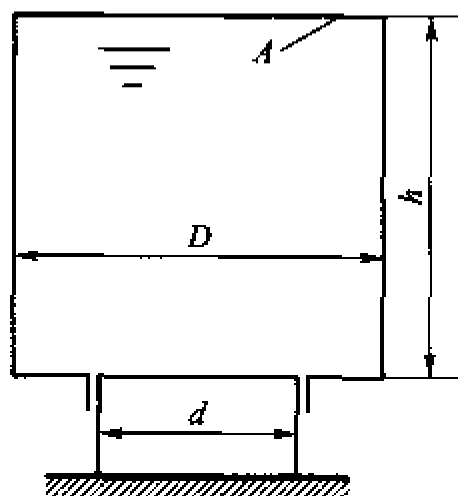
(1) 闸门的旋转轴 O 离底部的距离应为多少？

(2) 已知闸门的宽度 $b = 8$ m，闸门的倾角 $\alpha = 60°$，求支承 O 所受的压力 F_p 为多少？

2－34　有一如图所示的安全阀，其弹簧倔强系数 $k = 8$ N/mm，活塞直径 $D = 22$ mm，$D_0 = 20$ mm，如要此阀在压强 p 为 3×10^6 Pa 时开启，问其弹簧的预压缩量 x 应是多少？



题 2－34 图



题 2－35 图

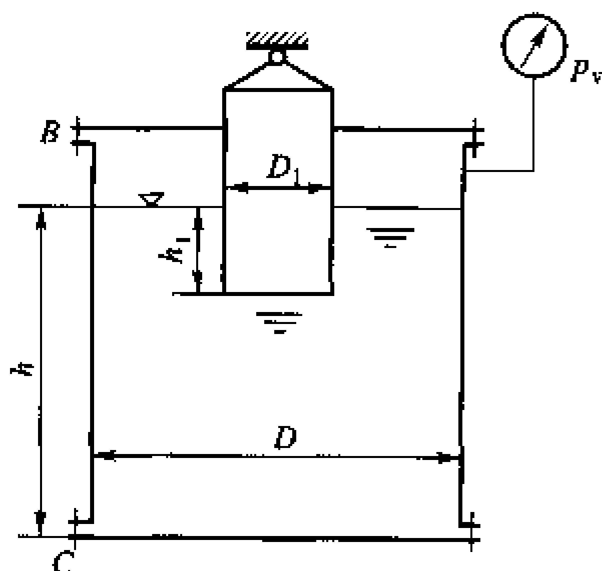
2－35　有一如图所示的圆柱形容器，其高 $h = 0.6$ m，直径 $D = 0.6$ m。容器空时，其质量为 50 kg。今将此容器充满水后倒放于一能密封不漏的活塞上，活塞直径 $d = 0.3$ m。不计摩擦力，试求容器底面 A 上所受作用力。如将一 70 kg 附加质量放在装置顶部，问 A 上的力将增加多少？

2－36　直径 $D = 0.4$ m 的圆柱形容器，其内充水至高度 $h = 0.3$ m 处，容器悬于直径 $D_1 = 0.1$ m 的柱塞上。柱塞的淹深 $h_1 = 0.1$ m，容器质量 $m = 50$ kg，忽略容器与柱塞间摩

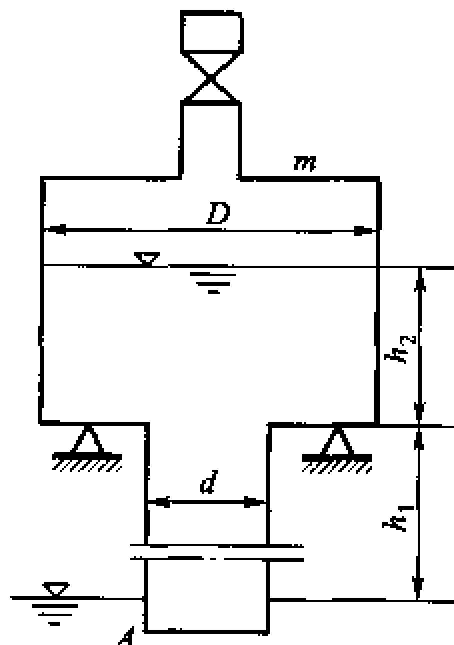
擦。试确定：

(1) 保证容器平衡，容器上部气腔的真空度。

(2) 螺栓组 B 和 C 所受的力。



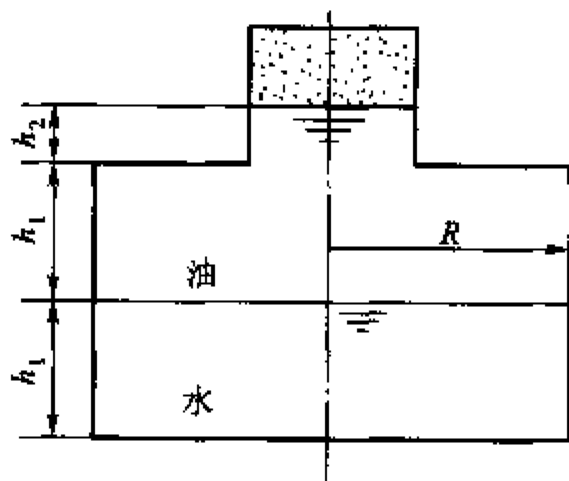
题 2-36 图



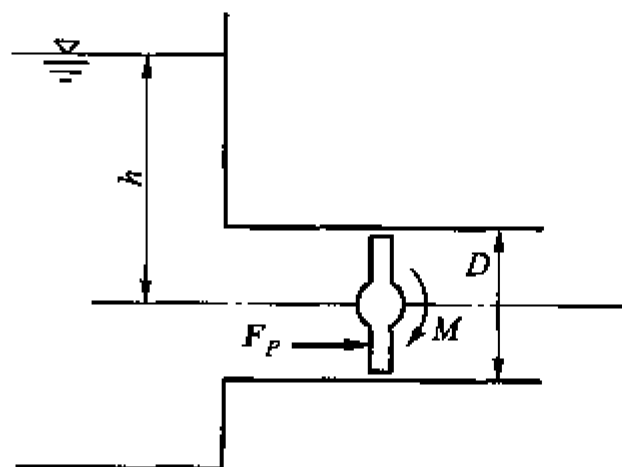
题 2-37 图

2-37 直径 $d=0.3$ m 和 $D=0.8$ m 的圆柱容器固定于支架上。支承处于贮水池 A 中水面上方 $h_1=1.5$ m 处。抽空容器，使水上升到高度为 $h_1+h_2=1.9$ m 处。容器质量为 100 kg，试确定支承受的力。

2-38 有一圆柱形容器，半径为 R，其中盛有水、密度为 800 kg/m^3 的油和空气，已知 $h_1=0.6$ m，$h_2=0.3$ m，空气中的压强为 2×10^4 Pa。试求此容器的任一四分之一圆柱侧面所受的力及其作用点的位置。



题 2-38 图

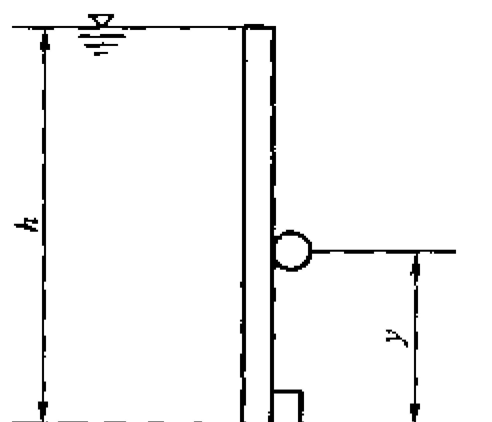


题 2-39 图

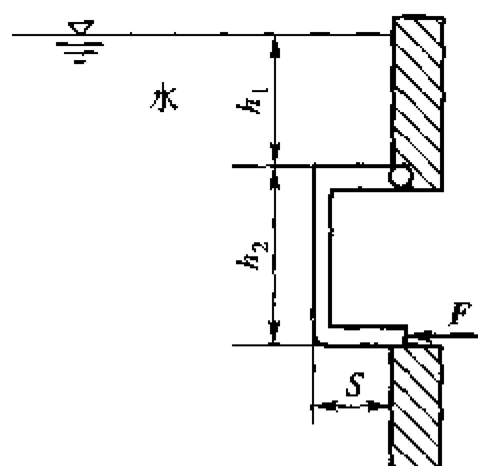
2-39 在由贮水池引出的直径 $D=0.5$ m 的圆管中安装一蝶阀，$h=10$ m，蝶阀是一个与管道直径相同的圆板，它能绕通过中心的水平轴回转。为不使该阀自行转动，问所需施加的力矩应为多少？

2-40 有如图所示的等宽活动闸门，高 $h=3$ m 的水达到闸门顶部。问 y 值为多大时，

闸门将自动翻转？



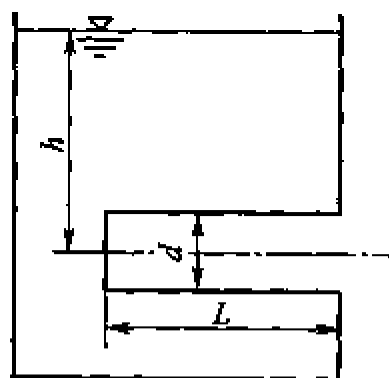
题 2-40 图



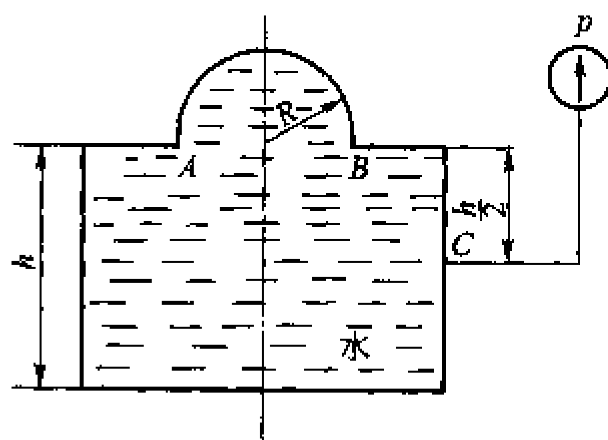
题 2-41 图

2-41　如图所示闸门，$h_1=1$ m，$h_2=1.2$ m，闸门宽 $b=1$ m，厚 $S=0.5$ m。为使闸门不打开，需施加的力 F 为多少？

2-42　水槽侧壁有一长 $L=0.6$ m，直径 $d=0.1$ m 的圆管水平伸入水槽，管的伸入端封死，另一端与侧壁相连。圆管中心线处水深 $h=0.8$ m。试求圆管所受的总压力 F 及压力中心。



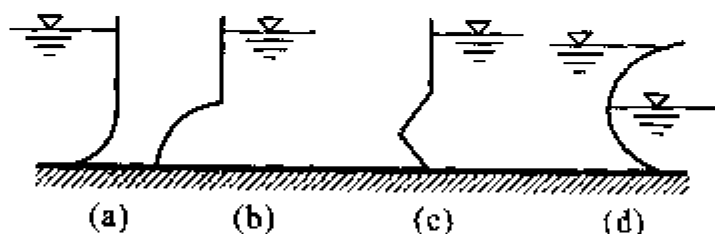
题 2-42 图



题 2-43 图

2-43　图示一贮水设备，在 C 点测得绝对压强 $p=29\ 430$ Pa，$h=2$ m，$R=1$ m。求半球曲面 AB 所受到液体的作用力。

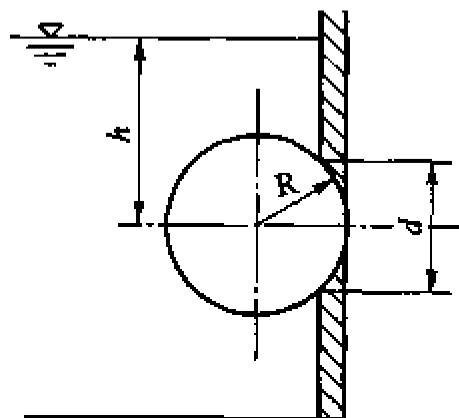
2-44　画出图中四种曲面的压力体图，并标明垂直分力的方向。



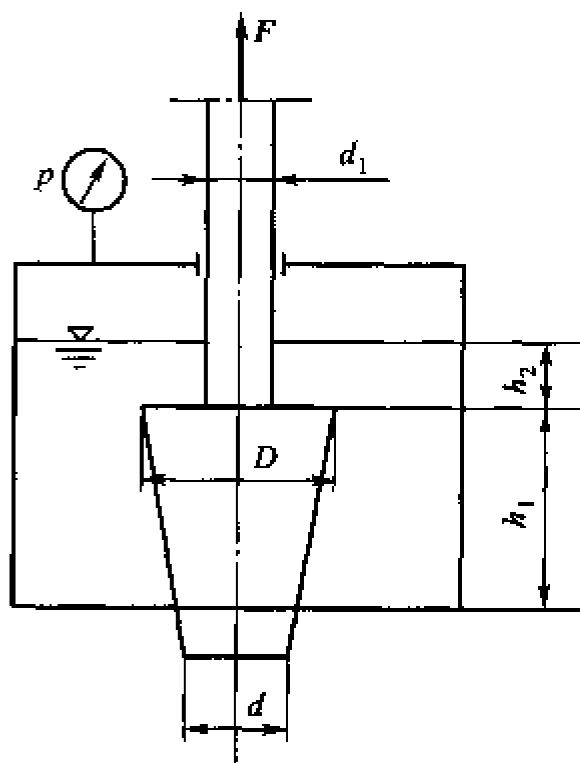
题 2-44 图

2-45　有半径 $R=0.1$ m 的钢球堵塞着垂直壁面上直径 $d=1.5R$ 的圆孔，试求钢球恰好

处于平衡状态时容器内油面高度 h。已知钢球的密度为 8 000 kg/m³，油的密度为 820 kg/m³。



题 2-45 图



题 2-46 图

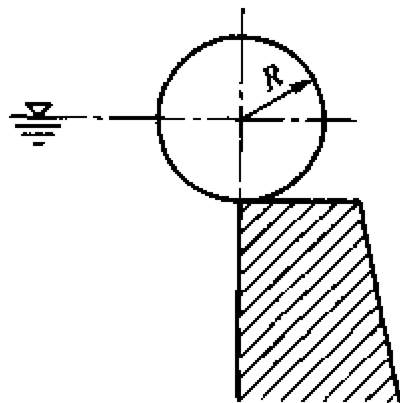
2-46 汽油箱底部有一锥阀，其尺寸为 $D=0.1$ m，$d_1=0.025$ m，$d=0.05$ m，$h_1=0.1$ m。箱内汽油液面在 $h_2=0.03$ m 处。汽油的密度为 830 kg/m³。略去阀的质量和运动中的摩擦。试确定：

(1) 当压力计读数 $p=10^4$ Pa 时，提升阀芯所需的初始力；

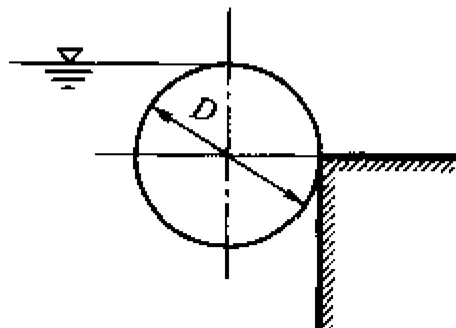
(2) 求能使 $F=0$ 时箱中空气的压强。

2-47 有一可绕中心轴回转的滚筒堤堰。滚筒的半径为 R，长为 b。当水面与滚筒中心线在同一水平面上时，问作用在滚筒上的力为何值？

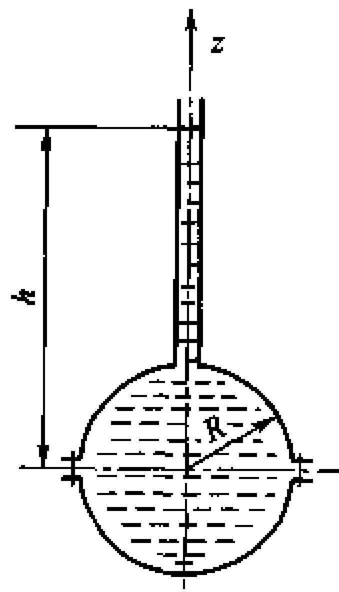
2-48 有长为 1 m 直径 $D=0.6$ m 的圆柱体，在图示位置上恰好处于力平衡状态。不计任何摩擦力，试计算此圆柱体的质量。



题 2-47 图



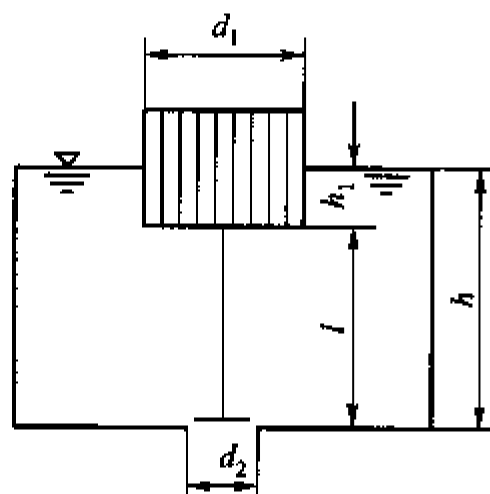
题 2-48 图



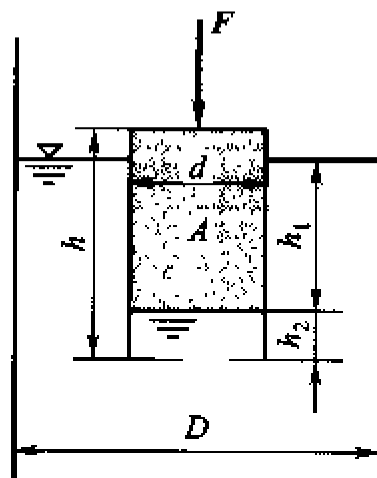
题 2-49 图

2－49　有一半径为 $R=0.6$ m 的球形容器，装水到 $h=1.2$ m 处。试计算在下述四种情况时上半球所受的液压力：(1) 容器不动；(2) 绕垂直轴以 $\omega=1.2$ rad/s 的等角速度转动；(3) 在重力场中自由下落；(4) 当(2)、(3)两种情况同时发生。

2－50　在盛有汽油的容器底上有一直径 $d_2=20$ mm 的圆板阀，该阀用绳系于直径 $d_1=100$ mm 的圆柱形浮子上，如图所示。设浮子及圆板阀的总质量为 $m=9.81\times10^{-2}$ kg，汽油的密度为 800 kg/m³，绳长度 $l=150$ mm。问圆板阀将在汽油油面 h 超过何值时开启？



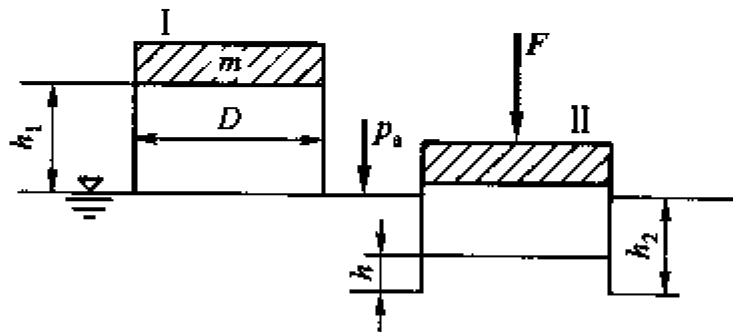
题 2－50 图



题 2－51 图

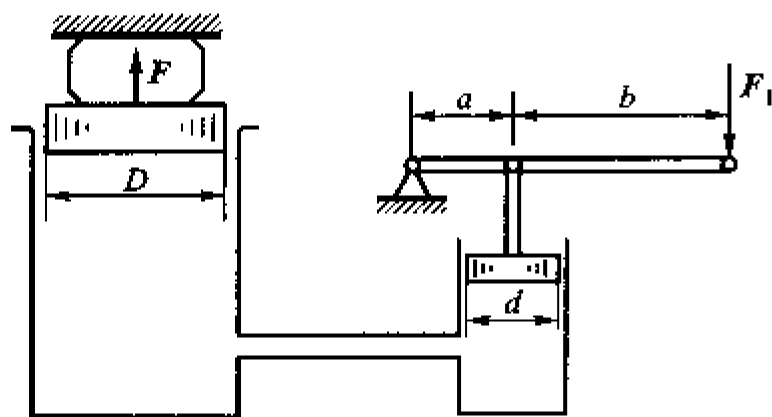
2－51　高 $h=60$ mm、直径 $d=24$ mm 底部开有小口的圆柱形容器 A 装在 $D=72$ mm 的圆筒内的油中。油的密度为 900 kg/m³，圆筒内油面上的压强等于大气压强，初始深度 $h_1=34$ mm，$h_2=10$ mm。试确定：(1) 容器 A 的质量；(2) 为使容器 A 沉到圆筒底部，应在容器 A 上加多大的力 F？

2－52　直径 $D=3$ m，高 $h_1=2$ m，底部沉重的薄壁钟从位置 Ⅰ 开始沉入水中。在位置 Ⅰ 时钟内充满大气。钟的质量为 10^4 kg，大气压 $p_a=10^5$ Pa，钟内空气的温度固定不变。试确定：(1) 钟的淹没深度 h_2 和其内充水深度 h；(2) 为使钟完全淹没，应加多大的力 F？

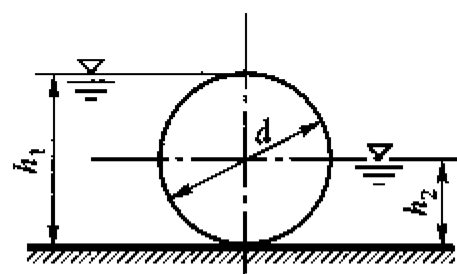


题 2－52 图

2－53　图示为一水压机示意图，试确定下列数据下处于平衡状态时大活塞的直径 D：已知大活塞的压力 $F=5\,000$ N，杠杆上的作用力 $F_1=150$ N，小活塞的直径 $d=5\times10^{-2}$ m，杠杆臂 $a=0.15$ m，$b=0.75$ m，不计活塞的质量及摩擦力。



题 2-53 图



题 2-54 图

2-54 试确定作用于单位长度圆柱形堤上之液体总压力及其与垂直方向之夹角 θ。已知 $h_1=d$，$h_2=d/2$。

第3章

流体运动学

流体运动学是研究流体的运动规律，即速度、加速度、变形等运动参数的变化规律，而不涉及引起运动的力学原因。因而流体运动学所研究的问题及其结论对于理想流体和粘性流体均适用。

§3－1 研究流体运动的两种方法

连续介质模型的引入告诉我们，流体可以看成是由无数质点组成的，而且流体质点连续地、彼此无间隙地充满空间。因此，流体的运动实际上是大量流体质点运动的总合。我们把流体质点运动的全部空间称为“流场”。

由于流体是连续介质，所以描述流体特征的物理量——运动参数(如速度、加速度等)均为所选坐标的连续函数。

通常，描述**流体运动**有两种不同的方法。

1. 拉格朗日法

拉格朗日法又称为随体法。

拉格朗日法研究流场中每一个流体质点的运动，分析运动参数随时间的变化规律，然后综合所有的流体质点，得到整个流场的运动规律。显然，这个方法可以了解每个流体质点的运动规律。

由于拉格朗日法着眼点在各个流体质点，我们必须注意研究每一个质点。因此，必须找到一种办法用以区分各流体质点。拉格朗日法选取在某个初始时刻 t_0，每个质点的坐标 a，b，c 来作为它的标记。用 a，b，c 不同的值来区分不同的流体质点。人们把它叫做“**拉格朗日变数**”。

尽管拉格朗日变数在初始时刻是每个质点的坐标值，然而它与坐标 x，y，z 是不同的。因为当流体质点运动时，它们不随时间变化。流体质点运动中每

一时刻的位置，由其在该时刻的坐标 x，y，z 决定，而 x，y，z 取决于 a，b，c 和时间 t。又由于流体质点连续存在于流场之中，所以拉格朗变数在流场中也是连续存在的。

综上所述，流体质点在不同时刻，空间位置既随流体质点的不同而不同，又随时间而变化。因此，任何流体质点的坐标 x，y，z 为

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(a,b,c,t) \\ y &= y\,(a,b,c,t) \\ z &= z\,(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \tag{3-1}$$

例如，对某流体质点 a_1，b_1，c_1，在 t 时刻的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(a_1,b_1,c_1,t) \\ y_1 &= y_1\,(a_1,b_1,c_1,t) \\ z_1 &= z_1\,(a_1,b_1,c_1,t) \end{aligned}\right\}$$

而对于另一流体质点 a_2，b_2，c_2，在 t 时刻的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_2\,(a_2,b_2,c_2,t) \\ y_2 &= y_2\,(a_2,b_2,c_2,t) \\ z_2 &= z_2\,(a_2,b_2,c_2,t) \end{aligned}\right\}$$

由此可见，拉格朗日法对不同的流体质点可以用 a，b，c 加以区分。

由前面的分析和式(3-1)，可将任何流体质点的运动速度表示为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x\,(a,b,c,t)}{\partial t} = x'(a,b,c,t) \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y\,(a,b,c,t)}{\partial t} = y'(a,b,c,t) \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z\,(a,b,c,t)}{\partial t} = z'(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

因为 a，b，c 不随时间变化，所以$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial t}$，$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial t}$，$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial t}$。而在微分之后将 a，b，c 看成变数，把 t 看成常数，将给出 t 时刻流体质点的速度分布。同理，加速度可表示为

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x\,(a,b,c,t)}{\partial t^2} = x''(a,b,c,t) \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y\,(a,b,c,t)}{\partial t^2} = y''(a,b,c,t) \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z\,(a,b,c,t)}{\partial t^2} = z''(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

流体质点的其它运动参数可以类似地表示为(a,b,c)和 t 的函数。如

$$\rho=\rho(a,b,c,t)$$

$$p=p(a,b,c,t)$$

由上述各式可以决定任一流体质点的运动。但是可以看出，用拉格朗日法必须首先找出函数关系 $x(a,b,c,t)$，$y(a,b,c,t)$，$z(a,b,c,t)$，$\rho(a,b,c,t)$等。实际上就是要跟踪每一个流体质点，可见这个办法在方程的建立和数学处理上将是十分困难的，因而除研究波浪运动等个别情况外很少采用。

2. 欧拉法

欧拉法又称局部法。

欧拉法研究某瞬时整个流场内位于不同位置上的流体质点的运动参数，然后综合所有空间点，用以描述整个流体的运动。显然，欧拉法的着眼点不在于个别的流体质点，而在于整个流场各空间点处的状态。

一般情况下，同一时刻，不同空间点上的运动参数是不同的。因此，运动参数是空间点坐标(x,y,z)的函数，而在不同时刻，同一空间点上的运动参数也不相同，因而运动参数也是时间的函数。即

$$\left.\begin{aligned}v_x&=v_x(x,y,z,t)\\v_y&=v_y(x,y,z,t)\\v_z&=v_z(x,y,z,t)\end{aligned}\right\}\tag{3-4}$$

$$p=p(x,y,z,t)$$

$$\rho=\rho(x,y,z,t)$$

在欧拉法中讨论加速度时，应将上面三个速度分量的表达式分别对时间求导，得到加速度三个分量的表达式，此时，质点本身的位置坐标(x,y,z)应看成为时间 t 的函数，因而自变量只有 t。由复合函数导数的求法可求得加速度在 x 方向的分量，写为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

质点坐标(x,y,z)对时间的导数为该质点的速度分量，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x,\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y,\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_z$$

所以

$$a_x=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

同理，最后可得

$$
\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{3-5}
$$

其向量表示式为

$$
\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}
$$

式中　$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 称为哈密尔顿算子。

由上述表达式可以看出，位于空间某点上的流体质点的加速度由两部分组成。第一部分是右边第一项，它表示位于所观察空间点上的流体质点的速度随时间的变化率，通常称为**时变加速度**或当地加速度。第二部分是右边第二、三、四项，它们表示流体质点所在空间位置的变化所引起的速度变化率，称为**位变加速度**或**迁移加速度**。两部分之和即为流体质点的全加速度，又称为质点导数或随体导数。

由上述讨论可以看出，欧拉法研究的是流场中每一固定空间点上的流动参数的分布及随时间的变化规律。欧拉法研究一般给不出流体个别质点的运动踪迹，看不出每个流体质点的过去和未来。然而，欧拉法给出了某瞬时整个流场的运动参数分布，因而可以用连续函数理论对流场进行有效的理论分析和计算。实际上，在大多数的工程实际问题中，通常并不需要知道每个流体质点自始至终的运动过程，而只需要知道流体质点在通过空间任意固定点时运动要素随时间的变化状况，以及某一时刻流场中各空间固定点上流体质点的运动要素，然后就可以用数学方法对整个流场进行求解计算。再者，用拉格朗日法移动测试仪器来跟踪测量每个流体质点的运动要素，实际上是很难实现的，而用欧拉法将测试点固定在流场中一些指定的空间点上则很容易做到。因此在大多数流体力学理论研究和工程实际问题的研究中，都采用欧拉法。

拉格朗日法描述着眼于流体质点，将运动参数看作为随体坐标与时间的函数；欧拉法描述着眼于空间点，将运动参数看作为空间坐标和时间的函数，但两者都是描述流体质点的运动参数，因此其表达式之间可以相互转换。

§3-2　关于流体运动的一些基本概念

本节主要介绍用欧拉法描述流体运动时所涉及的关于流体运动的一些重要

的基本概念。

一、恒定流动和非恒定流动

通常情况下，流场中流体的运动参数要随空间点的位置和时间变化，而在工程实际和自然现象中也存在着不同的情况，为研究方便起见，按流体质点通过空间固定点时运动参数是否随时间变化把它分为两类。

1. 恒定流动(又称定常流动)

如果流场中每一空间点上的运动参数不随时间变化，这样的流动称为**恒定流动**。当然不同空间点的运动参数一般情况下是不同的。

如图 3-1a 中所示，贮水容器侧面装有一泄水短管，水自管中流出。当我们采用某种方法补充流出的流体，使容器中的液面高度保持不变时，管内的点 A，B 处的流速和压力以及流出液流的轨迹都将保持不变，而 A，B 两点的参数值可以互不相同。显然，这种流动是恒定流动，此时各点的运动参数可表示为

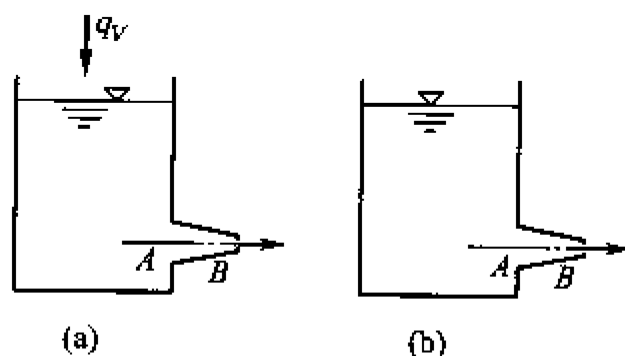


图 3-1

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(x,y,z) \\ v_y &= v_y(x,y,z) \\ v_z &= v_z(x,y,z) \end{aligned}\right\}$$

$$p = p(x,y,z)$$

在质点加速度表达式中，其时变加速度为零，即

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v_y}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial v_z}{\partial t}=0$$

同理

$$\frac{\partial p}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

2. 非恒定流动(又称非定常流动)

若流场中运动参数不但随位置改变而改变，而且也随时间面变化，这种流动称为**非恒定流动**。

在图 3-1b 所示实验中，若不往容器中加水，水面将不断下降。这时不但 A，B 两点的运动参数不同，而且每点上的运动参数也将随时间而改变，自管中流出的水流轨迹亦将不断变化，这种流动即为非恒定流动。某点的运动参数值应表示为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t) \\ v_y &= v_y(x, y, z, t) \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned}\right\}$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

此时，加速度表达式由时变加速度和位变加速度两部分组成。

二、迹线、流线、流管、流束、微小流束

1. 迹线

流体质点运动的轨迹称为**迹线**。流场中所有流体质点流动时都有自己的迹线，它可以是直线或任意曲线簇。由迹线的形状可以清楚地看出质点的运动情况，从而得出流场的参数分布和变化情况。显然，迹线的研究属于拉格朗日法的内容。

观察迹线并不困难，只要在液流中滴入颜色不同而且不易扩散的液滴，通过对颜色液滴运动的观察即可看出迹线的形状。

2. 流线

如图 3-2 所示，**流线**是某瞬时在流场中所作的一条空间曲线，该瞬时位于曲线上各点的流体质点的速度在该点与曲线相切。

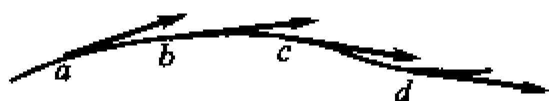


图 3-2

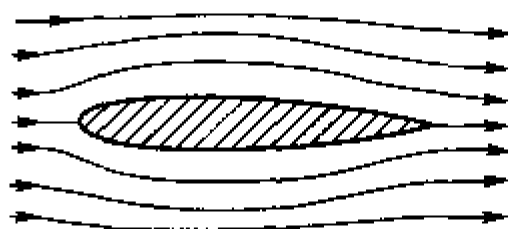


图 3-3

流线形象地给出了流场中的流动状态。通过流线可以清楚地看出某时刻流场中各点的速度方向，由流线的疏密程度也可以比较速度的大小。显然，流线的引入适合欧拉法的研究特点。

可以用下面简单的实验方法观察到流线。在油流中用机械扰动的方法泛起泡沫，并使之成线状，泡沫随油一起流动，某时刻观察到的泡沫图形即为流线形状。图 3-3 即为在此实验中所显示的流线图形。

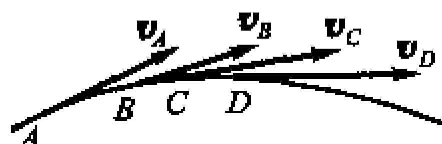


图 3-4

按流线的定义可以作出流场中某瞬时 t 过某点 A 的流线。为此，可先作该瞬时位于 A 点处的流体质点的速度 $\boldsymbol{v}_A$（见图 3-4），同一时刻在 $\boldsymbol{v}_A$ 上接近 A

点 ΔS 处取点 B，作位于点 B 上的另一流体质点的速度$\boldsymbol{v}_B$，仍在同一时刻，在 $\boldsymbol{v}_B$ 上接近 B 点 ΔS 处取点 C，作位于点 C 上的流体质点的速度$\boldsymbol{v}_C$，依次作下去得到一系列接近的点组成的折线 $A—B—C—D—\cdots$ 当点间距离趋近于零时，折线变为一光滑曲线，即为我们欲求的流线。

一般情况下（绕流中驻点等特殊情况除外），流线具有下列几条性质：

（1）在恒定流动中，流线与迹线是同一条曲线，彼此重合；

（2）流线不能彼此相交；

（3）流线不能突然折转，只能平缓过渡。

后两条性质也是显而易见的，因为若流线相交或突然折转，则在交点和转折点处的流体质点应相应有两个速度向量，在一般情况下这是不可能出现的。

由流线的定义很容易推得流线的微分方程式。如图 3－5 所示，某瞬时在流线上任取一点 $M(x, y, z)$，位于 M 点上的流体质点速度为$\boldsymbol{v}$，其分量为 v_x，v_y，v_z。在流线上取无穷小线段 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，其在三个坐标轴上的投影为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，由空间几何关系有

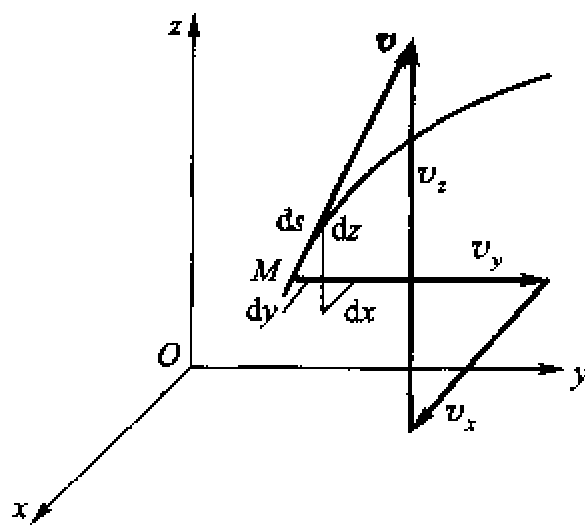


图 3－5

$$\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|}=\cos(\boldsymbol{v}, x),$$

$$\frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|}=\cos(\boldsymbol{v}, y),$$

$$\frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}=\cos(\boldsymbol{v}, z);$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|}=\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{s}, x),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|}=\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{s}, y),$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|}=\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{s}, z)。$$

由流线定义知，$\boldsymbol{v}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的方向一致。即

$$\cos(\boldsymbol{v}, x)=\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{s}, x)$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, y)=\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{s}, y)$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, z)=\cos(\mathrm{d}\boldsymbol{s}, z)$$

从而

$$\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

同样 $$\frac{dy}{v_y}=\frac{|ds|}{|v|},\quad \frac{dz}{v_z}=\frac{|ds|}{|v|}$$

最后得 $$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}\tag{3-6}$$

该式即为**流线的微分方程式**。

由式(3-6)可知，当我们用欧拉法研究流场时，只要给出速度分布规律，便可得出流线形状，进而看出流场的速度分布图形。例如，某流场中速度分布为

$$v_x=\frac{-ky}{x^2+y^2},\quad v_y=\frac{kx}{x^2+y^2},\quad v_z=0$$

现在分析其流线形状及流动状况。

首先，由 $v_z=0$ 知其流动为二元流动。

将速度表达式代入流线微分方程可得

$$\frac{(x^2+y^2)dx}{-ky}=\frac{(x^2+y^2)dy}{kx}$$

整理得 $$xdx+ydy=0$$

积分此式 $$x^2+y^2=C$$

此式即为流线方程，由此方程可知该流动流线为以坐标原点为圆心的同心圆簇。不难分析此流动为逆时针方向绕坐标原点运动。

3. 流管、流束

在流场中任取一封闭曲线 l（非流线），过曲线上各点作流线，所有这些流线构成一管状曲面，称为**流管**，如图 3-6 所示。由流线定义可知，位于流管表面上的各流体质点只具有切于流管方向的速度，没有法向速度分量，因而不能穿越流管，即没有流体通过流管向内或向外流动。流管如同真实的固体管壁，将其内部的流体限制在管内流动。

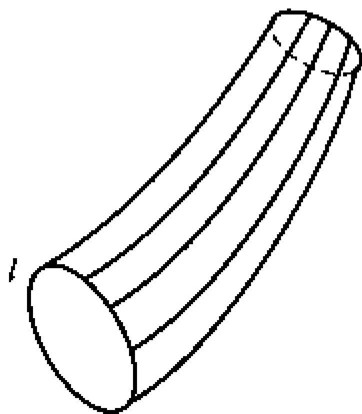


图 3-6

在流体作恒定流动时，流管的形状和空间位置不随时间改变。流管在流场中不能产生也不能中断。

若在流场中取一非流面的曲面 S，则过曲面上各点所作流线的总合，称为**流束**。可见，流束由流管所围成的空间内所有流线所组成。若所取曲面为一无穷小面积 ds，则所得流束称为**微小流束**。微小流束的极限即是流线，通常可以用流线方程来确定微小流束，但须注意两者之间的差别。另外，由于微小流束断面无限小，可以认为其断面上的运动参数均匀分布。

在实际工程中，我们把管内流动和渠道中的流动看成是总的流束，它由无

限多微小流束组成，称为总流。

三、过流断面、湿周、水力半径、当量直径

在流束或总流中与所有流线都相垂直的**横断面**称为**过流断面**或有效断面。如图 3-7 所示,过流断面可能是平面也可能是曲面。

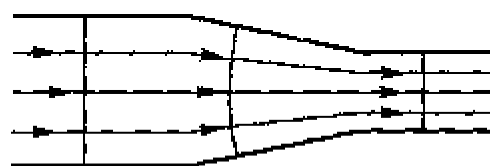


图 3-7

在总流的过流断面上与流体相接触的固体边壁周长称为**湿周**，用字母 χ 标记。

总流过流断面面积与湿周之比称为**水力半径**，用字母 R 标记

$$R=\frac{A}{\chi} \tag{3-7}$$

总流过流断面面积的四倍与湿周之比称为**当量直径**，用字母 d_e 标记

$$d_e=\frac{4A}{\chi} \tag{3-8}$$

水力半径和当量直径与通常圆断面的半径和直径是不同的概念，不可混淆，它们在非圆断面管道水力计算中起着十分重要的作用。

图 3-8 中分别标出了全充满圆管，半充满圆管，正方形和长方形断面的湿周、水力半径和当量直径。

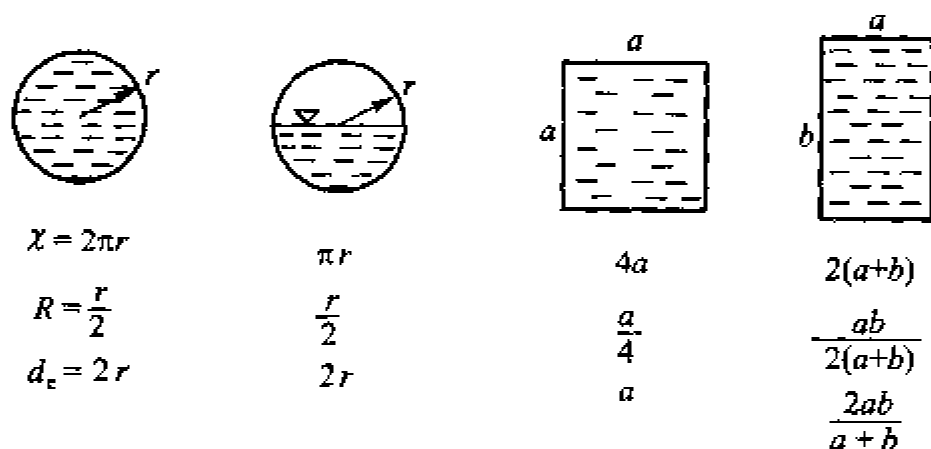


图 3-8

四、流量、断面平均流速

单位时间内流过总流过流断面的流体量称为**流量**，流体量可以用体积、质量来表示，其相应的流量分别称为**体积流量**、质量流量，记为 q_V 和 q_m。在 SI 中两种流量的单位分别为：m^3/s 和 kg/s。

在图 3-9 中，流过微元面积 dA 的体积流量为

$$dq_V=v\,dA$$

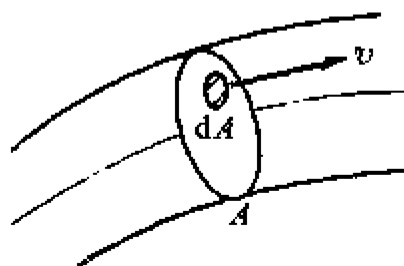


图 3-9

此处，因 dA 为微元面积，故认为 v 均匀分布。

积分此式可得流经整个过流断面 A 的流量

$$q_V = \int_A v\mathrm{d}A \tag{3-9}$$

当所取为任意截面而不是过流断面时，因截面每点速度不与截面垂直，故微元流量为

$$\mathrm{d}q_V = v\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})\mathrm{d}A$$

此处，$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})$为速度与 $\mathrm{d}A$ 法线方向夹角的余弦。

流过整个截面上的流量应为

$$q_V = \int_A v\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}A$$

在流体力学的某些研究和在大量实际工程计算中，往往不需要知道过流断面上每一点的实际流速，只需要知道该过流断面上流速的平均值就可以了，因此引入平均流速的概念。过流断面的平均流速是一种假想的流速，即过流断面上每一点的平均流速都相同，以平均流速流过过流断面的流量与以实际流速流过的流量相等，若平均流速以 V 标记，则

$$V = \frac{q_V}{A} = \frac{\int_A v\mathrm{d}A}{A} \tag{3-10}$$

显然，由于实际流体具有粘性，流速在过流断面上的分布肯定不会是均匀的，以后将会看到其规律可能为抛物线分布、指数分布等。因此，每点的实际流速可以表示为

$$v = V \pm \Delta v$$

可见，实际流速可能大于也可能小于平均流速。对于整个过流断面，有 $\sum \pm \Delta v = 0$。

断面平均流速的概念十分重要，它将使我们的研究和计算大为简化，尤其在工程设计计算中，具有十分重要的实际意义。

五、一元(一维)、二元(二维)、三元(三维)流动

根据决定流体运动参数所需的空间坐标变量的个数，可以将流体运动分为**一元流动**、**二元流动**、**三元流动**，又称为一维流动、二维流动、**三维流动**。一般情况下，流体都是在空间内流动，流动参数为三个坐标的函数，为三元流动，如风绕过汽车、房屋的流动，流体对扭曲叶片的流动等，这些都是三元流动。虽然随着计算技术和计算机的飞速发展和应用，对一些复杂流体力学问题的求解已成为可能，但是运动参数随空间三个坐标方向变化的大多数流体力学工程实际问题，研究分析通常十分困难复杂，几乎不可能精确求解。因此，在流体力学的研究和实际工程技术

中，在可能的条件下，应尽量将三元流动简化为二元甚至为一元流动求解。适当地选择坐标或将流动作某些简化，流动参数可表示为两个坐标的函数，称为二元流动。如对某些绕圆柱流动假想看作为绕过无限长圆柱体的流动，就成为二元流动。流动参数只是一个空间坐标函数的流动称为一元流动。一般情况下管道中的流动，同一过流断面上各点的运动参数实际上是不等的，它是三个空间坐标的函数。但是如果引入断面平均速度，就变为只是曲线坐标的函数，可以将这种管流看作为一元流动，使实际流体运动问题大为简化。

§3-3 连续性方程

在流体力学的研究中，把流体看作是连续介质，即使是在运动流体内部，流体质点也是连续充满所占据的空间，彼此间不会出现空隙。流体的这种性质称为**连续性**，用数学形式表达出来就是连续性方程。它是物质不灭定律在流体力学中的具体体现，连续性方程实质上是质量守恒方程。

1. 不可压缩流体恒定流动微小流束和总流的连续性方程

这里只讨论限于不可压缩流体作恒定一元流动的情况。在流场中既无源也无汇(无源、无汇指流场中流体不产生也不消失)。

对于如图 3-10 所示的微小流束，根据定义，流体质点不能穿过其侧表面，而在微小流束内流体连续，没有间隙。因此，$\mathrm{d}t$ 时间内自 $\mathrm{d}A_1$ 流入的流体体积应等于自 $\mathrm{d}A_2$ 流出的流体体积，因所研究的是微小流束，则 $\mathrm{d}A_1$，$\mathrm{d}A_2$ 面上的流速 v_1，v_2 可认为均布，所以

$$v_1 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = v_2 \mathrm{d}A_2 \mathrm{d}t$$

得

$$v_1 \mathrm{d}A_1 = v_2 \mathrm{d}A_2 \qquad (3-11)$$

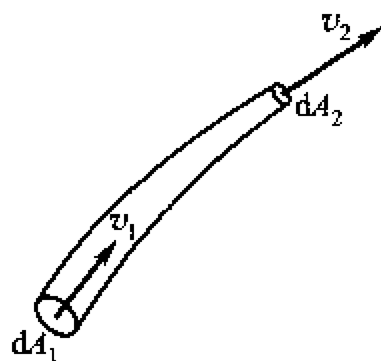


图 3-10

式(3-11)为不可压缩流体微小流束**连续性方程**。方程对恒定流动任何时刻都成立，而对于非恒定流动只成立于某一瞬时。

对于图 3-11 所示由 A_1，A_2 断面所限定的流束段，其连续性方程可由对微小流束连续性方程(3-11)在 A_1，A_2 面上积分得到。即

$$\int_{A_1} v_1 \mathrm{d}A_1 = \int_{A_2} v_2 \mathrm{d}A_2$$

如 V_1，V_2 为 A_1，A_2 面上的平均流速，则得

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

依此，对流束的各过流断面有

$$V_1A_1 = V_2A_2 = \cdots = V_nA_n = q_V \qquad (3-12)$$

式(3-12)为流束的连续性方程。此方程给出了流量、平均流速和过流断面面积之间的关系，即流束的断面平均流速与过流断面面积成反比。如果流量一定，由式(3-12)可见，过流断面大，则流速小；而过流断面小则流速大。

显然，由连续性方程可以证明前面的论断：流管在流场中不能中断或产生，因为流管中断或产生，流出流入流束的流量将不等。

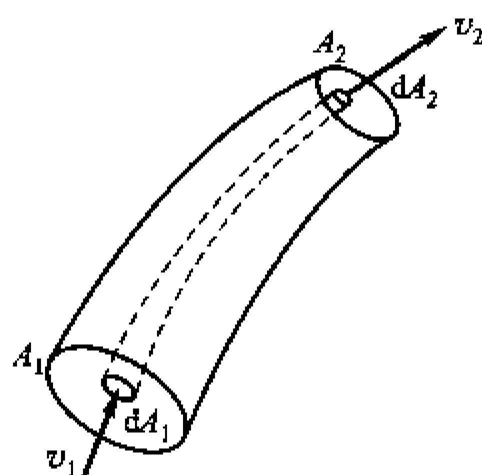


图 3-11

2. 直角坐标系中连续性微分方程

在空间流场中取一固定的平行六面体微小空间，边长为 dx，dy，dz，所取坐标如图 3-12 所示。中心为 $A\ (x, y, z)$点，该点速度分量为 v_x，v_y，v_z，密度为 $\rho\ (x, y, z, t)$。

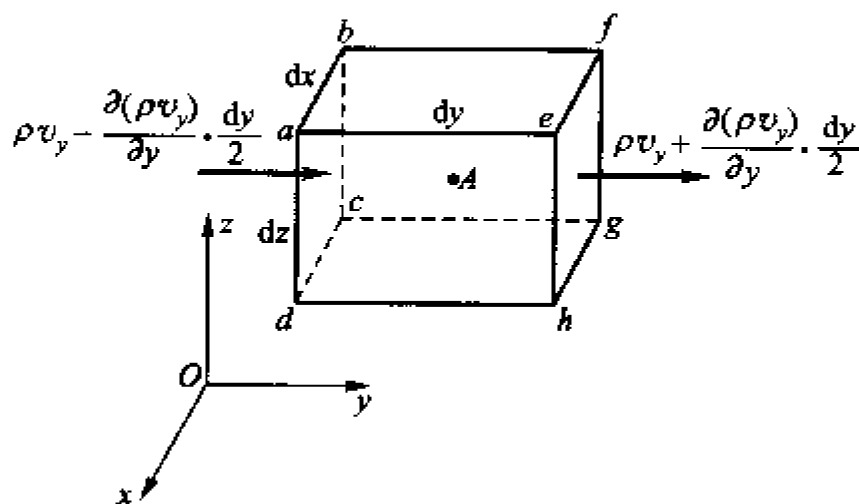


图 3-12

计算在 dt 时间内流入、流出该六面体的流体质量。

首先讨论沿 y 方向的质量变化。由于速度和密度是坐标的连续函数，因此由 $abcd$ 面流入的质量为

$$\left[\rho v_y - \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dy\right]dxdzdt$$

由 $efgh$ 面流出的质量为

$$\left[\rho v_y + \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dy\right]dxdzdt$$

因此，在 dt 时间内，自垂直于 y 轴的两个面流出、流入的流体质量差为

$$\Delta m_y = \left[\rho v_y + \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dy\right]dxdzdt$$

$$-\left[\rho v_y-\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

同样道理可得 $\mathrm{d}t$ 时间内，分别自垂直于 x，z 轴的平面流出、流入的流体质量差为

$$\Delta m_x=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$\Delta m_z=\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

由此，在 $\mathrm{d}t$ 时间内流出、流入整个六面体的流体质量差为

$$\Delta m_x+\Delta m_y+\Delta m_z$$
$$=\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

对于可压缩流体，在 $\mathrm{d}t$ 时间内，密度也将发生变化，流体密度的变化同样引起六面体内流体质量的改变。以 Δm_t 表示质量随时间的增量，设 t 时刻流体密度为 ρ，$t+\mathrm{d}t$ 时刻流体密度为 $\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t$，则

$$\Delta m_t=\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

由质量守恒条件可知

$$\Delta m_x+\Delta m_y+\Delta m_z=-\Delta m_t$$

由于式中 $(\Delta m_x+\Delta m_y+\Delta m_z)$ 为流出与流入六面体流体质量的差值，而 Δm_t 为 $\mathrm{d}t$ 时间内六面体内流体质量由于密度变化而产生的增量，故该式右端加一"-"号。

即

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

整理得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{3-13}$$

式(3-13)为**连续性微分方程**。

由于

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}=\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}$$
$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=\rho\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}$$
$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=\rho\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

而
$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$
全部代入式(3－13)得
$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0$$
或
$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0 \tag{3-14}$$
式(3－14)为连续性微分方程的另一形式。
写成向量表达式为
$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0 \tag{3-15}$$
对于恒定流动，$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，则式(3－13)变为
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$$
或
$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0$$
对于不可压缩流体 $\rho=\text{const}$，式(3－14)变为
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{3-16}$$
或
$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$$
即速度$\boldsymbol{v}$的散度为零。

3. 圆柱坐标系的连续性微分方程

在图 3－13 中引用**圆柱坐标系** r，θ，z。
取空间微元体积12341′2′3′4′为研究对象。速度 v_r，v_θ，v_z 和密度 ρ 都是空间坐标和时间的连续函数。

计算 dt 时间内流入、流出该微元体积的流体质量。

通过1234，22′3′3 和 33′4′4 各面流入的流体质量分别为
$$\rho v_r r d\theta dz dt$$
$$\rho v_\theta dr dz dt$$
$$\rho v_z r d\theta dr dt$$
通过1′2′3′4′，11′4′4 和 11′2′2 各面流出的流体质量分别为

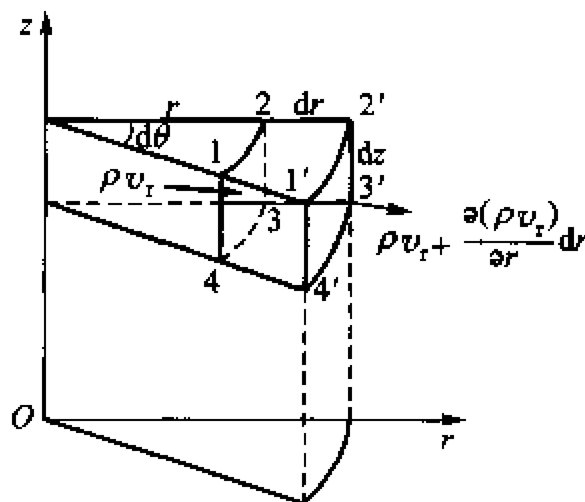


图 3－13

$$\left[\rho v_r + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}\mathrm{d}r\right](r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$\left[\rho v_\theta + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$\left[\rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}t$$

由此，在 $\mathrm{d}t$ 时间内流出、流入所研究微元体积的流体质量差为(略去高阶小量)

$$\Delta m_r + \Delta m_\theta + \Delta m_z = \left[\rho v_r + r\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

同前述，$\mathrm{d}t$ 时间内由密度变化引起的流体质量增量 Δm_t 为

$$\Delta m_t = \frac{\partial \rho}{\partial t}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

由质量守恒有

$$\Delta m_r + \Delta m_\theta + \Delta m_z = -\Delta m_t$$

即

$$\left[\rho v_r + r\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}t = -\frac{\partial \rho}{\partial t}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

由于

$$\mathrm{d}r\neq 0 \quad \mathrm{d}\theta\neq 0 \quad \mathrm{d}z\neq 0 \quad \mathrm{d}t\neq 0$$

所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{3-17}$$

式(3-17)即为柱坐标系中的连续性微分方程。

对于不可压缩流体 $\rho = \mathrm{const}$，式(3-15)变为

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3-18}$$

4. 球坐标系的连续性微分方程

在图 3-14 中采用**球坐标系**，r——径距；θ——纬度；φ——经度。用上述类同的方法可推得连续性微分方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} = 0 \tag{3-19}$$

对于不可压缩流体，式(3-19)变为

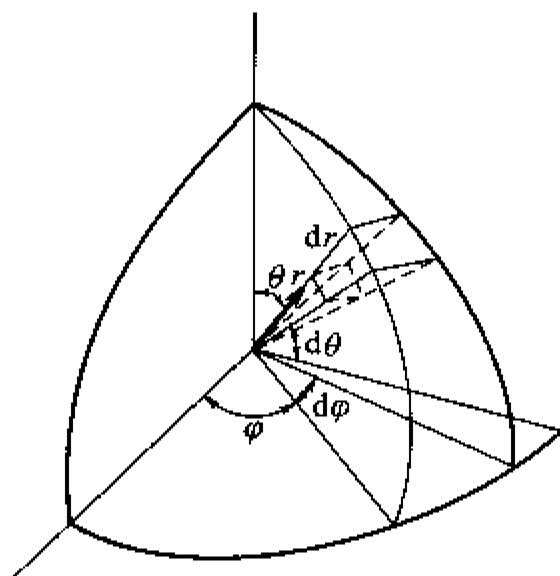


图 3-14

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r}=0 \tag{3-20}$$

此处推导过程省略，其中 v_r，v_θ，v_φ 为速度在球坐标轴上的分量。

§3-4 流体微元的运动分析

本节研究具有微小体积的流体块——流体微元运动的分析。

在理论力学中，刚体的运动可以分解为随极点的移动和绕极点转动两种。如图 3-15 所示，刚体 V 中任一点 M 的速度可以由随极点 A 的移动速度和对极点 A 的瞬时轴的转动速度两部分组成，即

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_r$$

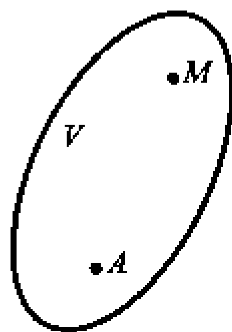


图 3-15

流体的易流动性决定了它在流动的过程中除了与刚体相类似的移动和转动外，必将伴随有变形运动。因此，通常情况下，流体微元的运动可以分解为移动、转动和变形三种。

流体微元的运动分解可以由下述的柯西-亥姆霍兹(Cauchy-Helmholts)定理确定：在一般情况下，任一流体微元的运动可以分解为三个运动：随同任意极点的平移，对于通过这个极点的瞬时轴的旋转运动以及变形运动。

下面来证明这个定理。

某瞬时 t 在流场中取出一边长为 dx，dy，dz 的平行六面体微元 AM，如图 3-16 所示。

在 t 时刻顶点 A (x,y,z)的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(x,y,z,t) \\ v_y &= v_y(x,y,z,t) \\ v_z &= v_z(x,y,z,t) \end{aligned}\right\}$$

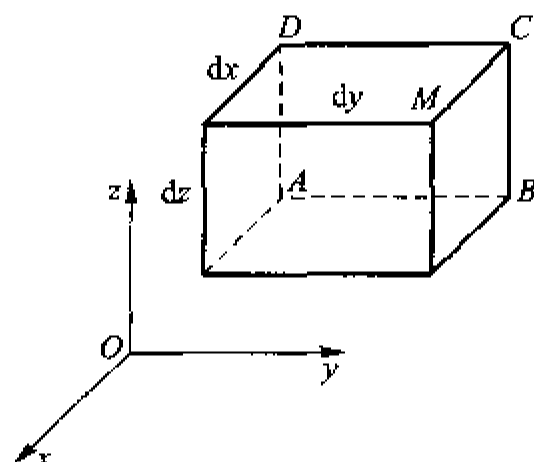


图 3-16

在同一时刻 t，顶点 $M(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$ 的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_{Mx} &= v_{Mx}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z, t) \\ v_{My} &= v_{My}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z, t) \\ v_{Mz} &= v_{Mz}(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z, t) \end{aligned}\right\}$$

由于速度是坐标和时间的多元连续函数，故 M 点的速度可以用台劳级数展开，当略去二阶以上微量时可以表示为

$$\left.\begin{aligned} v_{Mx} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z \\ v_{My} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z \\ v_{Mz} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{3-21}$$

为简化讨论，取平面运动(或理解为取单位厚度流体微元的运动)进行分析。由于流体微元上各点的速度不同，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，该流体微元的位置、形状都将发生变化，现在来分析这些变化是哪些运动所导致的。

为此，将作平面运动的流体微元上的 $ABCD$ 各点的速度标示如图 3-17a。

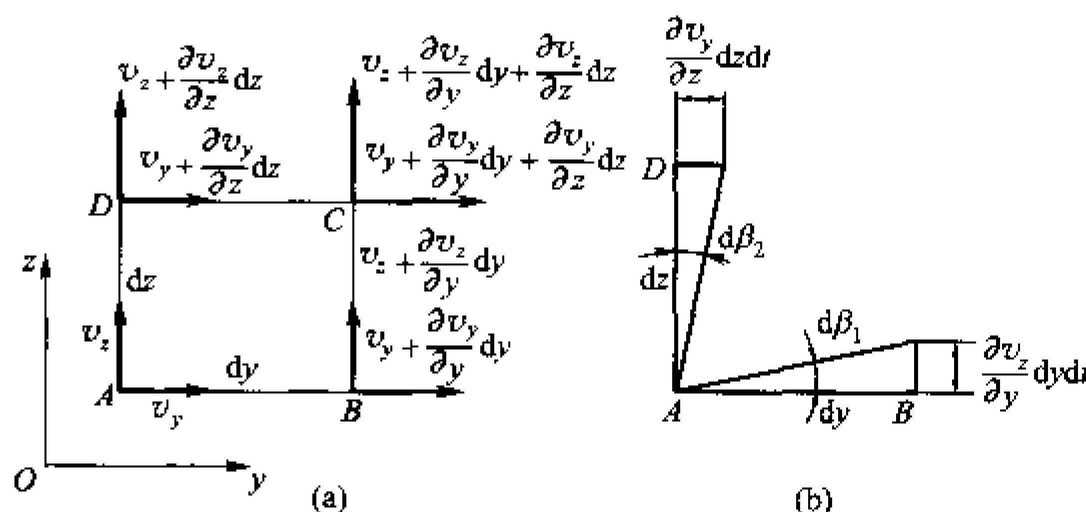


图 3-17

由图可见微元中各点的运动可以分解为：

1. 随极点 A 的移动，即各质点随同极点的平移

极点 A 的速度 v_y，v_z 是各点速度的组成部分。若只考虑平移运动时，dt 时间内各点的平移距离为 $v_y dt$，$v_z dt$，其移动方向由 A 点 t 时刻的速度方向所确定。

2. 线变形运动

流体微元上各点由于所在坐标位置的不同将在坐标轴方向产生速度差，该速度差将使流体微元在 dt 时间内产生沿坐标轴方向的线变形，即各边伸长或缩短。如图示 A 和 B 及 A 和 D 点间的速度差值为 $\frac{\partial v_y}{\partial y}dy$ 和 $\frac{\partial v_z}{\partial z}dz$。所以 AB、AD 在 dt 时间的线变形为

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}dydt,\quad \frac{\partial v_z}{\partial z}dzdt$$

3. 角变形运动和旋转运动

现在只考虑 B 相对于 A 和 D 相对于 A 分别在 z 方向和 y 方向的速度差值所引起的变形运动。

由图 3 - 17b 所示，B 点与 A 点在 z 方向速度相差为 $\frac{\partial v_z}{\partial y}dy$，所以在 dt 时间内 B 点比 A 点在 z 方向多移动 $\frac{\partial v_z}{\partial y}dydt$ 的距离。由图示几何关系可知，变形角度 $d\beta_1$ 为

$$\tan\beta_1=\frac{\frac{\partial v_z}{\partial y}dydt}{dy}=\frac{\partial v_z}{\partial y}dt$$

考虑到 $d\beta_1$ 为一微小角度。故

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}dt\approx d\beta_1$$

同理，D 相对于 A 移动所形成的 $d\beta_2$ 角为

$$\tan\beta_2=\frac{\frac{\partial v_y}{\partial z}dzdt}{dz}=\frac{\partial v_y}{\partial z}dt$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z}dt\approx d\beta_2$$

我们规定以角 BAD 的平分线的位置变化来看流体微元是否旋转；角变形由 BAD 整个角度值的变化来衡量。

在一般情况下，旋转和角变形会出现如图 3－18 所示的五种情况。对这五种情况分析如下：

（1）$d\beta_1 = -d\beta_2$，这时流体微元只有变形而无旋转，角分线的旋转角 $d\theta_x = 0$；

（2）$d\beta_1 = d\beta_2 = d\theta_x$，这时流体微元只有旋转而无变形；

（3）$d\beta_1 = 0$，$d\beta_2 \neq 0$，$d\theta_x = \frac{1}{2}d\beta_2$，这时流体微元既有旋转又有变形；

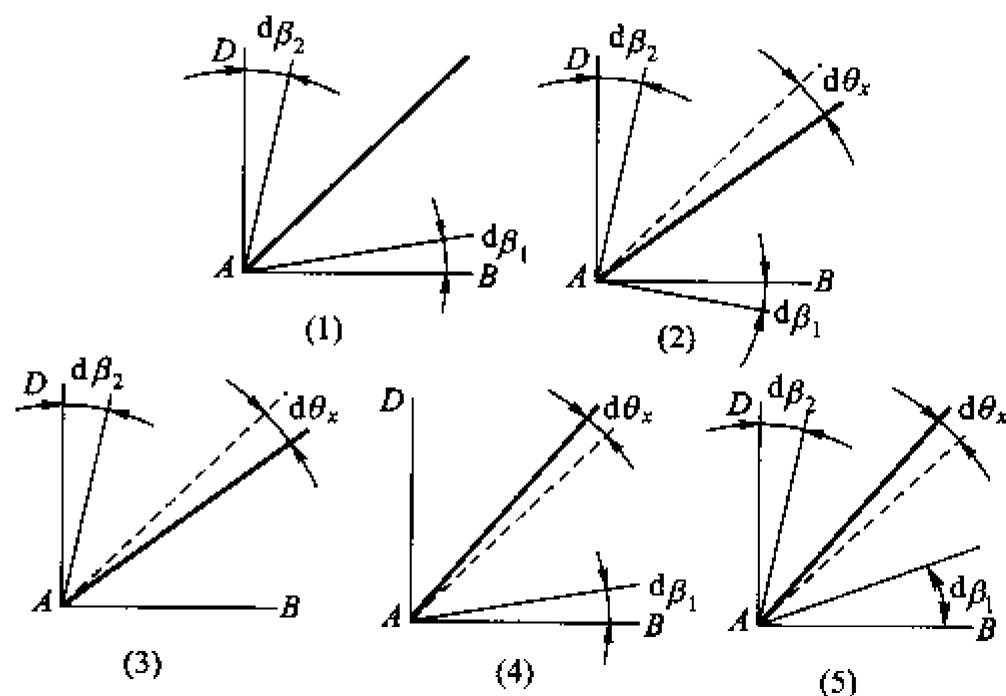


图　3－18

（4）$d\beta_2 = 0$，$d\beta_1 \neq 0$，$d\theta_x = \frac{1}{2}d\beta_1$，这时流体微元既有旋转又有变形；

（5）$d\beta_1 \neq 0$，$d\beta_2 \neq 0$，$d\theta_x = \frac{1}{2}(d\beta_1 - d\beta_2)$，这时流体微元有旋转又有变形；这种情况显然代表普遍的运动状态。

下面就第五种情况来讨论流体微元的变形和旋转运动。

由

$$d\beta_1 = \frac{\partial v_z}{\partial y}dt \qquad d\beta_2 = \frac{\partial v_y}{\partial z}dt$$

得其旋转角度为

$$d\theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dt$$

单位时间旋转角度，即**旋转角速度**为

$$\omega_x = \frac{d\theta_x}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

同理可得 ω_y，ω_z. 所以流体微元的旋转角速度分量为

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3-22}$$

合成旋转角速度为

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

向量表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}$$

由前面的分析，*BAD* 的角变形为

$$\mathrm{d}\ \beta_x = \mathrm{d}\beta_1 + \mathrm{d}\beta_2$$

为使角变形速度的表达式与旋转角速度具有类同的形式，定义角变形速度为

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\beta_x}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{1}{2}\frac{(\mathrm{d}\beta_1 + \mathrm{d}\beta_2)}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

同理可得 γ_y，γ_z。故流体微元的角变形速度分量为

$$\left.\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \gamma_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \gamma_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3-23}$$

根据平面运动分析所得到的表达式，对式(3－21)*M* 点的速度分量进行进一步变换。

由式(3－22)和(3－23)的第三式得

$$\gamma_z - \omega_z = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

由式(3－22)和(3－23)的第二式得

$$\gamma_y + \omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

将这两个关系式代入式(3－21)的第一式可得

$$\begin{aligned} v_{Mx} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + (\gamma_z - \omega_z)\mathrm{d}y + (\gamma_y + \omega_y)\mathrm{d}z \\ &= v_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \gamma_z\mathrm{d}y + \gamma_y\mathrm{d}z\right) + (\omega_y\mathrm{d}z - \omega_z\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

同理可得 v_{My}，v_{Mz}。则有

$$\left.\begin{aligned} v_{Mx} &= v_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \gamma_y\mathrm{d}z + \gamma_z\mathrm{d}y\right) + (\omega_y\mathrm{d}z - \omega_z\mathrm{d}y) \\ v_{My} &= v_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \gamma_z\mathrm{d}x + \gamma_x\mathrm{d}z\right) + (\omega_z\mathrm{d}x - \omega_x\mathrm{d}z) \\ v_{Mz} &= v_z + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z + \gamma_x\mathrm{d}y + \gamma_y\mathrm{d}x\right) + (\omega_x\mathrm{d}y - \omega_y\mathrm{d}x) \end{aligned}\right\} \tag{3-24}$$

由式(3－24)可以看出，M 点的速度分量由三部分组成。第一项为跟随 A 点的平移速度分量；第二部分中的第一项为流体微元的线变形速度分量；第二、三项为流体微元的角变形速度分量，因此第二部分总合为流体微元的变形速度分量；第三项为流体微元绕 A 点的旋转速度分量。

由此证明了亥姆霍兹关于微元的运动分解定理。

§3－5 有旋运动和无旋运动

按流场中每一个流体微元是否旋转可以将流动分为两大类：**有旋运动**和无旋运动。

有旋运动，即 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ 或 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} \neq 0$

对于无旋运动，$\boldsymbol{\omega} = 0$ 或 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$。由式(3－22)可知，无旋运动流场中各流体微元应满足

$$\left.\begin{aligned} \omega_x = 0 \qquad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \omega_y = 0 \qquad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \omega_z = 0 \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{3-25}$$

由式(3－25)可以看出，由流场的流速分布可以判断流体流动有旋或无旋。**无旋流动**亦称为**有势流动**。

流体作有旋运动或无旋运动仅取决于每个流体微元本身是否旋转，与整个

流体运动和流体微元运动的轨迹无关。

例如，在图 3－19a 所示的流动中，流体微元沿圆周运动而微元本身并不旋转，故此流动为无旋即有势流动。以后将会看到，在感生速度场中将出现 $vr = C$ 的速度分布，这种流动就是无旋运动。这可以用图 3－19a 做定性解释：感生速度场中速度分布决定了微元做顺时针方向转动，而 ω 将使其做反时针转动，二者相抵消，结果使流体微元本身并不旋转。

图 3－19b 所示为另一种流动情况，整个流场中的流体作类似于刚性旋转，这时各流体微元本身将产生旋转，这种流动为有旋运动。

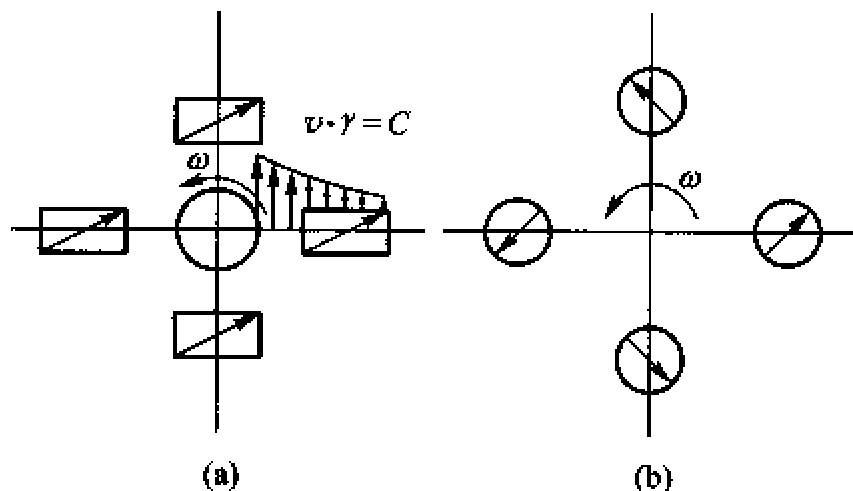


图 3－19

因为无旋运动在运动分析和工程计算中较有旋运动简便得多，因此在工程实际中常将不少问题简化为无旋运动来处理。

例 题

例 3－1 若流体恒定运动速度的分量为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= x^2 \\ v_y &= y^2 \\ v_z &= z^2 \end{aligned}\right\}$$

试求经过空间点(2,4,8)的流线方程式。

解 流线微分方程式为

$$\left.\begin{aligned} v_x \mathrm{d}y &= v_y \mathrm{d}x \\ v_z \mathrm{d}y &= v_y \mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

根据所给条件，有

$$\left.\begin{aligned} x^2 \mathrm{d}y &= y^2 \mathrm{d}x \\ z^2 \mathrm{d}y &= y^2 \mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

分离变量并积分之

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2} + C_1 \quad 得 -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dz}{z^2} + C_2 \quad 得 -\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + C_2$$

由给定的条件确定积分常数 C_1、C_2

$$当\ x=2,\ y=4\ 时，得\ C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$当\ y=4,\ z=8\ 时，得\ C_2 = -\frac{1}{4}$$

所以，所求的流线方程为：

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

例 3－2　已知不可压缩流体运动速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x，y 两个轴方向的分量为

$$v_x = 2x^2 + y,\quad v_y = 2y^2 + z$$

且在 $z=0$ 处，有 $v_z=0$。试求 z 轴方向的速度分量 v_z。

解　对不可压缩流体连续性方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

将已知条件代入上式，有

$$4x + 4y + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

即

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -4x - 4y$$

积分可得

$$v_z = -4(x+y)z + f(x,y)$$

又由已知条件对任何 x，y，当 $z=0$ 时，$v_z=0$。故有

$$f(x,y) = 0$$

因此

$$v_z = -4(x+y)z$$

例 3－3　已知流场中某流体质点的迹线方程为

$$x = A\cos(Kt),\quad y = B\sin(Kt),\quad z = Ct$$

求该质点的速度和加速度。

解 由迹线方程可得

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = -AK\sin(Kt)$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = BK\cos(Kt)$$

$$v_z = \frac{\partial z}{\partial t} = C$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = -AK^2\cos(Kt)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -BK^2\sin(Kt)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

例 3－4 已知某流场速度分布为

$$v_x = x - 2,\ v_y = -3y,\ v_z = z - 3$$

试求过(3,1,4)点的流线。

解 由流线微分方程得

$$\frac{dx}{x-2} = \frac{dy}{-3y} = \frac{dz}{z-3}$$

对应二式积分得

$$\ln(x-2) = -(1/3)\ln y + C_1$$

$$\ln(x-2) = \ln(z-3) + C_2$$

由过(3,1,4)点的条件得 $C_1 = C_2 = 0$，于是，所求流线为

$$x = y^{-\frac{1}{3}} + 2 \text{ 和 } x = z - 1$$

例 3－5 已知某平面流场速度分布为

$$v_x = x/(t-3),\ v_y = y + 2$$

求其流线和迹线方程。

解 由流线方程得

$$\frac{(t-3)dx}{x} = \frac{dy}{y+2}$$

积分得

$$(t-3)\ln x = \ln(y+2) + C_1$$

整理得流线

$$x^{t-3} = C(y+2)$$

式中常数 $C_1 = \ln C$

由迹线方程得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{t-3}\quad \frac{dy}{dt}=y+2$$

积分得

$$\ln x=\ln(t-3)+\ln C_1 \qquad x=C_1(t-3)$$

$$\ln(y+2)=t+\ln C_2 \qquad y=C_2e^t-2$$

整理得迹线方程

$$y=C_2e^{\frac{x}{C_1}+3}-2$$

例 3-6　某平面流场速度分布为

$$v_x=x+t,\quad v_y=-y+t$$

试求在 $t=0$ 时过$(-1,-1)$点的流线和迹线方程。

解　将速度代入流线微分方程

$$\frac{dx}{x+t}=\frac{dy}{-y+t}$$

积分得
$$\ln(x+t)=-\ln(y-t)+C$$

即
$$\ln[(x+t)(y-t)]=C$$

由 $t=0$ 时过$(-1,-1)$点得 $C=0$，所求流线方程为

$$xy=1$$

可知流线为双曲线。

由迹线微分方程得

$$\frac{dx}{dt}=v_x=x+t$$

$$\frac{dy}{dt}=v_y=-y+t$$

此方程通解为

$$x=C_1e^t-t-1$$

$$y=C_2e^t+t-1$$

由 $t=0$ 时 $x=-1$，$y=-1$ 可得 $C_1=C_2=0$，于是迹线方程为

$$\begin{cases}x=-t-1\\ y=t-1\end{cases}$$

消去 t 得

$$x+y=-2$$

可见在非恒定流动中迹线为直线。

若流动恒定，则速度为 $v_x=x$，$v_y=-y$。可求得流线方程仍为 $xy=1$。由迹线方程得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x=x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y=-y$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

积分得 $\ln(xy)=C$

由过$(-1,-1)$点得 $C=0$

得迹线方程为

$$xy=1$$

可以看出，当流动恒定时流线和迹线重合。

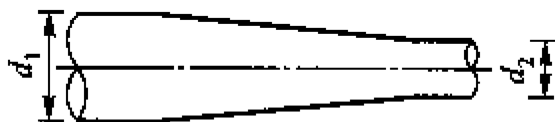
习　题

3－1　恒定流是：(a) 流动随时间按一定规律变化；(b) 流场中任意空间点上的运动要素不随时间变化；(c) 各过流断面的速度分布相同。

3－2　一元流动是：(a) 圆管内流动；(b) 速度分布按直线变化；(c) 运动参数是一个空间坐标和时间变量的函数。

3－3　流线与迹线重合的流动是：(a) 不可压缩流体流动；(b) 非恒定流动；(c) 恒定流动；(d) 理想流体流动。

3－4　一变直径管，直径 $d_1=320$ mm，$d_2=160$ mm，流速 $v_1=1.5$ m/s，v_2 为：(a) 3 m/s；(b) 4 m/s；(c) 6 m/s；(d) 9 m/s。



题 3－4 图

3－5　流动是流体质点在运动，但为什么在研究流体时不去注意流体质点，而去讨论空间点？

3－6　试区别恒定流动和非恒定流动；流线和迹线这两对概念，并举例说明之。

3－7　设某不可压缩流体作二元流动时的速度分布为

(1) $v_x=\dfrac{m}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v_y=\dfrac{m}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$；

(2) $v_x=\dfrac{kt(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$，$v_y=\dfrac{2kt(xy)}{(x^2+y^2)^2}$

其中 m、k 为常数。试求加速度。

3－8　已知流体运动的速度场为：

$$v_x=2yt+at^3,\quad v_y=2xt,\quad v_z=0$$

式中 a 为常数，试求 $t=1$ 时，过$(0,b)$点的流线方程。

3－9　证明下列二维流场是无旋的，并找出经过(1,2)点的流线方程式。

$$v_x=x^2-y^2+x,\quad v_y=-(2xy+y)$$

3－10　已知二元不可压缩流体流动的流线方程如下，问哪一个是无旋的？

(1) $2Axy=C$;

(2) $Ax+By=C$;

(3) $A\ln(xy^2)=C$,

其中 A，B，C 均为常数。

3-11　设有两个流动，速度分量为：

(1) $v_x=-ay$，$v_y=ax$，$v_z=0$;

(2) $v_x=-\dfrac{cy}{x^2+y^2}$，$v_y=\dfrac{cx}{x^2+y^2}$，$v_z=0$。

式中 a，c 为常数，试问：这两个流动中哪个是有旋的？哪个是无旋的？哪个有角变形？哪个无角变形？

3-12　试确定下列流场是否有旋：

(1) $v_x=x^2y+y^2$，　$v_y=x^2-xy^2$;

(2) $v_x=x^3\sin y$，　$v_y=3x^2\cos y$;

(3) $v_x=k$，　$v_y=0$，

(4) $v_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，　$v_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$。

3-13　设空间不可压缩流体的两个分速为：

(1) $v_x=ax^2+by^2+cz^2$，　$v_y=-dxy-eyz-fzx$;

(2) $v_x=\ln\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)$，$v_y=\sin\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)$

其中 a，b，c，d，e，f 均为常数。试求第三个分速 v_z。

已知当 $z=0$ 时 $v_z=0$。

3-14　有两个不可压缩连续流场：

(1) $v_x=ax^2+by$，$v_z=0$;

(2) $v_x=e^{-x}\mathrm{ch}\,y+1$，$v_z=0$

求 v_y（设 $y=0$ 时，$v_y=0$）。

3-15　已知某流场速度分布为

$$v_x=yz+t,\quad v_y=xz+t,\quad v_z=xy$$

试求：(1) 在 $t=2$ 时刻空间点(1,2,3)处流体的加速度；

(2) 判断流场是否有旋。

3-16　某二维不可压缩恒定无旋流场中，若速度 $v_x=Kxy$，试求 v_y。

3-17　若流体质点迹线方程为 $x=1+0.01t^{\frac{5}{2}}$，$y=2+0.01t^{\frac{5}{2}}$，$z=3$，试求点(10,11,13)处的加速度。

3-18　某二维流场速度分布为

$$v_x=x+t,\quad v_y=y+t$$

当 $t=1$ 时刻流体质点位于(1,2)位置时，求迹线方程。

3-19　已知某流场速度分布为

$$v_x=K_1e^t-3,\quad v_y=K_2e^t+5$$

试求：(1) $t=0$ 时刻位于(1,2)点流体质点的迹线方程；

(2) $t=0$ 时刻过(3,5)点的流线方程。

3－20 某不可压缩流体二维流动速度场为

(1) $v_x=1$，$v_y=t$；

(2) $v_x=1+y$，$v_y=1+at$

试求 $t=0$ 时刻位于 A (0,0)点的流体质点的流线方程，式中 a 为常数。

3－21 若不可压缩流场速度分布为

$$v_x=x+at,\quad v_y=-y+at$$

式中 a 为常数。试求 $t=1$ 时过点(1,2)的迹线和流线方程。

3－22 已知某三维流场中两个速度分量为

(1) $v_x=7x$，$v_y=-5y$

(2) $v_x=\ln\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$，$v_y=\sin\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$

(3) $v_x=x^2+z^2+5$，$v_y=y^2+z^2$

(4) $v_x=xyzt$，$v_y=-xyzt^2$

式中 a，b，c 为常数。设 $z=0$ 处，$v_z=0$，试求速度 v_z。

3－23 设二维不可压缩流场速度分布为

(1) $v_x=K\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$，$v_y=K\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

(2) $v_x=Kt\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$，$v_y=2Kt\left[\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$

式中 K 为常数。试求加速度表达式。

3－24 设某二维流场速度分布为

$$v_x=xyt,\quad v_y=x+y+e^t+e^{-t}$$

试确定迹线方程和加速度。

3－25 已知某二维不可压缩流体恒定流场速度分量为

$$v_x=ax^2-bx+by$$

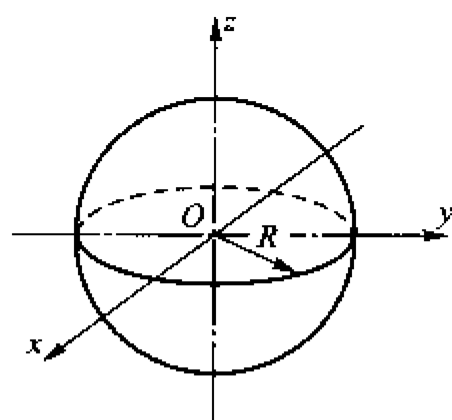
试求速度分量 v_y。

3－26 由空气预热器经过两条管道送往锅炉喷燃器的空气的质量流量 $q_m=8\,000$ kg/h，气温 400 ℃，管道截面尺寸均为 400×600 mm²。已知标准状态(0 ℃，101 325 Pa)下空气密度 $\rho_0=1.29$ kg/m³，求输气管道中空气的平均流速。

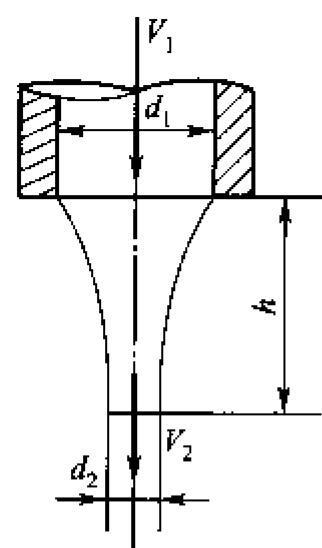
3－27 流体穿过半径 $R=0.5$ m 的球面流出，球面上各点垂直于球面的流速分量为 $v=2$ m/s，试求流量 q_V。并求经过 10 秒流出的流体体积 V。

3－28 有油流从垂直安放的圆管口流出(如图)，如管径 $d_1=10$ cm，管口平均流速为 $V_1=1.4$ m/s，若管口下方 $h=1.5$ m 处的流速 $V_2=5.6$ m/s，求该处油柱的直径 d_2。

3－29 如图所示，直径为 $d=46$ mm 的柱塞在与它同心、直径为 $D=50$ mm 的油缸中移动，移动速度 $V_1=75$ mm/s。油缸内充满油液。求环形缝隙中油液的流速 V_2。

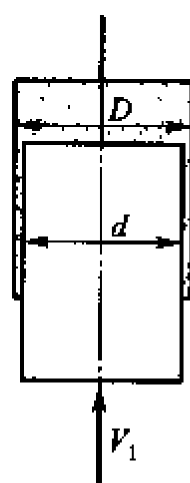


题 3－27 图

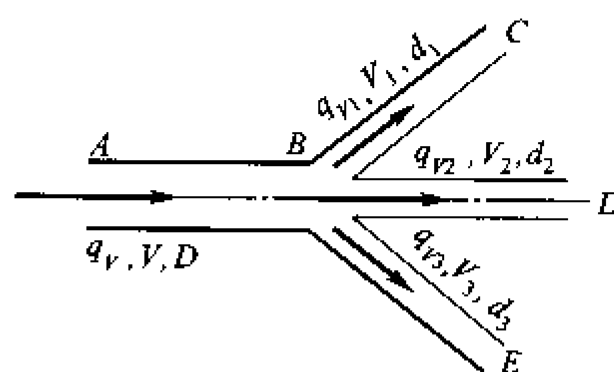


题 3－28 图

3－30　如图所示水平放置水的分支管路，已知 $D=100$ mm，$q_V=15$ l/s，$d_1=d_2=25$ mm，$d_3=50$ mm，$q_{V1}=3q_{V3}$，$V_2=4$ m/s。求 q_{V1}，q_{V2}，q_{V3}，V_1，V_3。



题 3－29 图



题 3－30 图

第4章

理想流体动力学基础

流体运动学只研究流体运动本身，如运动速度、加速度等参数，不涉及这些运动量与力之间的关系，因而既适用于理想流体，也适用于粘性流体。理想流体动力学，研究流体运动参量与所受的力和动量之间的关系，讨论的流体介质是无粘性的理想流体。

工程实际中的流体是有粘性的，并不存在理想流体。但在很多情况下，流体的粘滞力的作用与其它力相比较很小，可以忽略。这样，将使流体动力学的研究大为简化，容易得到流体运动的基本规律。这样做不仅对解决工程中的流体运动规律有普遍指导意义，而且对解决某些可以忽略粘性的流体运动问题有实际意义。

本章将首先用微元体积法导出理想流体欧拉运动微分方程，然后变换成力学意义更为明显的葛罗米柯形式，并在特殊条件下积分得到能量关系式。

§4-1　理想流体运动微分方程式

理想流体运动微分方程式是研究流体运动的基本微分方程式，它是在牛顿第二定律基础上推导得到的。

在流场中，取一个平行六面体微元，边长为 dx，dy，dz，如图4-1所示。在某瞬时 t，中心点 A (x,y,z)处的压强为 p (x,y,z,t)，流体的密度为 ρ (x,y,z,t)。因为是理想流体，六面体所有表面上仅作用有法线方向的压强，微元中心 A 点的速度为 v_x,v_y,v_z。

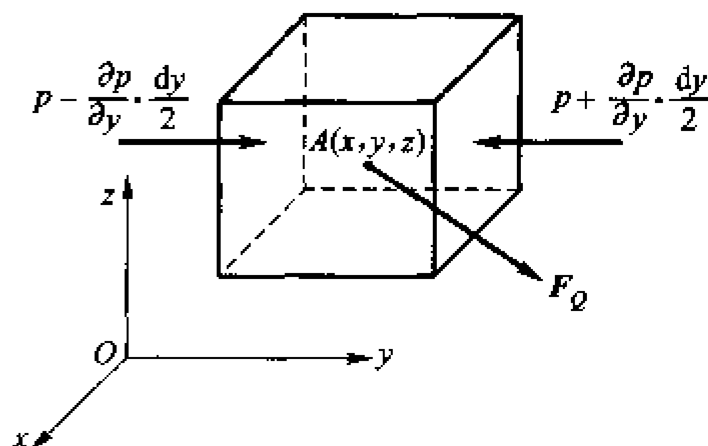


图　4-1

与 y 轴垂直的两个面上作用的表

面力如图所示，$\dfrac{\partial p}{\partial y}$是压强沿 y 轴的变化率。

作用在微元平行六面体上的质量力 $\boldsymbol{F}_Q$，在三个坐标轴方向的投影为

$$\left.\begin{aligned} F_{Qx} &= f_x\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ F_{Qy} &= f_y\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ F_{Qz} &= f_z\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

f_x，f_y，f_z 分别为单位质量力在 x，y，z 方向的投影。

在表面力和质量力作用下，六面体流体微元产生加速度 a，由牛顿第二定律

$$\sum F_y = ma_y$$

有

$$\left(\rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

方程两边除以微元六面体的质量 $\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 得到单位质量流体运动规律的数学表达式

$$f_y - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

同理可推得 x，z 方向上表达式，于是有

$$\left.\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

其向量表达式为

$$\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{4-2}$$

式(4-1)可以写成下面形式

$$\left.\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

向量表达式为

$$\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\ \nabla)\boldsymbol{v} \tag{4-4}$$

式(4-3)就是理想流体运动微分方程式，它表达了作用在单位质量流体上

的力与流体运动加速度之间的关系，它是从动力学角度考虑必须满足的条件，是流体动力学的基本方程式。此方程由欧拉首先推出，故又称为**欧拉运动微分方程**。方程推导过程中对流体密度 ρ 未加限制，因此式(4－3)对不可压缩和可压缩流体都适用。

若$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=0$，方程(4－3)变为流体平衡微分方程式(2－2)，所以流体平衡微分方程是流体运动方程的特例。

式(4－3)中，单位质量力 f_x，f_y，f_z 通常是已知的，三个方程，五个未知数 v_x，v_y，v_z，p，ρ 不能解，需要与连续方程等联立求解。

对不可压缩流体，$\rho=$常数，联立连续方程，方程组封闭可解。

对可压缩流体，$\rho=f(p,T)$，这时，连续方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$$

状态方程

$$\frac{p}{\rho}=RT$$

式中：R 为气体常数、T 为绝对温度。对于密度只与压强有关，而与温度无关的**正压流体**，$\rho=f(p)$，方程组在理论上可解。但即使是这样，由于一般情况下的运动边界条件和起始条件难以用数学表达式给出，解析计算仍然十分困难。

为了求解方程，常将方程进行某些变换，并在工程允许的条件下，作一些特殊的限制。

§4－2 运动微分方程式的葛罗米柯－兰姆形式

因为流体运动速度 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$

所以

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)\\&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial z}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

将式(4-3)的两边分别减去上式，得

$$\left.\begin{aligned} &f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)-\\ &\qquad v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial v_x}{\partial t}+2\omega_y v_z-2\omega_z v_y\\ &f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial v_y}{\partial t}+2\omega_z v_x-2\omega_x v_z\\ &f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial v_z}{\partial t}+2\omega_x v_y-2\omega_y v_x \end{aligned}\right\} \tag{4-5}$$

方程的向量表达式为

$$\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\textbf{gard}\ p-\textbf{gard}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{4-6}$$

为了便于求解方程，对作用于流体的质量力和流体本身的性质作一些限制性的假设。

(1) 假设作用于流体上的质量力是有势力。则必存在力函数 $U(x,y,z,t)$，且有

$$f_x=\frac{\partial U}{\partial x},\ f_y=\frac{\partial U}{\partial y},\ f_z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

(2) 假设密度只是压力的函数，即 $\rho=f(p)$。为了计算方便，引入由下式定义的压力函数 $P(x,y,z,t)$

$$P=\int\frac{\mathrm{d}p}{f(p)} \tag{4-7}$$

对上式微分有

$$\mathrm{d}P=\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p$$

将式中的全微分展开

$$\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial P}{\partial t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t$$

因为 dx，dy，dz 都是任意的，故有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

对于不可压缩流体，ρ = 常数，则

$$P=\frac{1}{\rho}p$$

对于等温变化($T=T_0$)的可压缩流体，$p/\rho=RT_0=C$，则

$$P=\int\frac{C\mathrm{d}p}{\rho}=C\ln p$$

对于等熵变化的可压缩流体，$p/\rho^{\kappa}=c$

则

$$P=\int\left(\frac{C}{p}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}p=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}$$

在上述假设条件下，方程(4－5)变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+2\,(\omega_y v_z-\omega_z v_y)\\\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_y}{\partial t}+2\,(\omega_z v_x-\omega_x v_z)\\\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_z}{\partial t}+2\,(\omega_x v_y-\omega_y v_x)\end{aligned}\right\}\tag{4-8}$$

方程组可以用行列式表示为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+2\begin{vmatrix}\omega_y&\omega_z\\v_y&v_z\end{vmatrix}\\\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_y}{\partial t}+2\begin{vmatrix}\omega_z&\omega_x\\v_z&v_x\end{vmatrix}\\\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_z}{\partial t}+2\begin{vmatrix}\omega_x&\omega_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{4-9}$$

式(4－8)和(4－9)就是葛罗米柯－兰姆(Gromeco-Lamb，1849—1934)形式的理想流体运动方程式，它实质上与欧拉运动微分方程相同，差别仅在于形式上的改变，而且在变换过程中，附加了两个限制条件。

但是，葛罗米柯－兰姆方程十分清楚地显示了流体微元运动的速度分量，因而可以从方程中直接区分性质完全不同的有旋与有势流动，这样，就能更方便地分析流动的性质，容易看出在何种情况下可以积分，使方程更为实用。

§4－3 恒定有旋运动中沿流线的伯努利积分

理想流体运动微分方程，只在几种特殊的条件下才能积分求解，恒定流动的**伯努利积分**和非恒定有势流动的拉格朗日积分是其中典型的两种。这里引入

了如下的假设限制条件：

(1) 流体是理想的，流体作恒定流动；

(2) 作用在流体上的质量力有势；

(3) 流体的密度只与压力有关，为正压流体；

(4) 沿流线积分。

由限制条件(1)，流动恒定，有

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

葛罗米柯方程本身已包含了条件(2)和(3)。于是，葛罗米柯－兰姆方程变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_y v_z-\omega_z v_y)\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_z v_x-\omega_x v_z)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)&=2(\omega_x v_y-\omega_y v_x)\end{aligned}\right\}\qquad(4-10)$$

对于恒定流动，流线和迹线重合，因此，条件(4)沿流线积分就是沿迹线积分。流体质点沿流线运动时，有 $dl=v dt$（见图 4-2）。

因为 dx，dy，dz 不是任意的坐标分量，而是沿某一流线的坐标增量，所以有

$$dx=v_x dt,$$
$$dy=v_y dt,$$
$$dz=v_z dt$$

将方程组(4-10)的各式左边分别乘 dx，dy，dz，右边分别乘 $v_x dt$，$v_y dt$，$v_z dt$，然后相加，方程右边之和为零，于是

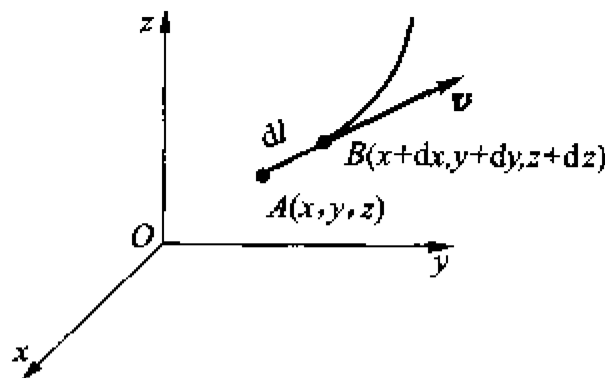


图 4-2

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)dz=0$$

恒定流动各运动参数与时间 t 无关，因此

$$d\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)=0$$

积分得到

$$U-P-\frac{v^2}{2}=c_1\qquad(4-11)$$

式(4-11)就是伯努利积分。只要理想流体在有势质量力作用下作恒定流

动，无论流体运动有旋或有势，沿同一流线上任意各点单位质量流体的**势能**、**压力能**和**动能**之和为一常数。方程中的常数 c_1 对不同流线有不同的数值，式中有势质量力不同，将会有不同的伯努利方程形式。

§4－4 非恒定有势运动中的拉格朗日积分

假设流体所受的质量力有势，流体的密度只与压力有关，且流体作无旋运动。

因为流体作无旋运动，即

$$\omega_x = 0,\ \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z};$$

$$\omega_y = 0,\ \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x};$$

$$\omega_z = 0,\ \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

运动无旋，存在速度势函数 φ（φ 在第六章详述），有

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

因为导数值与求导的顺序无关，得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)
\end{aligned}\right\}$$

将上述代入式(4－8)得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(U - P - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(U - P - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(U - P - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0
\end{aligned}\right\}$$

式中 U，P，v，φ，都是 x，y，z，t 的函数，但是三个公式分别对 x，

y，z的偏导数等于零，说明其各项之和

$\left(U-P-\frac{v^2}{2}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$与$x$，$y$，$z$无关，只可能是时间$t$的函数，即

$$U-P-\frac{v^2}{2}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f(t) \tag{4-12}$$

上式称为拉格朗日积分(或柯西积分)，$f(t)$是由问题条件决定的时间t的函数。

不可压缩流体作非恒定无旋运动，上式变为

$$U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f_1(t) \tag{4-13}$$

若不可压缩流体作恒定无旋运动，表示各物理量不仅与x，y，z无关，而且与时间t无关，$f(t)$只能是一个常数，即

$$U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}=C \tag{4-14}$$

公式中的常数C与伯努利积分中的常数C_1不同。常数C对整个流场中的所有各点都相同，即对于正压性理想流体，不论可否压缩，只要在有势质量力作用下**作恒定有势流动**，运动场中的任何一个流体微元的三项能量之和等于常数。常数C_1则适用于流体的有旋运动，只对同一条流线上的各点才保持相同的数值。

§4－5 重力作用下的伯努利方程

伯努利积分和拉格朗日积分在不可压缩流体作恒定流动时，具有相同形式

$$U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}=C$$

但是，两个积分具有不同的适用条件。

若作用在流体上的质量力只有重力，即$f_x=0$，$f_y=0$，$f_z=-g$，则力势函数$U=-gz$，于是，积分变为

$$-gz-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}=C$$

或

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=C \tag{4-15}$$

这是重力作用下(绝对运动)，理想不可压缩流体恒定流动伯努利方程，对有旋流场，仅沿流线适用，而在有势流动情况下，则对整个流场都适用。

伯努利方程本身很简单，但却是流体力学中十分重要的基本方程之一，应

用中必须注意下列假设限制条件：

(1) 理想流体；

(2) 流体不可压缩；

(3) 恒定流动；

(4) 作用于流体上的质量力仅有重力；

(5) 对有旋运动，仅适用于同一流线；对无旋运动，整个流场都适用。

§4-6 伯努利方程的意义

重力作用下，不可压缩理想流体恒定流动的伯努利方程为

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=C$$

1. 几何意义

伯努利方程每一项的量纲与长度相同，它表示**单位重力流体**所具有的**水头**。

(1) z——表示所研究点相对某一基准面的几何高度，称为位置水头；

(2) $\frac{p}{\rho g}$——表示所研究点处压强大小的高度，因它具有长度因次，所以表示与该压强相当的液柱高度，称之为**测压管高度**，或称为**测压管水头**；

(3) $\frac{v^2}{2g}$——表示所研究点处速度大小的高度，也具有长度因次，所以称为**测速管高度**，或称为**速度水头**。

因此，伯努利方程表明对重力作用下的理想流体恒定流动，几何高度、测压管高度和测速管高度之和为一常数，称为水力高度或总水头。如果流动无旋，流场中任意各点的三项之和相等，因此，连接所有三项之和的各点，为一相对某一基准面的水平面。如果流动有旋，则沿同一条流线上各点的三项之和连线为一水平线，不同的流线上各点具有不同的水力高度。

在流体静力学中，$z+\frac{p}{\rho g}=C$，但是在流体动力学中，由于流速的存在，测压管水头线不再是一条水平线，它随各点流动速度面变，可能上升，也可能下降。

2. 能量意义

伯努利方程的每一项表示单位重力流体具有的能量。

z——单位重力流体对某一基准面具有的位置势能。

$\frac{p}{\rho g}$——单位重力流体具有的压力能，即由于流体压强的存在，可以使流体上升至一定高度，称为压力位能。因此，流体的压强实际上是一种潜在的能量。

$\frac{v^2}{2g}$——单位重力流体具有的动能。

$z+\frac{p}{\rho g}$——表示单位重力流体具有的总位能。

$\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}\right)$——表示单位重力流体具有的位能和动能之和，称为总机械能。

因此，式(4-16)表示单位重力流体的总机械能为一常数。对于有旋流动，同一条流线上各点的单位重力流体的总机械能相同，不同的流线上的流体，具有不同的总机械能。如果流动无旋，则对流场的任意各点，单位重力流体的总机械能均相同。

但是，位能、压力能和动能既然是一种能量，就可以相互转换。流速变小时，动能转变为压力能，压力能将增加；反之，压力能亦可转变为动能。对于理想流体恒定流动，三项能量之和为一常数，表示任意一个流体微元运动过程中的位能、压力能和动能之和保持不变。因此，对于理想流体，伯努利方程又是流体力学中的**能量守恒定律**。

§4-7 相对运动中的伯努利方程

流体在很多流体机械中的流动，例如在水泵、风机和水轮机中的流动，常常不是绝对恒定流动，而是以相对恒定流动出现。

如图4-3所示，叶轮以恒定角速度 ω 旋转。若将直角坐标系 Oxy 固定在叶轮上，与叶轮一起作同步旋转运动，则坐标系相对于地球作等速旋转运动。这时，若人站在叶轮上观察流体流动，得到液体质点相对于叶片作相对恒定流动。

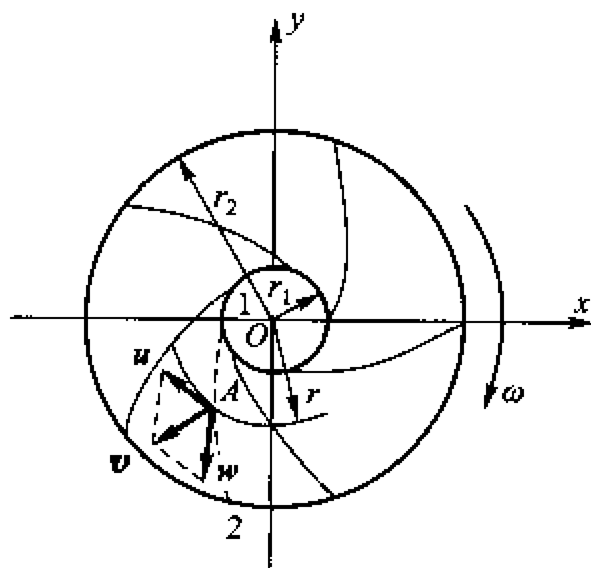


图 4-3

这种运动与上述的绝对运动不同之处在于：

(1) 人观察到的是流体质点的**相对速**

度，而不是绝对速度；

(2) 作用于流体上的质量力除重力外，还受到**离心力**的作用。

若取流线 1－2，流体沿 1－2 流动。因为流动恒定，所以 1－2 就是流体质点运动的迹线。这时，流线上的流体质点 A，一方面跟随叶轮以速度 $u=\omega r$ 作牵连运动，同时，又对圆盘以速度 w 作相对运动。因此，伯努利积分为

$$U-P-\frac{v^2}{2}=C$$

当坐标系固定在叶轮上时，式中 $v=w$。

单位质量流体质点上作用的离心力为 $\omega^2 r$，于是

$$f_x=\omega^2 x,\ f_y=\omega^2 y,\ f_z=-g$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U&=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z\\&=\omega^2 x\mathrm{d}x+\omega^2 y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z\\U&=\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz+C\\&=\frac{\omega^2r^2}{2}-gz+C\end{aligned}$$

伯努利积分变为

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz-P-\frac{w^2}{2}=C \tag{4-16}$$

对不可压缩流体 ρ 不变，压力函数

$$P=\frac{p}{\rho}$$

得到

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz-\frac{p}{\rho}-\frac{w^2}{2}=C \tag{4-17}$$

又因为流体质点跟随叶轮的**牵连速度** $u=wr$，若将各项除以 g，对单位重力流体有

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{w^2}{2g}-\frac{u^2}{2g}=C \tag{4-18}$$

对流线上的任意 1，2 两点，有

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{w_1^2}{2g}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g} \tag{4-19}$$

式(4－19)称为理想流体微小流束相对恒定流动伯努利方程式，与绝对运动伯努利方程比较，多了由于离心力引起的$\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}$项，它表示离心力对单位

质量液体所作的功。

工作轮转动中，每个液体质点将受离心力作用，方向从旋转轴向外。若流体质点运动时 r 不变，离心力不作功，r 值改变时，离心力作功。单位重力液体质点从 r_1 运动至 r_2 时，离心力作的功为

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{\omega^2 r\mathrm{d}r}{g}=\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}$$

若设

$$e_1=z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{w_1^2}{2g}$$

$$e_2=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g}$$

则有

$$e_2-e_1=\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}$$

当 $r_1<r_2$ 时，流体沿离心方向运动，离心力作正功，称为水泵工况。

当 $r_1>r_2$ 时，流体沿离心力反向运动，离心力作负功，这是典型的**水轮机工况**。

§4-8 非恒定有旋流动中的伯努利积分

假设流体正压，密度只是压强的函数，即 $\rho=f(p)$，且流体作非恒定有旋流动，有 $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\neq 0$，$\boldsymbol{\omega}\neq 0$，则葛罗米柯方程变为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial v_x}{\partial t}&=2(\omega_y v_z-\omega_z v_y)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial v_y}{\partial t}&=2(\omega_z v_x-\omega_x v_z)\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)-\frac{\partial v_z}{\partial t}&=2(\omega_x v_y-\omega_y v_x)
\end{aligned}\right\}$$

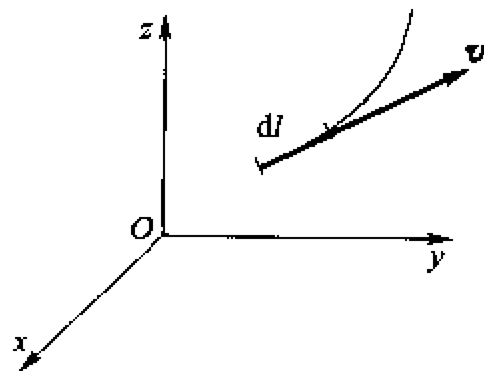


图 4-4

设在某瞬时 t，沿着流线取一微元线段 $\mathrm{d}l$（图 4-4），根据流线的特性有

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}l\cos(\mathrm{d}l,x)=\mathrm{d}l\cos(\boldsymbol{v},x)$$

所以

$$dx = dl\frac{v_x}{|v|}$$

同理

$$dy = dl\frac{v_y}{|v|}$$

$$dz = dl\frac{v_z}{|v|}$$

将葛罗米柯三个方程的左边分别乘以 dx，dy，dz，右边分别乘以 $v_x\frac{dl}{|v|}$，$v_y\frac{dl}{|v|}$，$v_z\frac{dl}{|v|}$，然后将三个方程相加，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)dz$$

$$=\frac{\partial v_x}{\partial t}dx+\frac{\partial v_y}{\partial t}dy+\frac{\partial v_z}{\partial t}dz$$

对于某个瞬时而言，方程中各项运动要素仅是坐标的函数。因此，方程的左端可写成全微分

$$d\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial v_x}{\partial t}dx+\frac{\partial v_y}{\partial t}dy+\frac{\partial v_z}{\partial t}dz$$

方程的右端作如下变换

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}dx+\frac{\partial v_y}{\partial t}dy+\frac{\partial v_z}{\partial t}dz=\frac{dl}{v}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{dl}{v}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right]=\frac{\partial v}{\partial t}dl$$

于是得到

$$d\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)=\frac{\partial v}{\partial t}dl$$

在该瞬时，上式沿流线从断面 1 到 2 积分

$$\int_1^2 d\left(U-P-\frac{v^2}{2}\right)=\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}dl$$

或

$$\left(U_2-P_2-\frac{v_2^2}{2}\right)-\left(U_1-P_1-\frac{v_1^2}{2}\right)=\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}dl \tag{4-20}$$

式中 U 为任意的有势质量力，若流体只受重力作用 $U=-gz$，并注意对不可压缩流体有 $P=\frac{p}{\rho}$，则对单位重力流体，上式可写成

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}dl \tag{4-21}$$

上式为不可压缩流体非恒定流动某瞬时沿微小流束的伯努利方程。与恒定流动伯努利方程的不同在于增加了 $h_j = \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl$ 项，它是由流动的非恒定性所造成，称为惯性能头，表示当地加速度$\frac{\partial v}{\partial t}$ 所具有的**惯性力**对单位重力流体所作的功。或单位质量流体由 1 断面向 2 断面流动时克服当地加速度惯性力作功所需的能量。

应用中注意 h_j 可以为正，也可以为负，由$\frac{\partial v}{\partial t}$决定。对于过流断面积不变的流束，沿流动方向在任意瞬时都有相同的当地加速度，即

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a$$

则

$$h_j = \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl = \frac{a}{g} l$$

所以式(4－21)变为

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{a}{g} l \tag{4-22}$$

式中 1－1 断面与 2－2 断面间流束长度为 $l = l_2 - l_1$。

例　题

例 4－1　理想不可压缩流体在重力作用下作恒定流动，已知速度分量为

$$v_x = -4x,\ v_y = 4y,\ v_z = 0$$

试求流体运动微分方程式。若坐标原点取在液流的自由表面上，求处于流体表面以下 1 m 深处点 A (2,2)的压强，设流体为 20 ℃的水，自由表面处压强 $p_0 = 9.81 \times 10^4$ Pa。

解　理想流体欧拉运动微分方程式为

$$\left.\begin{aligned}
f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\
f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\
f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}$$

根据已知条件，流体作恒定流动，$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$，速度分量 $v_z = 0$；流体所受质量力只有重力，$f_x = 0$，$f_y = 0$，$f_z = -g$。于是微分方程化为

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=-16x\\-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=16y\\-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=0\end{aligned}\right\}$$

将三个方程分别乘以 dx，dy，dz 后相加，得

$$-g\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p=-16x\mathrm{d}x+16y\mathrm{d}y$$

积分得

$$-gz-\frac{p}{\rho}=-8x^2+8y^2+C$$

由边界条件确定积分常数 C，当 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 时，$p=p_0$，所以 $C=-\frac{p_0}{\rho}$。

因此 $\frac{p}{\rho}=-gz+\frac{p_0}{\rho}+8x^2-8y^2$

即 $p=p_0-\rho(-8x^2+8y^2-gz)$

对 20 ℃的水，查表得 $\rho=993.23\ \mathrm{kg/m^3}$，所以，在点 $A(2,2,1)$ 有

$$p_A=10.78\times10^4\ \mathrm{Pa}$$

例 4－2　20 ℃的水通过虹吸管从水箱吸至 B 点。虹吸管直径 $d_1=60$ mm，出口 B 处喷嘴直径 $d_2=30$ mm。当 $h_1=2$ m、$h_2=4$ m 时，在不计水头损失条件下，试求流量和 C 点的压强。

解　以 2－2 断面为基准，对 1－1 和 2－2 断面列伯努利方程，用计示压强计算时，有

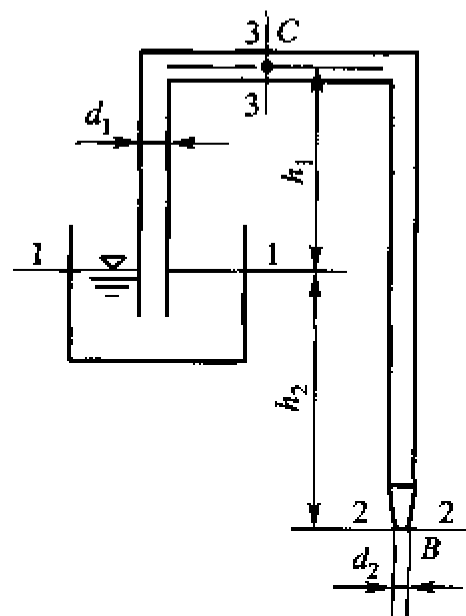
$$h_2+0+\frac{v_1^2}{2g}=0+0+\frac{v_2^2}{2g}$$

式中 $v_1\approx0$，于是

$$v_2=\sqrt{2gh_2}=8.86\ \mathrm{m/s}$$

因此，通过虹吸管的流量为

$$Q=v_2\frac{\pi d_2^3}{4}=0.006\ 26\ \mathrm{m^3/s}$$



例 4－2 图

为求 C 点压强，以 2－2 为基准，对 3－3 和 2－2 断面列伯努利方程

$$(h_1+h_2)+\frac{p_C}{\rho g}+\frac{v_3^2}{2g}=0+0+\frac{v_2^2}{2g}$$

由连续性方程得

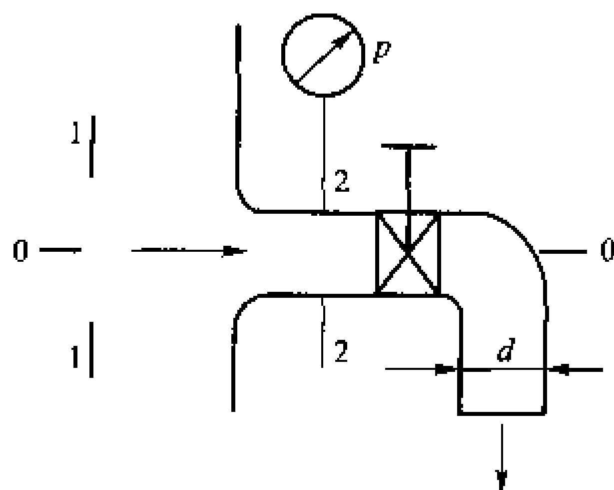
$$v_3 = v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 2.215\ \text{m/s}$$

所以

$$p_C = \left[\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}\right) - (h_1 + h_2)\right]\rho g = -22\ 024.3\ \text{Pa}$$

负号表示 C 处的压强低于一个大气压，处于真空状态。正是由于这一真空，才可将水箱中的水吸起 h_1 的高度。

例 4－3　图示一自来水龙头将水从水箱中放出，设水龙头直径 $d = 12$ mm，图示压力表当水龙头关闭时读数为 $p = 0.28$ MPa，打开水龙头后读数为 $p' = 0.06$ MPa，求自来水龙头流出的流量，不计损失。



例 4－3 图

解　不计损失，可采用理想流体能量方程。以水龙头接出管中心线 0－0 为基准，对水箱中假想断面 1－1（如图示）和压力表安装断面 2－2 列能量方程得

$$0 + \frac{p}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p'}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

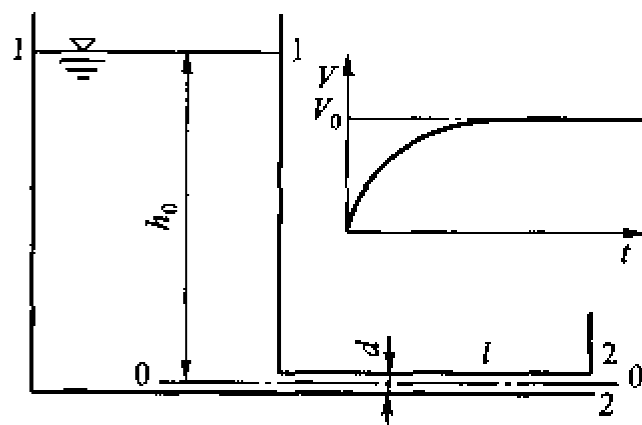
解得

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p - p')}$$

于是流量为

$$q_V = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p - p')} \approx 2.37 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

例 4－4　一长为 l 直径为 d 的等径直管连于大水箱底部如图所示。设作用水头为 h_0。不计流体粘度，试确定管端闸门突然全部开放时起到管内流动达到恒定过程中管内流速和时间的函数关系，并计算过渡过程所需的时间和过渡过程中流出的流体体积。



例 4－4 图

解　由题意不计粘性而且为水平放置的等径直管，可选用理想流体非恒定

流动的能量方程式(4 - 22)，对某瞬时有 $a = dv/dt$。以管轴线 0 - 0 为基准，对自由液面 1 - 1 和管端 2 - 2 列方程得

$$h_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g}\frac{dv}{dt}$$

设达到恒定流动后有

$$h_0 = v_0^2/(2g)$$

则

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{l}{g}\frac{gdv}{dt}$$

由此

$$dt = \frac{2l dv}{v_0^2 - v^2}$$

积分得

$$t = \frac{l}{v_0}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v} + C$$

由 $t = 0$ 时，$v = 0$ 定得 $C = 0$，所以

$$t = \frac{l}{v_0}\ln\frac{v_0 + v}{v_0 - v}$$

由上式解得

$$v = v_0\frac{e^{\frac{t}{t_0}} - 1}{e^{\frac{t}{t_0}} + 1} = v_0 \text{th}\frac{t}{2t_0}$$

式中

$$t_0 = \frac{l}{v_0} = \frac{lv_0}{2g}$$

上式即为 $v = f(t)$ 的函数关系，如图中右上曲线所示。

若以 $v = 0.96v_0$ 为达到基本恒定的标准，则由 $v = f(t)$ 可得过渡过程所需时间为 $t = 4t_0$。于是，过渡过程流出的流体体积为

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_0^{4t_0}\frac{\pi d^2}{4}Vdt = \frac{\pi d^2}{4}v_0\int_0^{4t_0}\text{th}\frac{t}{2t_0}dt \\ &= \frac{\pi d^2}{2}v_0 t_0 \ln\left(\text{ch}\frac{t}{2t_0}\right)\Big|_0^{4t_0} = \frac{\pi d^2}{4}v_0 t_0 \ln(\text{ch }2) \\ &\approx 2.08d^2 v_0 t_0 \end{aligned}$$

习　题

4－1 伯努利方程中 $z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}$ 表示：(a)单位重力流体具有的机械能；(b) 单位质量流体具有的机械能；(c) 单位体积流体具有的机械能；(d) 通过过流断面流体的总机械能。

4－2 水平放置的渐扩管，如忽略水头损失，断面形心点的压强，有以下关系：(a) $p_1>p_2$；(b) $p_1=p_2$；(c) $p_1<p_2$。

4－3 试比较静止流体平衡微分方程和欧拉运动微分方程的推导过程，从而说明微分体积法的应用特点。

4－4 试比较并说明伯努利积分和拉格朗日积分的不同积分条件。并根据方程中每一项的几何意义和物理意义，说明两个积分常数有何不同？

4－5 已知不可压缩理想流体的流动速度分量如下

$$v_x=ay,\ v_y=bx,\ v_z=0$$

求等压面(即 $p=\text{const}$)方程(不计质量力)。

4－6 不可压缩理想流体作圆周运动。当 $r\leqslant a$ 时，速度分量为

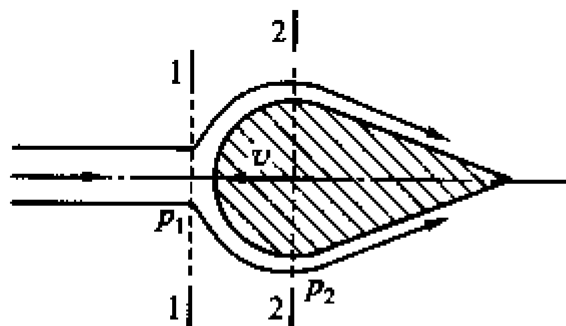
$$v_x=-\omega y,\ v_y=\omega x,\ v_z=0$$

当 $r\geqslant a$ 时，速度分量为

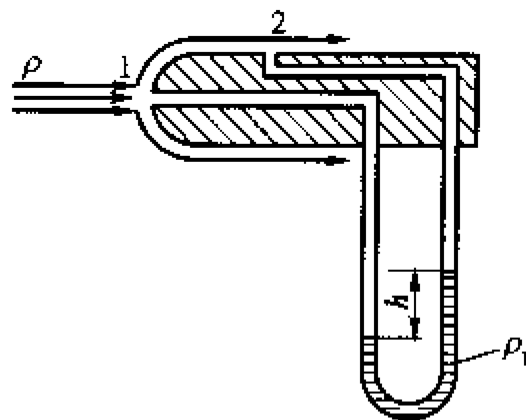
$$v_x=-\omega a^2\frac{y}{r^2},\ v_y=\omega a^2\frac{x}{r^2},\ v_z=0$$

式中 $r^2=x^2+y^2$，设无穷远处的压强为 p_∞，不计质量力。试求压强分布规律。并讨论之。

4－7 如图所示，轴对称回转体在静止流体($\rho=10^3\ \text{kg/m}^3$)中运动，运动速度 $v=36$ km/h。已知 2－2 截面处流体的相对速度为物体运动速度的 2 倍，1－1 处压强为 $p_1=19.6\times10^4$ Pa。若不计摩阻及重力，试求侧面 2 截面处的压强 p_2。



题 4－7 图



题 4－8 图

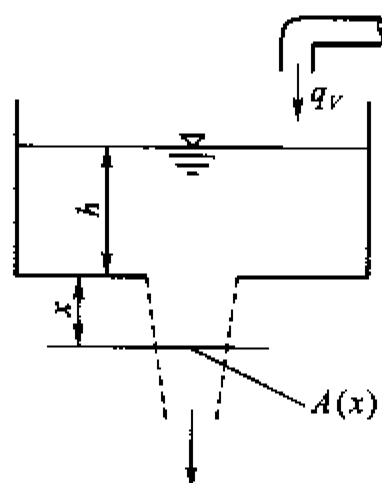
4－8 测量流速的皮托管如图所示，设被测流体密度为 ρ，测压管内液体密度为 ρ_1，

测压管中液面高差为 h，试证明所测流速

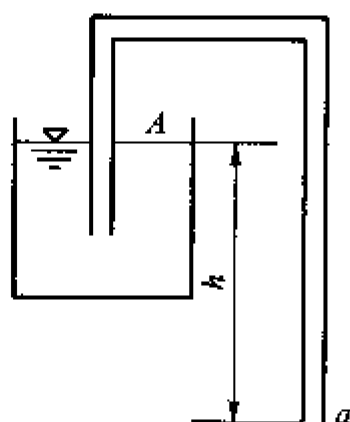
$$v=\sqrt{2hg(\rho_1-\rho)/\rho}$$

4-9 一水箱底部有一个小孔，射流的截面积为 $A(x)$，在小孔处 $x=0$，截面积为 A_0，通过不断注水使水箱中水位 h 保持常数，水箱横截面远比小孔大。设流体是理想不可压缩的，求射流截面积随 x 变化的规律 $A(x)$。

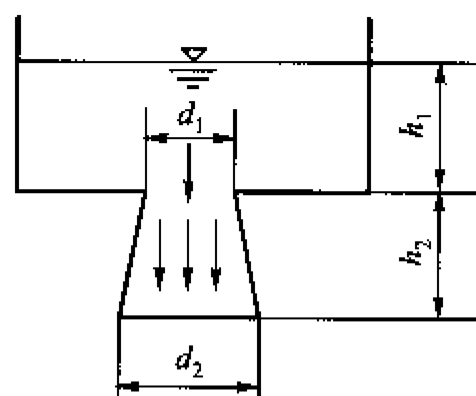
4-10 一虹吸管放于水桶中(如图)，水管出口离桶中液面高为 h，若水桶及虹吸管的截面积分别为 A 和 a，且 $A\gg a$，试计算虹吸管的流量。水看作理想不可压缩，且受重力作用，运动恒定。



题 4-9 图



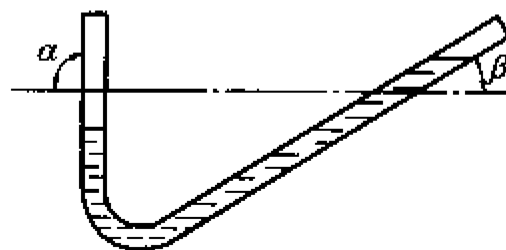
题 4-10 图



题 4-11 图

4-11 水沿着圆形扩大管自容器出流到大气中(压强为 p_0)，设扩大管小端和大端直径分别为 d_1 和 d_2，长为 h_2，问 h_1 为多少时扩大管小端处的绝对压强为零？

4-12 求重力作用下的理想不可压流体在开口等径曲管中振动的运动规律。设管中液柱长 l，α，β 为曲管两端与水平线之间的夹角，振动从平衡位置开始。



题 4-12 图

4-13 水流过图示管路，已知 $p_1=p_2$，$d_1=300$ mm，$v_1=6$ m/s，$h=3$ m。不计损失，求 d_2。

4-14 图示真空吸水装置。在下述情况下：

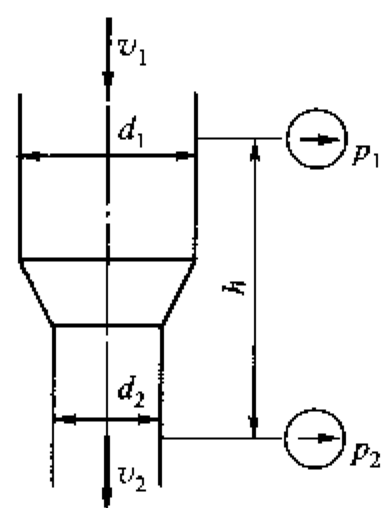
(1) M 断面产生负压时；(2) C 中的水被吸入时。试求断面积之比 A/a 与水头的关系。

4-15 图示虹吸出流管直径 $D=100$ mm，喷嘴出口直径 $d=30$ mm。图示各部尺寸为 $h_1=4$ m，$h_2=5$ m，$h_3=1$ m。不计损失，求管中 A，B，C 各点的压力。

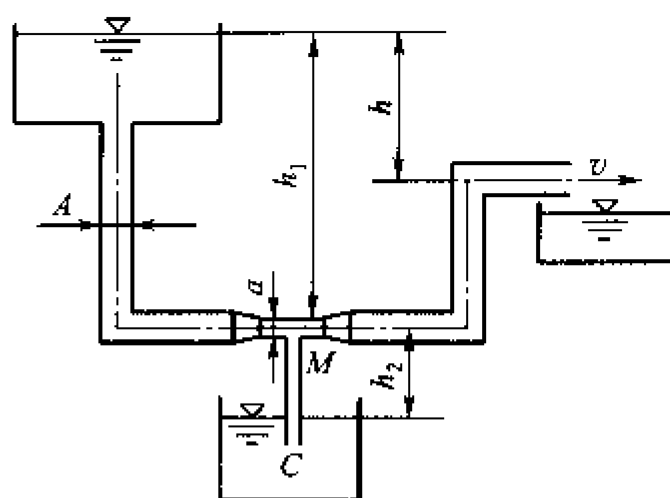
4-16 图示射流装置，水位高 $h=40$ m，欲使二孔射流交点位于和水箱底同一水平面且相距水箱 $a=20$ m 处，求二孔位置 h_1，h_2 应为多高？不计流动损失。

4-17 图示引风机入口喉部直径 $D=300$ mm，吸入空气相对密度 $d=0.001\,3$，求当测压水柱高 $h=300$ mm 时空气的流量为多少？

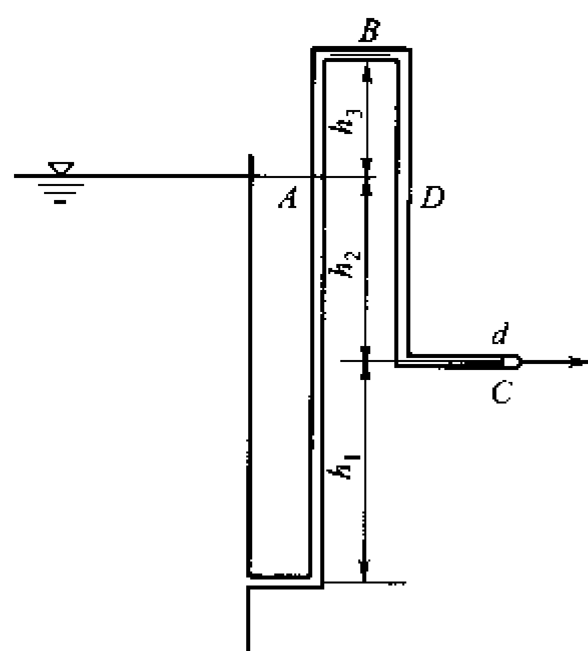
4-18 图示喷管出口直径 $d=50$ mm，喷出射流高度 $h_1=6$ m，此处侧压管水柱高 $h_2=9$ m，试计算流量和喷管倾角 α。



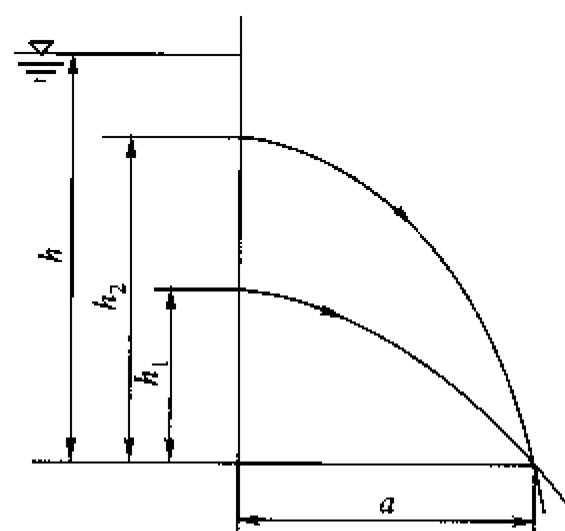
题 4－13 图



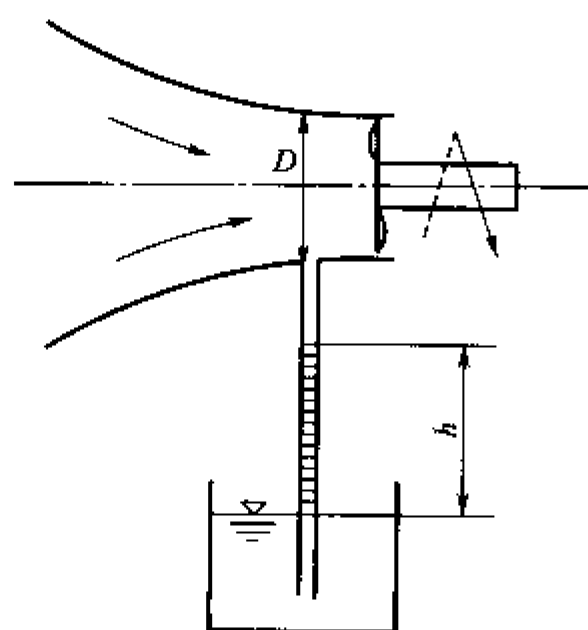
题 4－14 图



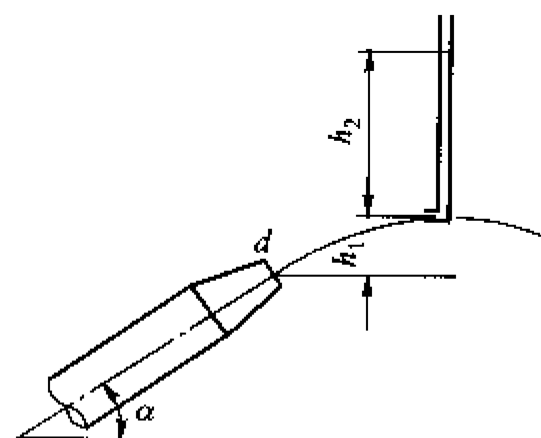
题 4－15 图



题 4－16 图

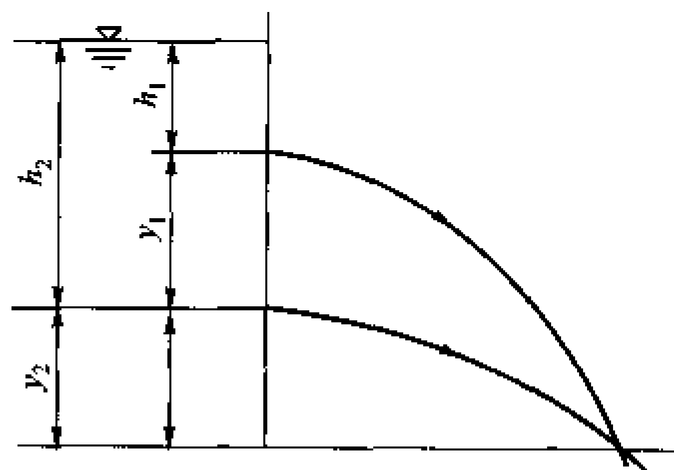


题 4－17 图



题 4－18 图

4-19 图示两小孔出流装置，试证明不计流动损失时有关系式 $h_1 y_1 = h_2 y_2$。



题 4-19 图

4-20 若平原河流有弯曲段，试证明：河湾内侧岸边 A 处的水流速度大于外侧岸边 B 处的水流速度，而 A 处水面低于 B 处。认为流体理想不可压缩，且流动为二维恒定无旋。

第5章

旋涡理论基础

由流体微元运动速度分解得到，任何流体微元的运动由平移、变形和旋转三部分组成。流体微元的平均旋转角速度为

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$$

即

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}$$

若 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$，称为无旋运动或有势运动。若 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$，就为有旋运动或旋涡运动。在自然界中，龙卷风、旋风、水流过桥墩时的旋涡等，都是旋涡运动。

本章讲述理想流体有旋运动的理论基础，重点是速度环量，及表征环量和旋涡强度间关系的斯托克斯定理。

§5-1 涡线、涡管、涡束和旋涡强度

涡线是在某瞬时涡量场中所作的一条空间曲线，在该瞬间，位于涡线上的所有流体质点的旋转角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 均与该线相切。因此，涡线是给定瞬时曲线上所有流体质点的转动轴线(图5-1)。

学习中应注意涡线的瞬时性，涡线的形状及在空间的位置都随时间而不断变化。但在恒定流动中，涡线的形状保持不变。

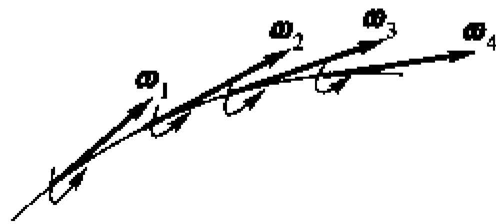


图 5-1

一般情况下，涡线与流线不重合，而与流线相交。与流线方程类同，可以得到**涡线微分方程**

$$\frac{dx}{\omega_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{\omega_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{\omega_z(x,y,z,t)} \tag{5-1}$$

显然，由于涡线的瞬时性，t 应该是涡线方程的一个参变量。

给定瞬时，在涡量场中，过任意封闭围线(不是涡线)上各点，作涡线所形成的管状表面，称为**涡管**。若涡管中充满着旋转运动的流体质点，就称为**涡束**。

旋转角速度 ω 沿涡束长度改变，但在微小涡束的每一个截面上，流体质点以同一角速度旋转。

旋涡在流场中对周围流体的影响，以及沿涡束的变化，决定于旋转角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 和涡束所包含流体的多少(用截面积 A 来表示)。

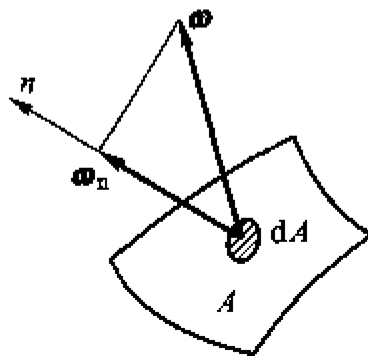


图 5-2

在涡量场中取一微元面积 dA（见图 5-2），dA 中流体质点的旋转角速度向量为 $\boldsymbol{\omega}$，n 为 dA 的法线方向，定义

$$dJ=\omega\cos(\boldsymbol{\omega},n)dA=\omega_n dA \tag{5-2}$$

称为任意微元面积 dA 上的**旋涡强度**。

任意面积 A 上的旋涡强度为

$$J=\iint_A \omega\cos(\boldsymbol{\omega},n)dA$$
$$=\iint_A \omega_n dA \tag{5-3}$$

如果面积 A 是涡束的某一横截面积，J 就称为涡束旋涡强度，它也是旋转角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的通量，称之为旋涡通量。旋涡强度不仅取决于 ω_n，而且取决于 A。

§5-2 速度环量、斯托克斯定理

流体质点的旋转角速度向量无法直接测量，所以旋涡强度不能直接计算。但是，旋涡强度与它周围的速度密切相关，旋涡强度愈大，即或者角速度愈大，或者涡束的截面积大，对周围流体速度的影响也就愈大。因此，这里引入与旋涡周围速度场有关的速度环量的概念，建立速度环量与旋涡强度之间的计算关系。这样，通过计算涡束周围的速度场，就可以得到旋涡强度。

假设某一瞬时 t，在流动空间中取任意曲线 AB（见图 5－3），在 AB 线上 M 点处取微元线段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，M 点处速度为 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的夹角为 α，则称

$$\mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}lv\cos\alpha = v_l\mathrm{d}l \tag{5-4}$$

为沿线段 $\mathrm{d}l$ 的速度环量。

于是，沿 AB 曲线的速度环量

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B v\cos\alpha\mathrm{d}l \tag{5-5}$$

沿任意封闭周线 L 的速度环量

$$\Gamma_L = \oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L v\cos\alpha\,\mathrm{d}l \tag{5-6}$$

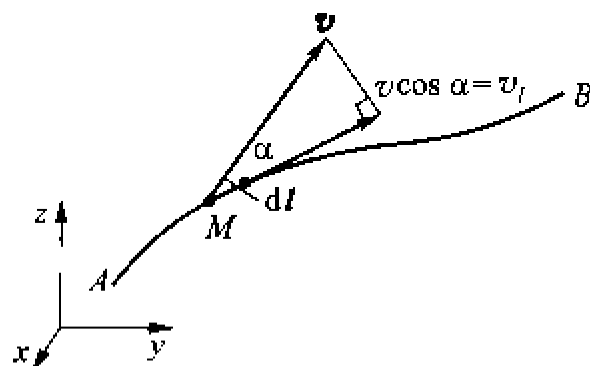


图 5－3

若 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在坐标轴上的投影，则

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y + v_z\mathrm{d}z$$

所以

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B (v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y + v_z\mathrm{d}z) \tag{5-7}$$

$$\Gamma_L = \oint_L (v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y + v_z\mathrm{d}z) \tag{5-8}$$

速度环量是个标量，我们规定积分线路采用逆时针方向，速度方向与积分线路方向同向(或锐角)时为正，反向时为负。

对非恒定流动，速度环量是一个瞬时的概念，应根据同一瞬时曲线上各点的速度计算，积分时 t 为参变数。

关于速度环量与旋涡强度的斯托克斯(Stokes)定理：沿任意封闭周线 L 的速度环量，等于穿过该周线所包围面积的旋涡强度的两倍，即

$$\Gamma_L = 2J = 2\iint_A \omega_n\mathrm{d}A \tag{5-9}$$

显然，如果周线上所有各点的速度与周线垂直，那么，沿该周线的速度环量等于零。

这一定理将旋涡强度与速度环量联系起来，给出了通过速度环量计算旋涡强度的方法。

下面首先证明沿微元封闭围线的斯托克斯定理，然后推广至有限大小的周线。

1. 无限小矩形面积的斯托克斯定理

流场中，在 Oxy 坐标平面上，取一微元矩形周线 $ABCD$（见图 5－4），四边分别平行坐标轴，对应两边分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$。矩形面积 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y$，设 A 点

处流体质点速度的坐标方向分量为 v_x，v_y。则根据泰勒级数展开，忽略高价微量，可以得到 B，C，D 各点处的速度分量如图 5-4 所示。因此，沿微元矩形周线的速度环量为

$$\mathrm{d}\Gamma_{ABCDA}=\mathrm{d}\Gamma_{AB}+\mathrm{d}\Gamma_{BC}+\mathrm{d}\Gamma_{CD}+\mathrm{d}\Gamma_{DA}$$

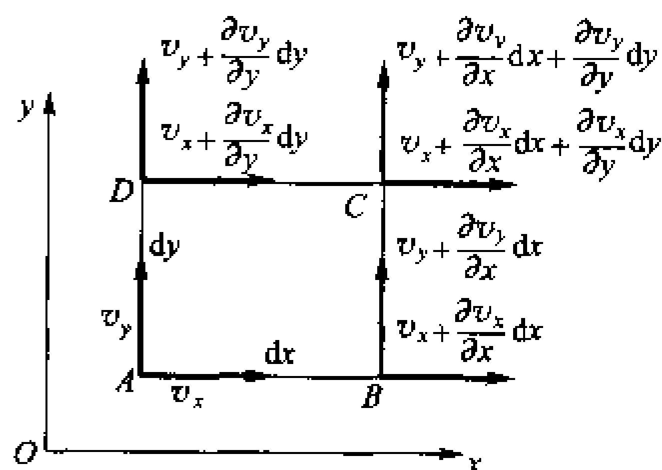


图 5-4

因为矩形无限微小，故沿各边求环量，可用始、端点速度的平均值计算，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Gamma_{ABCDA}=&\frac{1}{2}\left[v_x+\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left[\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right.\\&\left.+\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}y\\&-\frac{1}{2}\left[\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right.\\&\left.+\left(v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}x\\&-\frac{1}{2}\left[\left(v_y+\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+v_y\right]\mathrm{d}y\\=&\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&2\,\omega_z\mathrm{d}A\end{aligned}\tag{5-10}$$

所以

$$\mathrm{d}\Gamma_{ABCDA}=2\mathrm{d}J\tag{5-11}$$

可见，沿微小矩形周线的速度环量等于穿过这一周线所包围面积旋涡强度的两倍，证明了斯托克斯定理。

2. 有限面积单连通域的斯托克斯定理

现在将上面证得的结果推广到有限大周线围成的面积中去。

与数学中类似，存在单连通域和复连通域两种情况。如果周线区域内所作的任意的一条围线，都可以连续地收缩至一点而不越出边界，称为单连通域，

否则就称为复连通域。流体绕流任意形状固体时，包含固体在内的周线区域都是复连通域。

图 5-5 所示周线 L 中的面积，用两组互相垂直的直线，将该面积划分为无限多个微元矩形，对任意微元矩形都有

$$\mathrm{d}\Gamma_i = 2\omega_{ni}\mathrm{d}A_i$$

所以

$$\sum \mathrm{d}\Gamma_i = \sum 2\omega_{ni}\mathrm{d}A_i$$

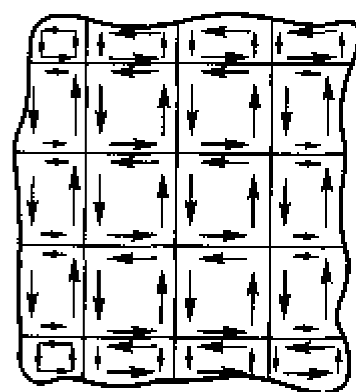


图 5-5

对任意一个微元矩形的内周界，都是二次计算速度环量，大小相等，方向相反，互相抵消，剩下的只有沿微元面积的外周界的环量之和，当微元矩形的数目趋于无限多时，其外周界之和就是封闭曲线 L，于是

$$\Gamma_L = \sum \mathrm{d}\Gamma_i = 2\iint_A \omega_n \mathrm{d}A \qquad (5-12)$$

这就是有限大小面积单连通域斯托克斯定理的表达式，沿任意有限大小单连通域周线上的速度环量，等于通过该周线所包围面积上旋涡强度代数和的二倍。

显然，这一结论很容易推广到任意空间曲面上，斯托克斯定理同样成立。

3. 有限面积复连通域的斯托克斯定理

当流体绕流某个不可穿透物体时，包围该物体的任意周线所围的区域是复连通域。自然界和工程中，如流体绕机翼、桥墩、电线等的流动，都是复连通域的情况。

图 5-6 所示为由围线包围一个二元物体所形成的复连通域，利用二根几乎重合的平行线 aa' 和 cc' 切开面积，得到由新围线 $abcc'b'a'a$ 所围成的单连通域。这样，就可以利用上面单连通域的斯托克斯定理，得到

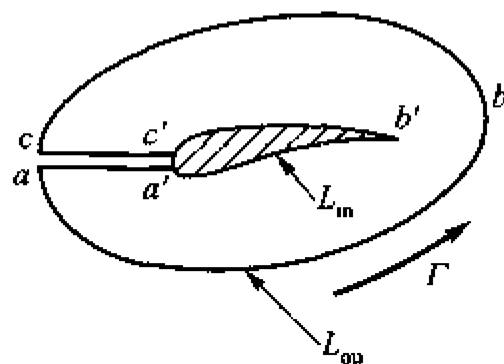


图 5-6

$$\Gamma_{abcc'b'a'a} = 2\iint_A \omega_n \mathrm{d}A$$

式中的 A 为由围线 abc 和物体周线 $a'b'c'$ 间所包围的面积，沿围线的速度环量按下式计算

$$\Gamma_{abcc'b'a'a} = \Gamma_{abc} + \Gamma_{cc'} + \Gamma_{c'b'a'} + \Gamma_{a'a}$$

因为

$$\Gamma_{cc'} = -\Gamma_{a'a}, \quad \Gamma_{abc} = \Gamma_{L_{ou}}, \quad \Gamma_{c'b'a'} = -\Gamma_{L_{in}}$$

所以

$$\Gamma_{L_{ou}} - \Gamma_{L_{in}} = 2\iint_A \omega_n \mathrm{d}A \tag{5-13}$$

由式(5-13)可以得出结论，对于复连通域，沿内外周线上的速度环量之差，等于通过此二周界所包围面积上旋涡强度代数和的两倍。通过上式，可以用环量来度量旋涡强度，并将面积分问题变为线积分求解。

如果在围线所包围面积中的流体运动无旋，有 $\omega_n = 0$，则得到

$$\Gamma_{L_{ou}} = \Gamma_{L_{in}}$$

即沿内外周界的速度环量相等。

应用斯托克斯定理，通过计算速度环量，可以决定封闭围线所包围的面积中全部旋涡的强度。

§5-3 速度环量保持不变的汤姆逊定理

汤姆逊(Thomson)定理：在有势质量力的作用下，在理想的正压性流体中，沿任何封闭流体围线的速度环量不随时间变化，即

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5-14}$$

现在证明这一定理。进行积分的封闭围线始终由相同的流体质点组成。在某瞬时 t，由流体质点组成封闭围线 L，这一围线跟随流体一起运动，经 $\mathrm{d}t$ 时间后，运动到新位置的封闭围线仍由这些流体质点组成(图 5-7)。

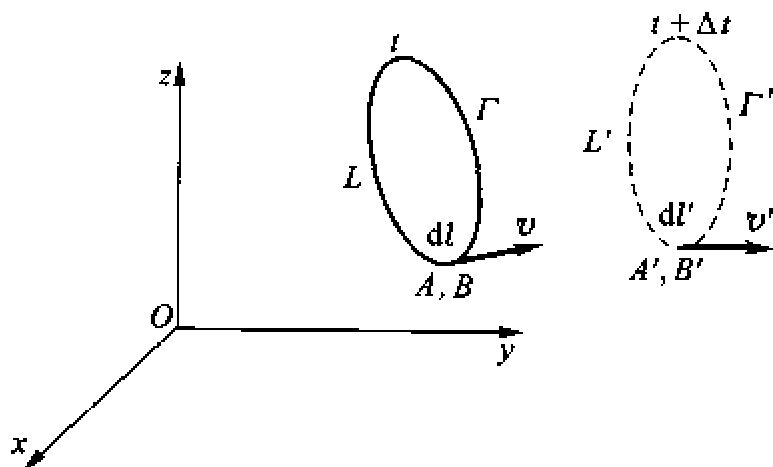


图 5-7

在瞬时 t，沿任意封闭围线 L 的速度环量为

$$\Gamma = \oint_L (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z)$$

环量随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z) \tag{5-15}$$

经 $\mathrm{d}t$ 时间，围线 L 运动至 L'，微元段 $\mathrm{d}l$ 变成 $\mathrm{d}l'$，因为始终由相同质点组成，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\mathrm{d}x)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+v_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x)$$

$\mathrm{d}x$ 为流体围线 L 上微元长度 $\mathrm{d}l$ 在 x 轴上的投影长度。由于 $\mathrm{d}l$ 的两个端点上速度的 x 轴向分量不等，运动过程中引起 $\mathrm{d}x$ 变化，因此，$\mathrm{d}x$ 对时间的全导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x)$ 表示 $\mathrm{d}x$ 长度随时间的变化速度，即表示线段 $\mathrm{d}l$ 的起点和终点速度 x 轴向分量 v_x 的差值。所以沿 $\mathrm{d}l$ 移动时分速度 v_x 的增量为 $\mathrm{d}v_x$，于是得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}v_x$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\mathrm{d}x)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}v_x$$

同理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_y\mathrm{d}y)=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+v_y\mathrm{d}v_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_z\mathrm{d}z)=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z+v_z\mathrm{d}v_z$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_L\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z\right)+\oint_L(v_x\mathrm{d}v_x+v_y\mathrm{d}v_y+v_z\mathrm{d}v_z)$$

对于理想流体，有欧拉运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

因为在有势质量力作用下有

$$f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z=\mathrm{d}U(x,y,z)$$

对于正压流体又有

$$P=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

且

$$v_x\mathrm{d}v_x+v_y\mathrm{d}v_y+v_z\mathrm{d}v_z=\mathrm{d}\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right)=\mathrm{d}\frac{v^2}{2}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\oint_L\mathrm{d}\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right)=\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right)\Big|_A^B$$

因为沿封闭围线速度环量对时间的微分等于同一瞬时围线两端$\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right)$的变化，$U$，$P$，$\frac{v^2}{2}$都是空间点的单值连续函数，故对于封闭围线$L$，即对始点$A$与终点$B$重合的情况下，有

$$\left(U-P+\frac{v^2}{2}\right)\Big|_A^B=0 \tag{5-16}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=0,\ \Gamma=\text{常数}$$

这样，就证明了汤姆逊定理。

由汤姆逊定理可以得出，如果理想流体从静止状态($\Gamma=0$)开始运动，且始终沿相同流体质点组成的封闭围线运动，它的速度环量始终等于零。根据斯托克斯定理，旋涡强度由速度环量度量。因此，在有势质量力的作用下，理想不可压缩流体中，若初始没有旋涡，旋涡不可能在流动过程中自己产生；或者相反，若初始有旋涡，流动中也不会自行消失。如果从静止开始的流动，由于某种原因产生了旋涡，则在该瞬时必然会产生一个环量大小相等方向相反的旋涡，保持环量为零。实际上，只有存在着粘性的真实流体，旋涡才会产生和消失，因而，不能应用汤姆逊定理。但当粘性影响较小，且时间比较短的情况下，真实流体也可以应用汤姆逊定理。

§5-4 涡管特性的亥姆霍兹三定理

亥姆霍兹第一定理：在同一瞬时沿涡管长度，旋涡强度保持不变。

参看图5-8，研究两个任意截面Ⅰ，Ⅱ间的一段涡管。

对Ⅰ断面 $\Gamma_{\mathrm{I}}=2\iint_{A_1}\omega_n\mathrm{d}A=2J_{\mathrm{I}}$

对Ⅱ断面 $\Gamma_{\mathrm{II}}=2\iint_{A_2}\omega_n\mathrm{d}A=2J_{\mathrm{II}}$

即需要证明沿涡管长度上有

$$\Gamma_{\mathrm{I}}=\Gamma_{\mathrm{II}}=\Gamma=\text{常数}$$

在涡管表面上，取任意两根几乎重合的平行线aa'和cc'切开表面。因为由$abcc'b'a'a$所围成的涡管表面没有涡线穿过，所以根据斯托克斯定理，沿这条封闭围线的速度环量等于零，即

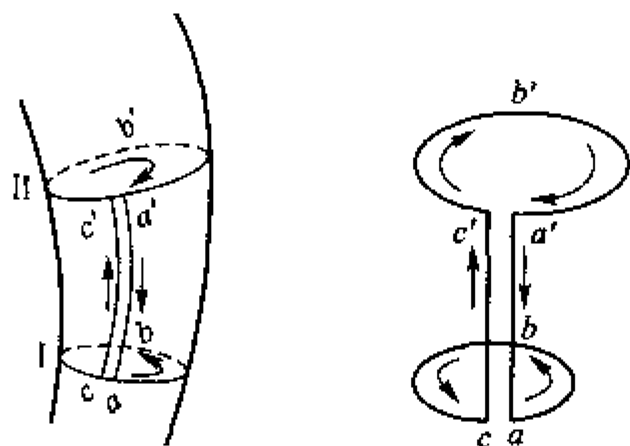


图 5-8

$$\Gamma_{abcc'b'a'a}=0$$

又因为

$$\Gamma_{abcc'b'a'a}=\Gamma_{abc}+\Gamma_{cc'}+\Gamma_{c'b'a'}+\Gamma_{a'a}=\Gamma_{\text{I}}-\Gamma_{\text{II}}=0$$

所以　$\Gamma_{\text{I}}=\Gamma_{\text{II}}$

根据斯托克斯定理，速度环量等于穿过封闭围线所包围截面积旋涡强度的两倍。因为Ⅰ、Ⅱ是任取的截面，所以沿涡管长度旋涡强度保持不变。

这一定理说明，流动空间中的涡管，既不能突然中断，也不能突然产生。同样，涡管也不能以尖端形式出现，因为当 $A\to0$ 时，必须有 $\omega_n\to\infty$，而这是不可能的，所以流体中的旋涡不能以尖端发生或告终。亥姆霍兹第一定理决定了在流动过程中涡管存在的形式，它只能自成封闭管圈，或者涡管的两端附在边界上(见图5-9)。

对于真实流体，由于粘性摩擦力消耗能量，涡管将在运动中逐渐消失。

亥姆霍兹第二定理：在有势质量力作用下的正压性理想流体中，涡管永远保持相同的流体质点组成而不被破坏。

在图5-10所示的涡管侧表面上，任取一个由流体质点组成的流动封闭围线 L，因为涡管表面上不可能有涡线通过，根据斯托克斯定理，沿封闭围线 L 的环量 $\Gamma_L=0$。又由汤姆逊定理，环量不随时间而变化，所以沿封闭围线 L 上环量保持为零。这说明在任何时候，都不可能有涡线穿过任何围线所包围的面积，所以，随时间变化，虽然涡管的形状会不断变化，但组成涡管的流体质点永远在涡管上，涡管能够保持不变而不被破坏。

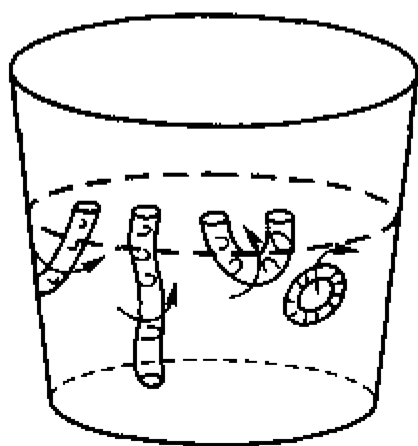


图　5-9

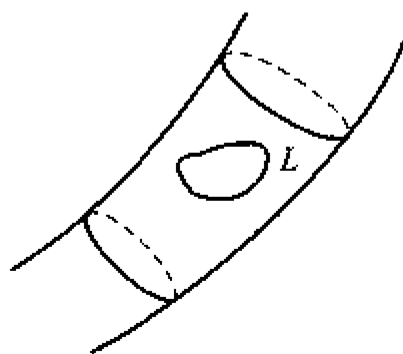


图　5-10

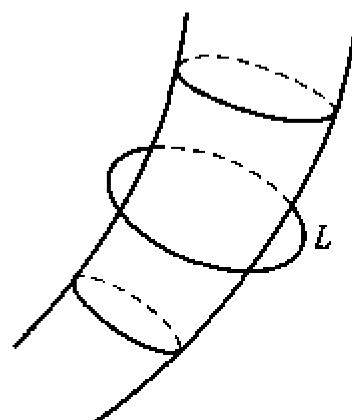


图　5-11

亥姆霍兹第三定理：在有势质量力作用下的正压性理想流体中，涡管的旋涡强度不随时间变化。

如图5-11所示，作任意封闭围线 L 包围涡管。根据斯托克斯定理，沿封闭围线 L 的速度环量等于通过该围线所围面积上旋涡强度的两倍，即 $\Gamma_L=2J$。又根据汤姆逊定理，环量 Γ_L 不随时间而变化，因此涡管的旋涡强度不随

时间变化。

亥姆霍兹第一定理说明同一瞬时沿涡管长度旋涡强度保持不变，它是斯托克斯定理的推论，说明同一瞬间空间上旋涡的变化情况，这是个运动学的问题，对理想或粘性流体都成立。第二、第三定理说明涡管的旋涡强度不随时间改变，它由斯托克斯定理和汤姆逊定理加以证明。对于真实流体，粘性摩擦消耗能量会使旋涡强度逐渐减弱，因此，第二、第三定理只适用于理想的正压流体。

§5-5 二元旋涡的速度和压强分布

由流体微元形成的旋涡，可看作一个如同刚体那样转动的涡核。涡核(线)在静止流体中旋转时，由于流体的粘性作用，将带动周围的流体围绕涡核作圆周运动。显然，刚开始时，由于速度梯度大，存在比较大的粘性作用，以后逐渐减小，当周围运动稳定后，粘性作用就变得很小，这时流体粘性作用可以略去不计，看作为理想流体。

涡核在周围的流体中感生出速度，使在整个流域形成感生速度场(这种感生的流场是二元流动,流体只有由涡核感生的圆周运动)，所以流场内某点($r > r_0$)的速度为

$$\left.\begin{aligned} &v_r = 0 \\ &v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}(\text{沿绕涡核任意封闭围线 } \Gamma = 2\pi r v_\theta) \end{aligned}\right\}$$

计算得到，这是一种无旋运动。当涡核旋转角速度一定时，感生流场作恒定运动，当略去质量力后，旋涡外任意点的压强，可由拉格朗日积分式(4-14)确定，有

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = C \tag{5-17}$$

式中 v 即为 v_θ。

常数 C 对流场中任意各点都相同，可以由边界条件决定。当 $r = \infty$ 时，$v_\infty = 0$，$p = p_\infty$，得 $C = p_\infty$，于是式(5-17)变为

$$p = p_\infty - \frac{\rho v^2}{2} \tag{5-18}$$

由式(5-18)可见，愈接近涡核，速度 v 按双曲线规律增长，压强 p 按抛物线规律降低，涡核边界上压强为

$$p_0 = p_\infty - \frac{\rho v_0^2}{2} \tag{5-19}$$

涡核外部的压强分布如图 5－12 所示。

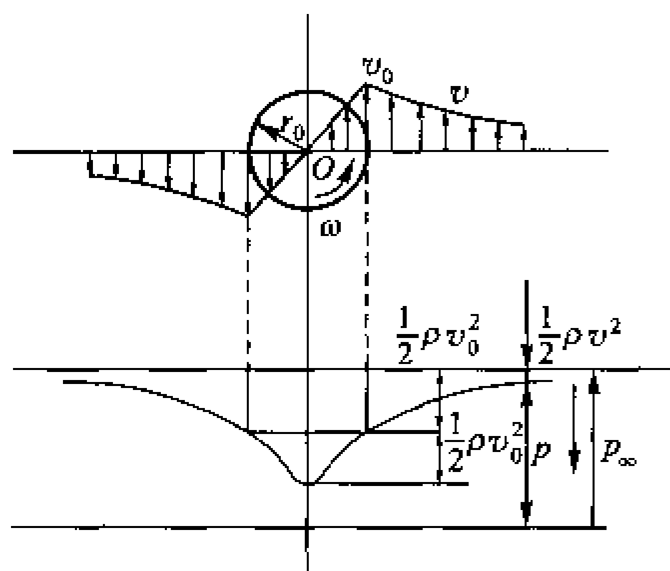


图　5－12

现在转而讨论涡核区内的速度和压强分布。

涡核内流体作有旋运动，不能应用拉格朗日积分。旋涡区内流线是以原点为圆心的同心圆簇，可以沿流线应用伯努利方程，但这一方程不能解出不同流线间的压强分布，因此，这里直接采用欧拉运动微分方程积分求解。

对于二元流动，欧拉运动微分方程有(略去质量力)

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

在旋涡区内旋转角速度 ω = 常数，所以对任意点有

$$v_x=-\omega y,\quad v_y=\omega x \tag{5－20}$$

于是有

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v_x}{\partial y}=-\omega,\ \frac{\partial v_y}{\partial x}=\omega,\ \frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

所以欧拉运动微分方程变为

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 x&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \omega^2 y&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

上两式分别乘以 dx，dy，相加后积分得到

$$p=\frac{\rho\omega^2}{2}(x^2+y^2)+C=\frac{\rho\omega^2 r^2}{2}+C=\frac{\rho v^2}{2}+C$$

在涡核边界上有

$$p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + C$$

得到积分常数

$$C = p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2}$$

因此得到旋涡中任意点的压强

$$p = p_0 + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v_0^2}{2} \tag{5-21}$$

或由式(5－19)代入得另一形式

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}(v^2 - 2v_0^2) \tag{5-22}$$

设在涡核中心处压强 $p = p_c$，$v_c = 0$，故

$$p_c = p_\infty - \rho v_0^2 \tag{5-23}$$

$$p_c = p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2} \tag{5-24}$$

这样就有

$$p_\infty - p_0 = p_0 - p_c = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{5-25}$$

上面得到的结果说明，涡核中心处的压强比无穷远处静止流体中的压强减小了，它们的差值为涡核边界上速度头的两倍，而旋涡区外势流区的压强降等于旋涡内的压强降，旋涡内外的压强分布均按抛物线规律变化，整个流场的压强分布如图5－12所示。由图可见，在旋涡区内愈靠近中心，压强 p 急骤降低，因此在旋涡中心处产生一个很大的吸力，对旋涡区外的流体具有抽吸作用。

热能工程中，常常应用旋转气流的这种特性，做成旋风燃烧室，离心式雾化器，离心式分离器等设备。

例　　题

例5－1　已知某流场的速度为 $v_\theta = cr$，$v_r = 0$，$v_z = 0$，其中 c 为常数，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$。

求：(1) 沿曲线 $x^2 + y^2 = a^2$ 的速度环量 Γ；

(2) 通过上述封闭围线所包围的圆面积的旋涡强度 J。

解　(1) 由速度环量定义，有

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \int_0^{2\pi} v_\theta a \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} caa \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\pi c a^2$$

(2) 其流场在直角坐标系下速度为

$$v_x = -cy,\quad v_y = cx,\quad v_z = 0$$

所以，旋转角速度为

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}2c = C$$

再由旋涡强度的定义

$$J = \iint_A \boldsymbol{\omega} \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$= \iint_A \omega_n \mathrm{d}A$$

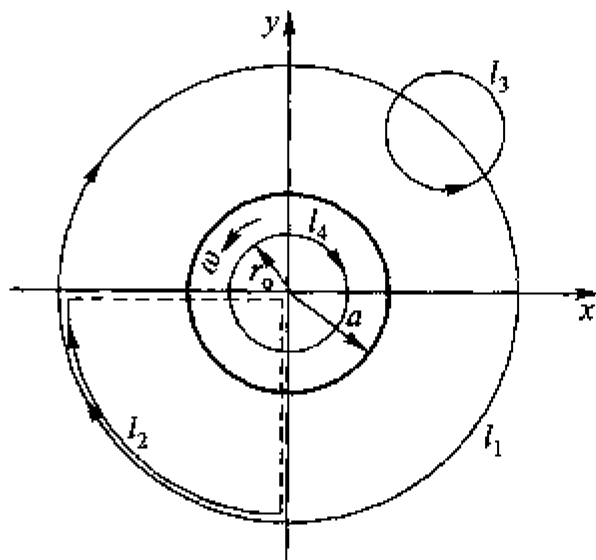
$$= \iint_A c \mathrm{d}A$$

$$= cA$$

$$= c\pi a^2$$

可见，$\Gamma = 2J$，与斯托克斯定理是一致的。

例 5－2　有一流场，在 $r > a$ 时，$v_x = -\frac{r}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}$，$v_y = \frac{r}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}$，$v_z = 0$；在 $r \leqslant a$ 时，$v_x = -\omega y$，$v_y = \omega x$，$v_z = 0$，求沿图所示曲线 l_1，l_2，l_3 和 l_4（l_3 和 l_4 的半径相等）的速度环量。l_4 的半径为 r_0。



例 5－2 图

解　当 $r > a$ 时

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left[0 - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\right]$$

$$= 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{r}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right]$$

$$= 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{r}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0$$

所以在 $r>a$ 的流场内流动是无旋的。

当 $r\leqslant a$ 时

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left[0-\frac{\partial}{\partial z}(\omega x)\right]=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)-0\right]=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega x-\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right]=\omega$$

所以在 $r\leqslant a$ 的范围内，流动是有旋的。

根据速度环量的斯托克斯定理，沿封闭周线的速度环量等于穿过封闭周线所包围面积旋涡强度的两倍，因而有

$$\Gamma_{l_1}=-2\omega A_1=-2\pi a^2\omega$$

$$\Gamma_{l_2}=-2\omega A_2=-\frac{\pi}{2}a^2\omega$$

$$\Gamma_{l_3}=0$$

$$\Gamma_{l_4}=-2\omega A_4=-2\pi r_0^2\omega$$

所得到的 Γ 为负值。若将图中 l 的走向反过来，将得到 Γ 为正值。

习　　题

5-1　试比较流线和涡线，流管和涡管的定义。

5-2　叙述旋涡强度和速度环量的定义，并说明它们之间的关系。

5-3　已知流线为同心圆族，速度分布为

$$r\leqslant 5\text{ 时：}v_x=-\frac{1}{5}y,\ v_y=\frac{1}{5}x,\ v_z=0$$

$$r\geqslant 5\text{ 时：}v_x=-\frac{5y}{x^2+y^2},\ v_y=\frac{5x}{x^2+y^2},\ v_z=0$$

试求沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的速度环量。其中圆的半径 R 分别为：

(1) $R=3$，(2) $R=5$，(3) $R=10$。

5-4　设在(1,0)点置有 $\Gamma=\Gamma_0$ 的旋涡，在(-1,0)点置有 $\Gamma=-\Gamma_0$ 的旋涡。试求沿下列路线的速度环量

(1) $x^2+y^2=4$

(2) $(x-1)^2+y^2=1$；

(3) $x=\pm 2$，$y=\pm 2$ 的一个方形框；

(4) $x=\pm 0.5$，$y=\pm 0.5$ 的一个方形框。

5-5　求沿封闭围线的速度环量 Γ

(1) 绕半径 $R=0.5$ m 圆周切线方向的速度 $v_\theta=2$ m/s；

(2) 绕半径为 R 的圆周切线方向的速度 $v_\theta = 2V_\infty \sin\theta$ ($V_\infty = \text{const}$)。

5-6　给定流场为：

$$v_x = -\frac{Cy}{x^2+y^2},\quad v_y = \frac{Cx}{x^2+y^2},\quad v_z = 0,$$

其中 C 为常数。

作一个围绕 Oz 轴的任意封闭围线，试用斯托克斯定理求此封闭围线的速度环量，并说明此环量值与所取封闭围线的形状无关。

5-7　已知流体的运动速度分量为：

$$v_x = -ky,\quad v_y = kx,\quad v_z = \sqrt{\Phi(z) - 2k^2(x^2+y^2)}$$

其中 $\Phi(z)$ 为 z 的函数、k 为常数。试证明该运动中的旋转角速度向量 ω 具有和速度相同的方向，并找出旋转角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与速度向量 $\boldsymbol{v}$ 之间的数量关系。

5-8　流体沿着以 z 轴为轴线、半径为 a 的管中流动，速度场为：

$$v_x = 0,\quad v_y = 0,\quad v_z = a^2(x^2 - y^2)$$

试求涡线方程和角变形速度。

5-9　设流体质点运动的速度分量为

$$v_x = y + 2z,\quad v_y = z + 2x,\quad v_z = x + 2y$$

试求涡线方程。若涡管断面 $dA = 0.0001\ \text{m}^2$，求旋涡强度 J。

5-10　若流体质点运动轨迹是直线，试举例说明该流动是否必是无旋流动？若流体质点运动轨迹是曲线，请举例说明该流动是否必是有旋流动？

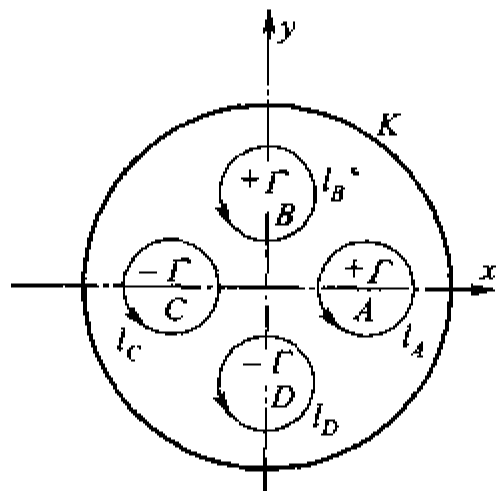
5-11　设流场的速度分布为 $v = \omega r$，ω 是绕垂直轴的旋转角速度，r 为某点离垂直轴的距离，试求涡线方程。

5-12　试证明平行匀速流场是一个无旋场。

5-13　在流场内，坐标原点 O 四周等距分布 A、B、C、D 四点上有四个旋涡，旋涡强度分别为 $\Gamma_A = \Gamma_B = +\Gamma$，$\Gamma_C = \Gamma_D = -\Gamma$，圆 K 将 A，B，C，D 包含在内。试求：

(1) 沿圆周 K 的速度环量；

(2) 说明沿封闭周线速度环量为零，是否此封闭曲线所包围的区域内处处无旋？



题 5-13 图

5-14　对于不可压缩理想流体，质量力有势，试由欧拉运动微分方程出发证明旋度 $\boldsymbol{\omega}$ 满足方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为流速。

第6章

理想流体平面势流

流动场中，若任意流体质点的旋转角速度向量 $\boldsymbol{\omega}=0$，这种流动称为有势流动或无旋流动。

流体质点的速度向量都在相互平行的平面内，位于同一垂直线上的各流体质点的运动情况完全相同的流体流动称为平面流动。若流体质点在相互平行的平面内作有势流动，称该流动为平面有势流动。

自然界并不存在完全的平面流动。但流体对足够长圆柱体或机翼绕流时(见图6－1)，与柱体长度相垂直的每一个平面内的流动情况都近似相同，可以看作为平面流动。

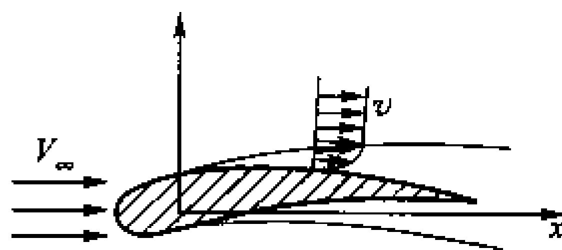


图 6－1

§6－1 速度势和流函数

本节将利用解析的方法，引入特殊函数速度势和**流函数**，将求三个速度 v_x，v_y 和 v_z 的问题变为求解特殊函数，并由此决定流体的速度和压强分布。

1. 速度势函数

由数学分析知道，若函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$，及其一阶偏导数在单连通域中单值连续，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{6－1}$$

的成立，是 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为某个函数 $\varphi(x,y,z)$ 全微分存在的必要充分条件，即

$$\mathrm{d}\varphi=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \tag{6-2}$$

且有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=R \tag{6-3}$$

现转而讨论流体的运动。如果流体作无旋运动，即 $\boldsymbol{\omega}=0$，则有

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=0\\ \omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0\\ \omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\right\}$$

得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_z}{\partial y}&=\frac{\partial v_y}{\partial z}\\ \frac{\partial v_x}{\partial z}&=\frac{\partial v_z}{\partial x}\\ \frac{\partial v_y}{\partial x}&=\frac{\partial v_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

由上述数学分析可知，式(6－4)三个微分关系的存在，是 $v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z$ 成为某函数 $\varphi(x,y,z,t)$ 全微分的充分必要条件，即

$$\mathrm{d}\varphi=v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z \tag{6-5}$$

对有势运动必定存在式(6－5)。

当以 t 为参变数时，多元函数 $\varphi(x,y,z,t)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{6-6}$$

于是，由式(6－5)和(6－6)得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=v_z \tag{6-7}$$

称 $\varphi(x,y,z,t)$ 为速度势函数，简称速度势。由式(6－7)可知，速度势函数可以相差任一常数而不影响流体运动，表示成向量形式为

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi=\mathrm{grad}\ \varphi=\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{6-8}$$

对于可压缩流体或不可压缩流体，只要作无旋运动，就必定存在速度势函

数 φ。反之，只要存在速度势函数 φ，就一定是无旋运动。由于速度势函数与速度 v_x，v_y，v_z 存在式(6-7)的关系，于是，将求速度场的问题简化为求函数 φ，解得 φ 后，速度分布就可得到，反之亦然。

因此，研究有势流动时，可以用速度势函数 φ 来表示速度场，一定的 φ 对应一定的有势速度场，同时，由于 φ 的特性，使之更容易研究流体的运动。

对恒定流动，$\varphi=f(x,y,z)$；

对非恒定流动，$\varphi=f(x,y,z,t)$。

下面讨论速度势函数 φ 的特性。

(1) 速度势函数在任意 l 方向的偏导数等于速度在该方向的投影，即 $v_l=\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$

在有势流场中，任意曲线 l 上某点的速度为$\boldsymbol{v}$(见图6-2)，对有势流动，存在速度势函数 φ，根据数学中方向导数的定义有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$$

式中

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x=v\cos(\boldsymbol{v},x)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y=v\cos(\boldsymbol{v},y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=v_z=v\cos(\boldsymbol{v},z)$$

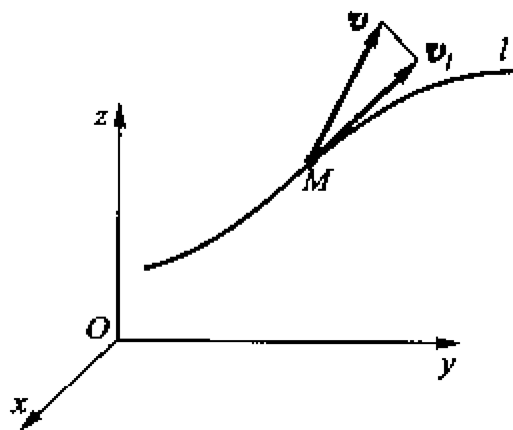


图 6-2

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial l}&=v\left[\cos(\boldsymbol{v},x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+\cos(\boldsymbol{v},y)\frac{dy}{\mathrm{d}l}+\cos(\boldsymbol{v},z)\frac{dz}{\mathrm{d}l}\right]\\&=v\left[\cos(\boldsymbol{v},x)\cos(\boldsymbol{l},x)+\cos(\boldsymbol{v},y)\cos(\boldsymbol{l},y)\right.\\&\quad\left.+\cos(\boldsymbol{v},z)\cos(\boldsymbol{l},z)\right]=v\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{l})\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=v_l \tag{6-9}$$

根据这一结果，可以写出柱坐标系(r,θ,z)中的速度分量(见图6-3)

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{6-10}$$

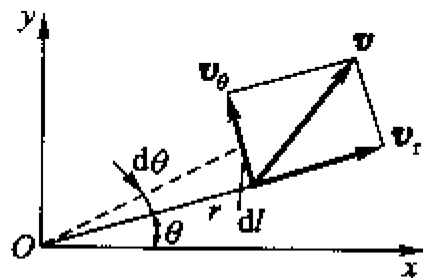


图 6-3

对于球坐标系(r,θ,β)

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\beta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \tag{6-11}$$

(2) 不可压缩流体的有势流动，速度势函数 φ 满足**拉普拉斯方程**。

不可压缩流体有连续性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

对有势流动存在

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z$$

上式代入连续方程得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{6-12}$$

即

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

式中**拉普拉斯算子**

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6-13}$$

式(6-12)是拉普拉斯方程，速度势函数 φ 满足拉普拉斯方程，因而是调和函数。显然，有势流动中，拉普拉斯方程实质是连续方程的一种特殊形式。这样，解有势流动的问题，变成了解满足一定边界条件的拉普拉斯方程。

(3) 沿任意曲线上的速度环量等于曲线两端点上的速度势之差，而与曲线形状无关。

沿任意曲线 AB 的环量为

$$\begin{aligned}\Gamma_{AB} &= \int_A^B (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y + v_z \mathrm{d}z) \\ &= \int_A^B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \\ &= \int_A^B \mathrm{d}\varphi = \varphi_B - \varphi_A \end{aligned} \tag{6-14}$$

对任意封闭曲线，若 A，B 点重合，且当有势流场中速度势函数 φ 为单值时，例如对于无旋流中的单连通域，沿封闭曲线的环量 $\Gamma_{AB} = 0$。

2. 流函数

不可压缩流体平面流动，速度场一定满足连续性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

即
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{6-15}$$

平面流动中流线的微分方程
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \text{ 即 } v_x dy - v_y dx = 0 \tag{6-16}$$

由数学分析知，式(6－15)的存在，是式(6－16)的左端为某函数 $\psi(x,y,t)$ 在某时刻 t 对坐标全微分的必要充分条件，即
$$d\psi = v_x dy - v_y dx = 0 \tag{6-17}$$

由多元函数全微分法则得
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \tag{6-18}$$

比较式(6－17)和(6－18)得
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \tag{6-19}$$

由式(6－17)可知，在同一条流线上，$d\psi = 0$，积分后得 $\psi = C$，表示某条流线 $\psi(x,y) = C$ 是平面流动中流线方程的解，因此称函数 $\psi(x,y,t)$ 为流函数。如果令流函数 $\psi = c$，就可画出流线；或者说给定一个 ψ 值，就能得到一条流线。

不可压缩流体的平面流动，无论其有势或有涡，及流体有无粘性，均存在流函数。

将式(6－19)代入式(6－15)得
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

流函数 ψ 永远满足连续方程。

流函数具有下列特性：

(1) 不可压缩流体平面有势流动，流函数满足拉普拉斯方程。对有势流动有
$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0$$

不可压缩流体平面流动存在
$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

代入上式得
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0 \tag{6-20}$$

因此在平面有势流场中，流函数 ψ 满足拉普拉斯方程，所以流函数 ψ 也是调和函数。这样，解平面有势流动问题也可变为解满足一定起始边界条件的流函数的拉普拉斯方程。解得 ψ，整个流场的速度、压力分布就可得到。显然，ψ 和 φ 满足数学上的柯西－黎曼条件，因此 ψ、φ 为共轭调和函数，若已知 φ，ψ 中的一个，就可积分求得另一个。

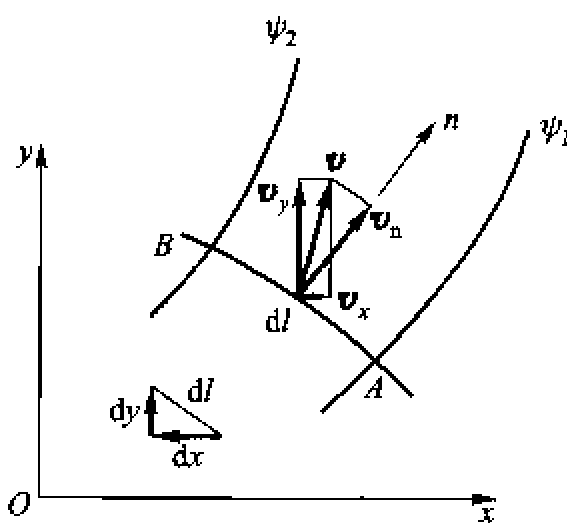


图 6－4

（2）平面流动中两条流线间通过的流体流量，等于两条流线的流函数之差。这也正是流函数的物理意义。

如图 6－4 所示，在两流线间任作一曲线 AB，则通过单位厚度微小面积的流量为

$$dq = v_n dl \cdot 1 = v_n dl$$

$$v_n = v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)$$

而

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{dl}$$

$$\cos(n, y) = -\frac{dx}{dl}$$

所以

$$\begin{aligned} dq &= [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)] dl \\ &= \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{dx}{dl}\right] dl = d\psi \end{aligned}$$

流量

$$q = \int_A^B dq = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \tag{6－21}$$

因为流线上各点的流函数为一常数，所以沿流线长度上两流线间的流量保持不变。或流经任意单位厚度曲线 AB 的流量，等于曲线两端点上流函数值之差，而与曲线的形状无关。若 A，B 两点重合为一封闭曲线，则当 ψ 为单值函数时，流量 $q = 0$。

（3）在不可压缩流体的平面有势流场中，流线簇和等势线簇相互正交。

由

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

两式交叉相乘得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{6－22}$$

这是**等势线簇** $\varphi(x, y) = C$ 和流线簇 $\psi(x, y) = C$ 相互正交的条件。因此

在平面有势流场中，流线簇和等势线簇组成正交网络，称为**流网**。这是流函数和速度势函数的重要性质，利用这一性质可以用图解法近似地解平面势流问题。

§6－2 几种简单的平面势流

很多较复杂的平面势流可以由简单的平面势流叠加组成，由此导出势函数 φ 或流函数 ψ 的解析式，利用解析法求解，因此必须熟悉几种典型的简单平面势流。

1. 均匀平行流

深度和宽度很大的流体流过平面时的流动，流场中每一点的速度大小相等、方向相同，流体作均匀直线流动。

设**均匀流**与 x 轴成 α 角，速度为 v_0，沿 x、y 方向的分速度为 v_x、v_y，则

$$v_x = v_0\cos\alpha$$

$$v_y = v_0\sin\alpha$$

因为 $$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0,\text{所以流动有势。}$$

由于 $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x = v_0\cos\alpha$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y = v_0\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y\\ &= v_0\cos\alpha\,\mathrm{d}x + v_0\sin\alpha\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

积分得速度势

$$\varphi = v_0x\cos\alpha + v_0y\sin\alpha + c_1 = v_0(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + c_1$$

同理得

$$\psi = v_0y\cos\alpha - v_0x\sin\alpha + c_2 = v_0(y\cos\alpha - x\sin\alpha) + c_2$$

常数 c_1，c_2 对流动图形没有影响，可以舍去。

所以 $$\varphi = v_0(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \tag{6-23}$$

$$\psi = v_0(y\cos\alpha - x\sin\alpha) \tag{6-24}$$

令 $\varphi = c$，$\psi = c$，得到流线为一组平行直线，与 x 轴的夹角 $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$，

等势线(虚线)与流线相互垂直(见图 6-5)。

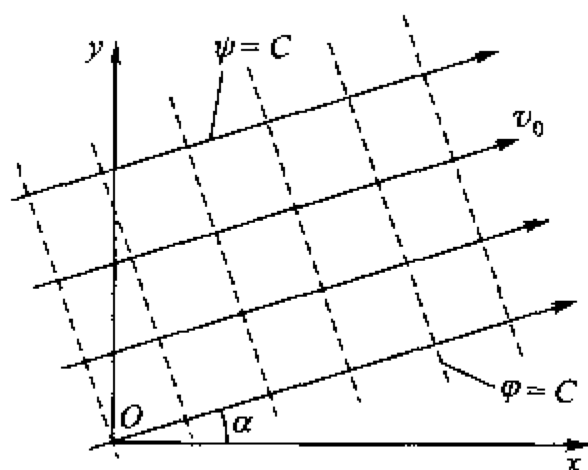


图 6-5

若流动平行 x 轴，有 $\alpha=0$ 或 π，

则

$$\varphi=\pm v_0 x$$

$$\psi=\pm v_0 y$$

若流动平行 y 轴，

有

$$\alpha=\frac{\pi}{2}\text{或}\frac{3\pi}{2},$$

则

$$\varphi=\pm v_0 y$$

$$\psi=\pm v_0 x$$

2. 点源和点汇

定义：流体从一点径向均匀地向外流出，流动完全对称，流线是由 0 点发出的直线，这种流动称为**点源**，这个点称为源点(图 6-6a)。如果流体径向直线均匀地流向一点，这种流动称为**点汇**，这个点称为汇点(图 6-6b)。

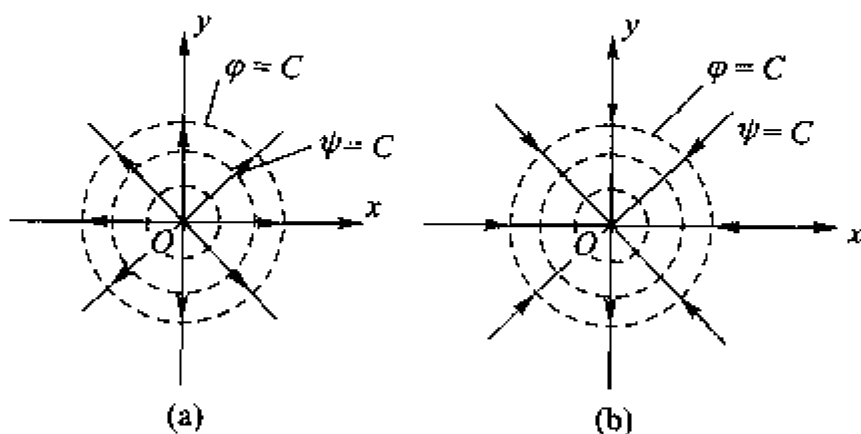


图 6-6

由于流动是径向的，根据流动连续原理，在极坐标中通过任一圆柱面的流量为 q，则源(汇)的强度为

$$q=\pm 2\pi r\, v_r$$

径向速度为

$$v_r=\pm\frac{q}{2\pi r} \tag{6-25}$$

点源取正号，点汇取负号。流场中某点的速度大小与该点到中心的距离成反比。$r\to 0$ 时，$v_r\to\infty$，在数学上称源点为奇点。在该点处的流动没有意义，必须排除在所考虑的流场之外。

当为点源时

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=v_r=\frac{q}{2\pi r}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0,\ \text{有}\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = v_r\mathrm{d}r + v_\theta r\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{q}{2\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

式中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

积分得

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\ln r + c_1 = \frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + y^2} + c_1$$

同理

$$\mathrm{d}\psi = -v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}y$$

式中

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

所以

$$\mathrm{d}\psi = \frac{q}{2\pi}\left[\frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}\right] = \frac{q}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right]$$

积分

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{q}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_2$$

由于积分常数 c_1 和 c_2 不影响流动图形，可以舍去，于是源流的速度势函数和流函数为

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\ln r \tag{6-26}$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{q}{2\pi}\theta,\quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6-27}$$

所以，当 $r=$ 常数时，得到等势线为一系列半径不同的同心圆；$\theta=$ 常数，得到流线为一系列从原点发出的放射线，等势线与流线正交。因为流函数 ψ 并不单值，因此，流经包含有点源和点汇的封闭曲线的流量不等于零。

同理可得点汇的速度势函数和流函数为

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi}\ln r \tag{6-28}$$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi}\theta \tag{6-29}$$

将式(6-26)，(6-27)，(6-28)，(6-29)分别代入拉普拉斯算子，很容易证明 φ 和 ψ 均满足拉普拉斯方程，所以都是调和函数，证明了点源和点汇确是有势流动。

3. 点涡和环流

涡束的半径 $r\to 0$ 时，变成一条涡线，垂直于无限长直涡线的各平行平面中的流动称为**点涡**，又称为自由涡。由于在涡束中 $r\to 0$ 时，$v_\theta\to\infty$，所以涡点是一个**奇点**。

若绕包围点涡的任一封闭围线的速度环量为 Γ，则速度分量为

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

称 Γ 为点涡的强度，$\Gamma = 2\pi r\, v_\theta$

速度势函数的全微分为

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

积分得

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6-30}$$

式中

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

因为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2-y^2}$$

所以流函数的全微分

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2}$$

积分得

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{6-31}$$

令 $r=c$，得到流线为以坐标原点为圆心的同心圆簇。

$\theta=c$ 的等势线是从原点出发与流线正交的径向线，这正好与源(或汇)相反。环量 $\Gamma>0$ 时，环流为逆时针方向；$\Gamma<0$，环流为顺时针方向。

点涡的强度 Γ 完全取决于旋涡的强度。

$$\Gamma = 2\iint_A \omega_n \mathrm{d}A$$

若取任意半径 $r=r_0$ 处的一条流线作固体边界，变成一个转动着的无限长圆柱体，由于流体质点不能穿过流线，这样做并不破坏流动的特性。这时圆周外的流动，是由无限长柱体带动旋转的纯环状流动，这也就是二元旋涡内外的流动。

§6-3 简单势流的叠加

研究势流的目的在于求解反映运动特征的速度势函数 φ 和流函数 ψ，但当流动情况较为复杂时，要根据流动直接求 φ 或 ψ 往往十分困难，因此常将一些简单势流经适当组合叠加得到较复杂的流动。

设有二个势流 φ_1，φ_2，ψ_1 和 ψ_2，满足拉普拉斯方程，即

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0$$

令新的速度势函数 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，则

$$\frac{\partial^2(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0$$

即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

φ 满足拉普拉斯方程，所以叠加得到的流动也是一个有势流动。任意几个简单势流叠加后的速度势函数 φ 同样满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2\varphi=\nabla^2\varphi_1+\nabla^2\varphi_2+\nabla^2\varphi_3+\cdots \qquad (6-32)$$

简单势流叠加后的流函数 ψ 也满足拉普拉斯方程，有

$$\nabla^2\psi=\nabla^2\psi_1+\nabla^2\psi_2+\cdots \qquad (6-33)$$

将函数 φ 对 x 或 y 取偏导数，得到速度场

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\cdots=v_{1x}+v_{2x}+\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\cdots=v_{1y}+v_{2y}+\cdots$$

也即得到

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots \tag{6-34}$$

由此可以得到下面结论：几个有势流动叠加，得到一个新的有势流动，其速度势函数 φ 和流函数 ψ 分别等于原有几个有势流动的速度势函数和流函数的代数和。而新的有势流场中的速度，等于原先几个有势场流动速度的几何和。

研究**势流叠加原理**的意义在于，将复杂的势流分解成一些简单势流，将求得的这些简单流动的解叠加起来，就得到复杂流动的解。

1. 点源与点涡叠加的流动——源环流

设强度为 q 的点源与强度为 Γ 的点涡同置于坐标原点，叠加后组合流动的速度势函数和流函数为

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{1}{2\pi}(q\ln r+\Gamma\theta) \tag{6-35}$$

$$\psi=\psi_1+\psi_2=\frac{1}{2\pi}(q\theta-\Gamma\ln r) \tag{6-36}$$

令 $\varphi=c$，有

$$q\ln r+\Gamma\theta=c$$

由此得组合流动的等势线为

$$r=c_1\mathrm{e}^{-\frac{\Gamma}{q}\theta} \tag{6-37}$$

令 $\psi=C$，有

$$q\theta-\Gamma\ln r=C$$

流线为

$$r=C_2\mathrm{e}^{\frac{q}{\Gamma}\theta} \tag{6-38}$$

式中 C_1 和 C_2 为常数，流线和等势线为相互正交的**对数螺旋线簇**(见图6-7)，称为源环流或螺旋流。

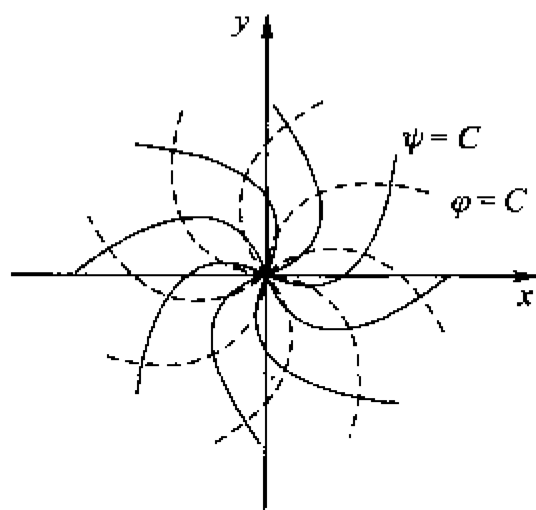


图　6-7

水泵压水室(涡壳)内的流动是点源和点涡叠加得到的源环流。

2. 点汇与点涡叠加的流动——汇环流

将点源改为强度为 $-q$ 的点汇，叠加流动的速度势函数和流函数为

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}(\Gamma\theta - q\ln r) \tag{6-39}$$

$$\psi = \frac{-1}{2\pi}(q\theta + \Gamma\ln r) \tag{6-40}$$

等势线方程

$$\Gamma\theta - q\ln r = C$$

$$r = c_1 e^{\frac{\Gamma}{q}\theta} \tag{6-41}$$

流线方程

$$q\theta + \Gamma\ln r = C$$

$$r = c_2 e^{-\frac{q}{\Gamma}\theta} \tag{6-42}$$

可见，点汇和点涡叠加流动的等势线和流线也是相互正交的对数螺旋线簇。它与源环流的不同在于，源环流从中心向外流，而汇环流则是按对数螺旋线从四周向中心流动。

水轮机的引水室(蜗壳)、旋风燃烧室、离心式喷油嘴和离心式除尘器等设备中，流体自外面沿圆周切向流入，从中心处不断流出。为减小流动损失，应使流体的引入符合对数螺旋线形状。

§6-4 偶 极 流

设强度为 q 的源位于点$(-\epsilon,0)$，强度为 $-q$ 的汇位于点$(\epsilon,0)$，放入同一平面内，两点间的距离为 2ϵ，流体从源点流出散开，然后向点汇集中。

如图 6-8 所示，任意一点 $P(x,y)$距 A，B 两点分别为 r_1 和 r_2，r_1，r_2 与 x 轴的夹角分别为 θ_1，θ_2。

对 P 点，叠加后流场的速度势函数为源与汇的速度势函数之和。

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2)$$

$$= \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \tag{6-43}$$

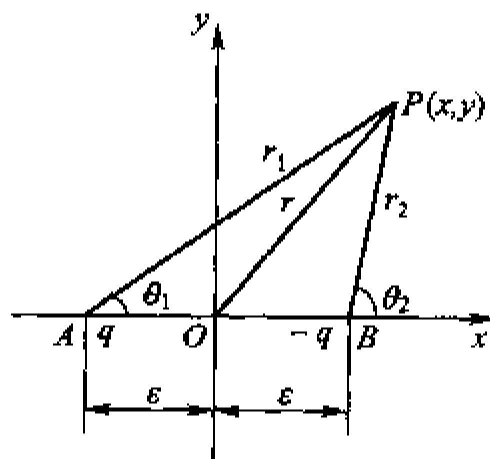


图 6-8

由图得到

$$r_1 = \sqrt{(x+\epsilon)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-\epsilon)^2 + y^2}$$

所以
$$\varphi=\frac{q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+\varepsilon)^2+y^2}{(x-\varepsilon)^2+y^2}}=\frac{q}{4\pi}\ln\frac{(x+\varepsilon)^2+y^2}{(x-\varepsilon)^2+y^2}$$
$$=\frac{q}{4\pi}\ln\left[1+\frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right] \tag{6-44}$$

当图示的源和汇无限接近，即 $\varepsilon\to0$ 时，得到偶极流动。但这时若源与汇为强度等于常值的简单叠加，源发出的流体立即为汇所吸收，不能形成流动。只有当它们间的距离逐渐缩小，源与汇的强度逐渐增大，$2\varepsilon\to0$ 时，q 逐渐增强至无限大，使 $2q\varepsilon$ 的极限趋近于某一个有限常数 M，即 $\lim\limits_{\substack{2\varepsilon\to0\\ q\to\infty}}2q\varepsilon=M$，这种情况下所形成的流动，称为**偶极流**。称 M 为偶极流的**偶极矩**，这是一个向量，方向从点源到点汇。

根据上述，可推得偶极流的速度势函数，设
$$Z=\frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}$$
则
$$\ln\left(1+\frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right)=\ln(1+Z)$$
将上式用级数展开
$$\ln(1+Z)=Z-\frac{Z^2}{2}+\frac{Z^3}{3}\cdots$$

当 ε 为无限小量时，级数中的高次项为高阶小量略去不计，即 $\ln(1+Z)\approx Z$，于是速度势函数为
$$\varphi=\lim_{\substack{2\varepsilon\to0\\ q\to\infty}}\left[\frac{q}{4\pi}\ln\left(1+\frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right)\right]$$
$$=\lim_{\substack{2\varepsilon\to0\\ q\to\infty}}\frac{q}{4\pi}\frac{4x\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2+y^2}$$
$$=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{6-45}$$
偶极流的流函数为
$$\psi=\psi_1+\psi_2=\frac{q}{2\pi}(\theta_1-\theta_2) \tag{6-46}$$
由图得
$$\tan\theta_1=\frac{y}{x+\varepsilon}$$
$$\tan\theta_2=\frac{y}{x-\varepsilon}$$
利用三角函数恒等式

$$\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{y(x-\varepsilon)-y(x+\varepsilon)}{x^2-\varepsilon^2+y^2}$$

$$=\frac{-2y\varepsilon}{x^2+y^2-\varepsilon^2}$$

所以流函数为

$$\psi=\frac{q}{2\pi}\arctan\frac{-2y\varepsilon}{x^2+y^2-\varepsilon^2}$$

设 $Z=\dfrac{-2y\varepsilon}{x^2+y^2-\varepsilon^2}$

将 arctan Z 按无穷级数展开

$$\arctan Z=Z-\frac{Z^3}{3}+\frac{Z^5}{5}\cdots\cdots$$

当 ε 为无限小量时，略去高阶小量，得 $\arctan Z\approx Z$，于是

$$\psi=\lim_{\substack{2\varepsilon\to0\\ q\to\infty}}\left[\frac{q}{2\pi}\arctan\frac{-2y\varepsilon}{x^2+y^2-\varepsilon^2}\right]$$

$$=\lim_{\substack{2\varepsilon\to0\\ q\to\infty}}\left[\frac{-q}{2\pi}\frac{2y\varepsilon}{x^2+y^2-\varepsilon^2}\right]$$

$$=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{6-47}$$

偶极流的流线方程为

$$\psi=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=C_1$$

即

$$x^2+y^2+\frac{M}{2\pi C_1}y=0$$

经配方变换得到

$$x^2+\left(y+\frac{M}{4\pi C_1}\right)^2=\left(\frac{M}{4\pi C_1}\right)^2 \tag{6-48}$$

可见，偶极流的流线是半径为$\dfrac{M}{4\pi C_1}$，圆心在 y 轴上$\left(0,\ -\dfrac{M}{4\pi C_1}\right)$的圆周簇，在坐标原点处这些圆与 x 轴相切。因为当 $y=0$ 时，$x=0$，所以所有的流线都通过偶极流的中心，流体从偶极流的中心由 x 的负方向出发，沿圆周又流入偶极流中心，这时，x 轴是流线的对称轴，称为偶极轴。

同理由式(6-45)可以得到等势线方程

$$\left(x-\frac{M}{4\pi C_2}\right)^2+y^2=\left(\frac{M}{4\pi C_2}\right)^2 \tag{6-49}$$

上式表明等势线簇是半径为$\dfrac{M}{4\pi C_2}$，圆心在$\left(\dfrac{M}{4\pi C_2},\ 0\right)$点的圆周簇，在坐标

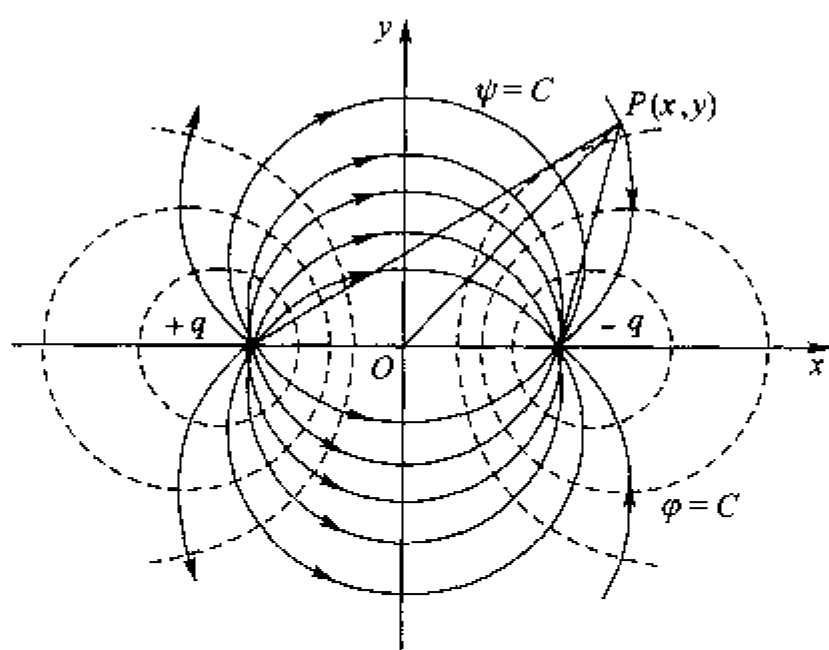


图　6－9

原点处这些圆与 y 轴相切，等势线与流线正交。图 6－9 为点源与点汇叠加的流线和势线，图 6－10 给出了偶极流的流线与等势线图形。

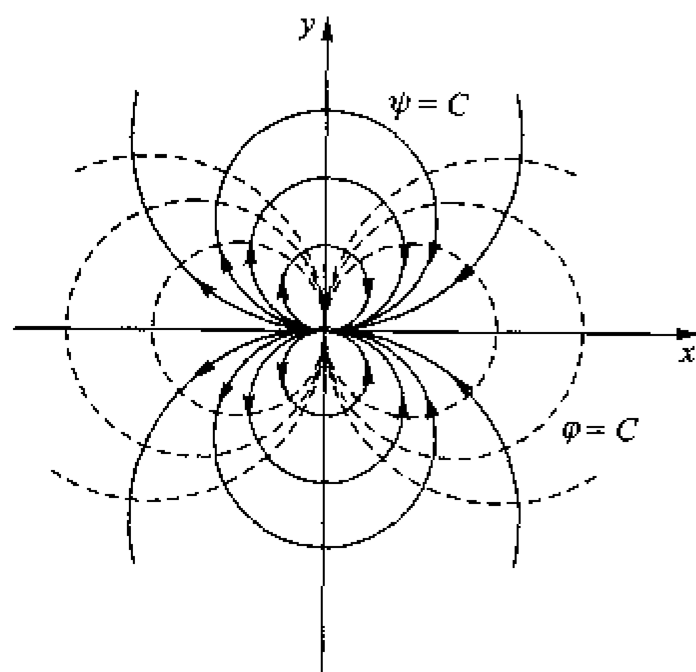


图　6－10

§6－5　流体对圆柱体的无环量绕流

在解理想不可压缩流体的平面势流问题中主要是绕流问题，其中平行流绕圆柱流动是最基本的问题之一，这一流动由平行流和偶极流叠加而成。

1. 流函数和速度势函数

设有一平行于 x 轴的均匀直线流动，在无穷远处的速度为 V_∞，其速度势函数和流函数分别为

$$\varphi_1 = V_\infty x,\quad \psi_1 = V_\infty y$$

中心位于坐标原点的偶极流的速度势函数和流函数为

$$\varphi_2 = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\quad \psi_2 = \frac{-M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

平行流与偶极流叠加流动的速度势函数和流函数为

$$\varphi = V_\infty x + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \tag{6-50}$$

$$\psi = V_\infty y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \tag{6-51}$$

2. 速度场

为了分析流动特点和速度的变化规律，求得流场速度为

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_\infty - \frac{M}{2\pi}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{6-52}$$

$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{M}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{6-53}$$

叠加流场中速度为零的点称为**驻点**，即在驻点处应有 $v_x=0$，$v_y=0$。

由式(6-53)可见，当 $x=0$ 和 $y=0$ 时，都存在 $v_y=0$。假设 $x=0$ 的点为**驻点**，则有 $v_x=0$，由式(6-52)得到

$$V_\infty + \frac{M}{2\pi y^2} = 0$$

所以

$$y = \sqrt{-\frac{M}{2\pi V_\infty}}$$

y 为虚数，不可能存在。说明 $x=0$ 时，虽然 $v_y=0$，但因为 v_x 不可能为零，所以流场中 $x=0$ 的点不能满足驻点的条件。

当 $y=0$ 时，由式(6-52)有

$$v_x = V_\infty - \frac{M}{2\pi x^2}$$

若 $v_x=0$，得到

$$V_\infty - \frac{M}{2\pi x^2} = 0$$

即

$$x = \pm\sqrt{\frac{M}{2\pi V_\infty}}$$

因此得到，在点$\left(y=0,\ x=\sqrt{\frac{M}{2\pi V_\infty}}\right)$和点$\left(y=0,\ x=-\sqrt{\frac{M}{2\pi V_\infty}}\right)$处，存在 $v_x=0$，$v_y=0$，所以在 x 轴上的这两点应为叠加后流场的驻点

由式(6-51)有流线方程

$$V_\infty y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = C$$

选取不同的 C 值，可得到如图 6-11 所示的流动图形。定义：$\psi=0$ 的流线为**零流线**。于是有零流线方程

$$y\left(V_\infty - \frac{M}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0$$

即
$$y=0,\quad x^2+y^2=\frac{M}{2\pi V_\infty}$$

由此可知，零流线是 x 轴和圆心在坐标原点，半径为 $r_0=\sqrt{\frac{M}{2\pi V_\infty}}$的圆周。

在 $y=0$，$x=\pm\sqrt{\frac{M}{2\pi V_\infty}}=\pm r_0$ 处有 $v_x=0$，$v_y=0$，因此，零流线圆周上 $y=0$ 的点是驻点，图中 S_1 为前驻点，S_2 为后驻点。流线在速度为零的前驻点处分成两股，沿上、下圆柱面流到后驻点 S_2 汇合。

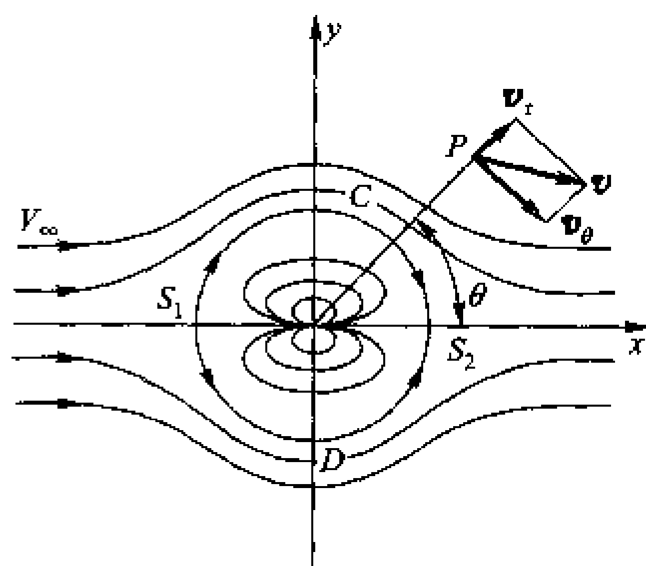


图　6-11

由于流体不能从里面或外面穿过零流线，因此可以把零流线看作为固体边界，即用半径为 r_0 的圆柱体代替零流线，在理想流体流动的情况下，圆柱体外的流场将保持流动的原状而不受影响，因此，上述叠加得到的流动为理想流体绕圆柱流动。

若以柱坐标形式表示，对任意点 $P(x,y)$，速度势函数和流函数为

$$\varphi = V_\infty r\cos\theta + \frac{M}{2\pi}r\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$= V_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\theta \tag{6-54}$$

$$\psi = V_\infty r\sin\theta - \frac{M}{2\pi}\frac{r\sin\theta}{r^2}$$

$$= V_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta \tag{6-55}$$

速度分量为

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos\theta \tag{6-56}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin\theta \tag{6-57}$$

在圆柱面上 $r = r_0$ 时，得

$$\left.\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= -2V_\infty \sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{6-58}$$

上式说明，沿圆柱体表面流体只有切线方向的速度，没有径向速度，即组合流动紧贴圆柱表面，既没有流体穿入，也没有脱离圆柱面。

对前驻点 S_1　$\theta = \pi$，$v_\theta = 0$

对后驻点 S_2　$\theta = 0$，$v_\theta = 0$

在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 处，$v_{\theta\max} = \mp 2V_\infty$，即在该处的速度达到最大值，等于无穷远处速度的二倍，该值与圆柱体的半径无关。负号表示流动速度方向与 θ 角反向。

圆柱体表面上任意点流动速度的绝对值为

$$v = v_\theta = 2V_\infty |\sin\theta|$$

沿圆柱体表面的速度分布表示在图6-12中。

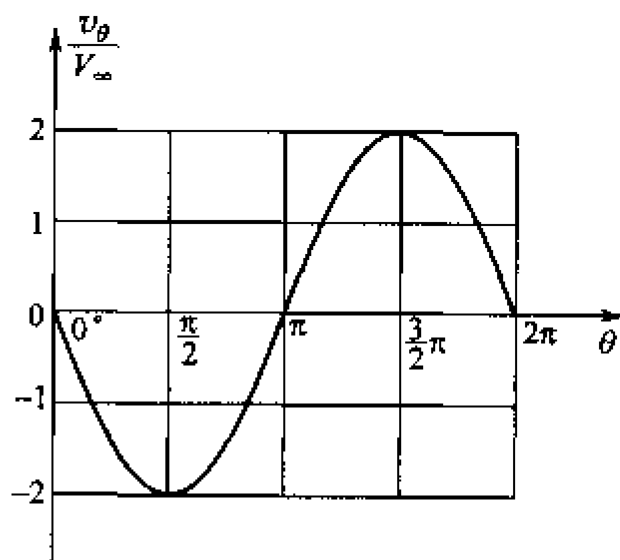


图 6-12

沿包围圆柱体的任意周线的速度环量为

$$\Gamma = \oint v_\theta \mathrm{d}l = \int_0^{2\pi} -V_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r \sin\theta \mathrm{d}\theta = 0$$

所以平行流与偶极流叠加得到的流动为无环量绕圆柱流动。

3. 压强分布规律

对于有势流动，沿圆柱表面的压强分布规律由伯努利方程求得。设无穷远处流体的速度为 V_∞，压强为 p_∞，柱体表面任意点的速度为 v_θ，压强为 p_θ，则有

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p_\theta + \frac{\rho v_\theta^2}{2}$$

得

$$p_\theta = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}(1 - 4\sin\theta) \tag{6-59}$$

工程中常以无因次压强因数表示圆柱体上任一点处的压强，而无因次压强因数分布规律不受 V_∞ 和 p_∞ 的影响，其定义为

$$C_p = (p_\theta - p_\infty)/\frac{\rho}{2}V_\infty^2 = 1 - 4\sin^2\theta \tag{6-60}$$

由式(6-60)可见，无因次压强因数既与圆柱体的半径无关，也与 V_∞ 和 p_∞ 无关，而仅与 θ 角有关。当 $\theta = 0$（S_2 点处）和 $\theta = \pi$（S_1 点处）时，$C_p = 1$，这时压强具有最大值，即 $p_{S_1} = p_{S_2} = p_\infty + \rho V_\infty^2/2$；当 $\theta = \pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，$C_p = -3$，此时压强具有最小值，即 $p_C = p_D = p_\infty - \frac{3}{2}\rho V_\infty^2$。沿圆柱表面压强因数 C_p 的分布表示在图6-13中，θ 从后驻点 S_2 算起沿逆时针方向增加。其中虚线表示亚临界的(*subcritical*)，点划线表示超临界的(*supercritical*)。上述在柱体表面上速度和压强的变化情况，可以用伯努利方程动能与压能的相互转化加以解释。

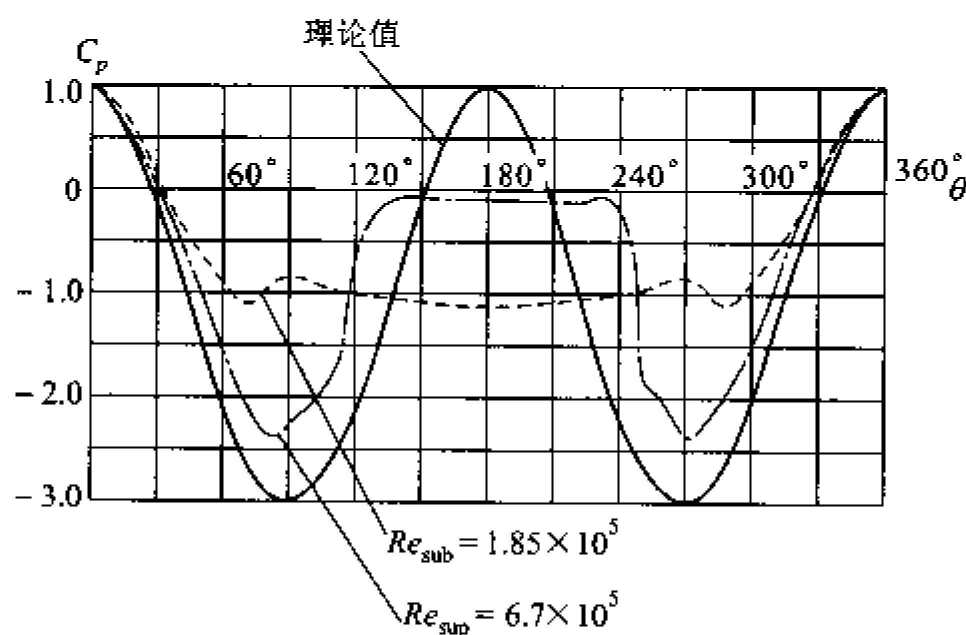


图　6-13

从上面分析可知，压强沿圆柱体对称分布，流体在圆柱体表面上压强合力等于零，下面给予证明。

如图6-14所示，作用在单位长度柱体表面微小面积 $dS = r_0 d\theta$ 上总压力为

$$dF = p_\theta r_0 d\theta$$

dF 沿 x 和 y 轴向的分量为

$$dF_x = -p_\theta r_0 \cos\theta d\theta \tag{6-61}$$

$$dF_y = -p_\theta r_0 \sin\theta d\theta \tag{6-62}$$

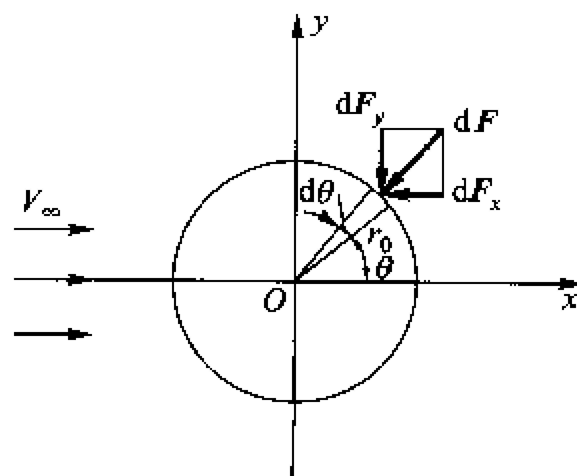


图　6-14

式中的负号考虑当 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 为正时，$\mathrm{d}F_x$ 和 $\mathrm{d}F_y$ 正好与 x 和 y 轴的方向相反。

将式(6-59)代入上二式，分别得到总压力沿着 x 和 y 轴方向的分量

$$F_D = F_x = -\int_0^{2\pi}\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)\right]r_0\cos\theta\mathrm{d}\theta = 0 \quad (6-63)$$

$$F_L = F_y = -\int_0^{2\pi}\left[p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2(1-4\sin^2\theta)\right]r_0\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0 \quad (6-64)$$

由此可见，流体作用在圆柱表面上的压强合力为零，即圆柱体上既无平行于来流方向的阻力作用，也无垂直于来流方向的升力作用。只要势流流经物体时不形成旋涡或分离，这一结论可以推广到任意物体的绕流。因此，假使在理想流体的均匀恒定流动中放置任一物体，而流过此物体时既不分离，也没有形成环量，则流体作用在物体上的压强合力应等于零，即该物体在流场中不受阻力作用。这一理论推得的结果与观察实验得到的结果有很大矛盾，1750 年法国科学家达朗贝尔首先发现了这一矛盾，称为达朗贝尔佯谬。

理想流体的假定引起了这一矛盾。实际上，当流体绕流物体时，由于实际流体或大或小都有粘性，紧贴柱面处存在边界层，固体边壁附近摩擦阻力的影响不能忽略，不应再看成是理想流体。另外，一般在后半个柱面处，流体不再贴着柱体而发生分离，在柱体后面形成旋涡区，对柱体产生阻力。

§6-6 流体对圆柱体的有环量绕流

1. 速度势函数和流函数

平行流对圆柱体的有环量绕流，由流体对圆柱体的无环量绕流与点涡感生的纯环流叠加而成。当流体绕物体的流动有环量时，速度和压力的对称性被破坏，将出现压强的合力，环量的生成是产生合力的根源。

平行流对圆柱体有环量绕流的速度势函数为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = V_\infty r\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad (6-65)$$

速度环量以顺时针方向为负，逆时针方向为正。

流函数为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = V_\infty r\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \quad (6-66)$$

当 $r=r_0$ 时，$v_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$，即沿着 $r=r_0$ 的圆周只有切线方向的速度。而

这时 $\psi=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r_0=C$，即 $r=r_0$ 的圆周是一条流线，没有流体从流线流入或穿出，将这条流线作为圆柱体周线时，满足平行流绕圆柱流动的边界条件。

当 $r=\pm\infty$ 时，$v_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=V_\infty$，$v_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$，说明虽是有环量绕流，但在无穷远处仍然保持原来的平行流，也满足了在无穷远处的边界条件。

由于在圆柱面上和无穷远处，边界条件都得到了满足，所以函数 φ 和 ψ 就是所研究问题的解。

2. 速度场

在流场中任意一点有

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=V_\infty\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{6-67}$$

$$v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-V_\infty\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{6-68}$$

当 $r=r_0$ 时，在圆柱面上得到

$$\begin{cases}v_r=0\\ v_\theta=-2V_\infty\sin\theta-\dfrac{\Gamma}{2\pi r_0}\end{cases} \tag{6-69}$$

由式(6-69)可知，在图示流动方向和顺时针方向环量下，在圆柱体上部，平行流绕圆柱体的速度方向与环流的速度方向相同，叠加后上部速度增加，而圆柱体下部，平行流与环流速度方向相反，叠加后速度降低。

令 $v_\theta=0$，求得速度为零的驻点的相位角为

$$\sin\theta_S=-\frac{\Gamma}{4\pi r_0V_\infty} \tag{6-70}$$

可见，当 $\Gamma=0$ 时，$\theta_S=0$ 和 π，即驻点为 x 轴与圆柱面的两个交点 S_1 和 S_2，这是平行流对圆柱体的无环量绕流；

当 $0<\Gamma<4\pi r_0V_\infty$ 时，$|\sin\theta_S|<1$，即有 $\theta_S=-\theta$ 和 $\theta_S=(\pi+\theta)$ 两个驻点，两个驻点在柱面上，且对称于 y 轴，位于第三和第四象限中（如图 6-15a 所示的 S_1 和 S_2 点）。在 V_∞ 不变的情况下，随环量 Γ 的增加，S_1 和 S_2 点逐渐靠近；

当 $\Gamma=4\pi r_0V_\infty$ 时，$\sin\theta_S=1$，两个驻点重合为一点，位于 y 轴上 $(0,-r_0)$ 处，如图 6-15b 所示；

当 $\Gamma>4\pi r_0V_\infty$ 时，$|\sin\theta_S|>1$，θ_S 没有解，即圆柱面上已不存在驻点。这表明驻点已离开了圆柱表面，位于圆柱面外 y 轴上的某一点（图 6-15c）。若令式(6-67)和(6-68)的 $v_r=0$ 和 $v_\theta=0$，可以得到位于 y 轴上的两个驻点，

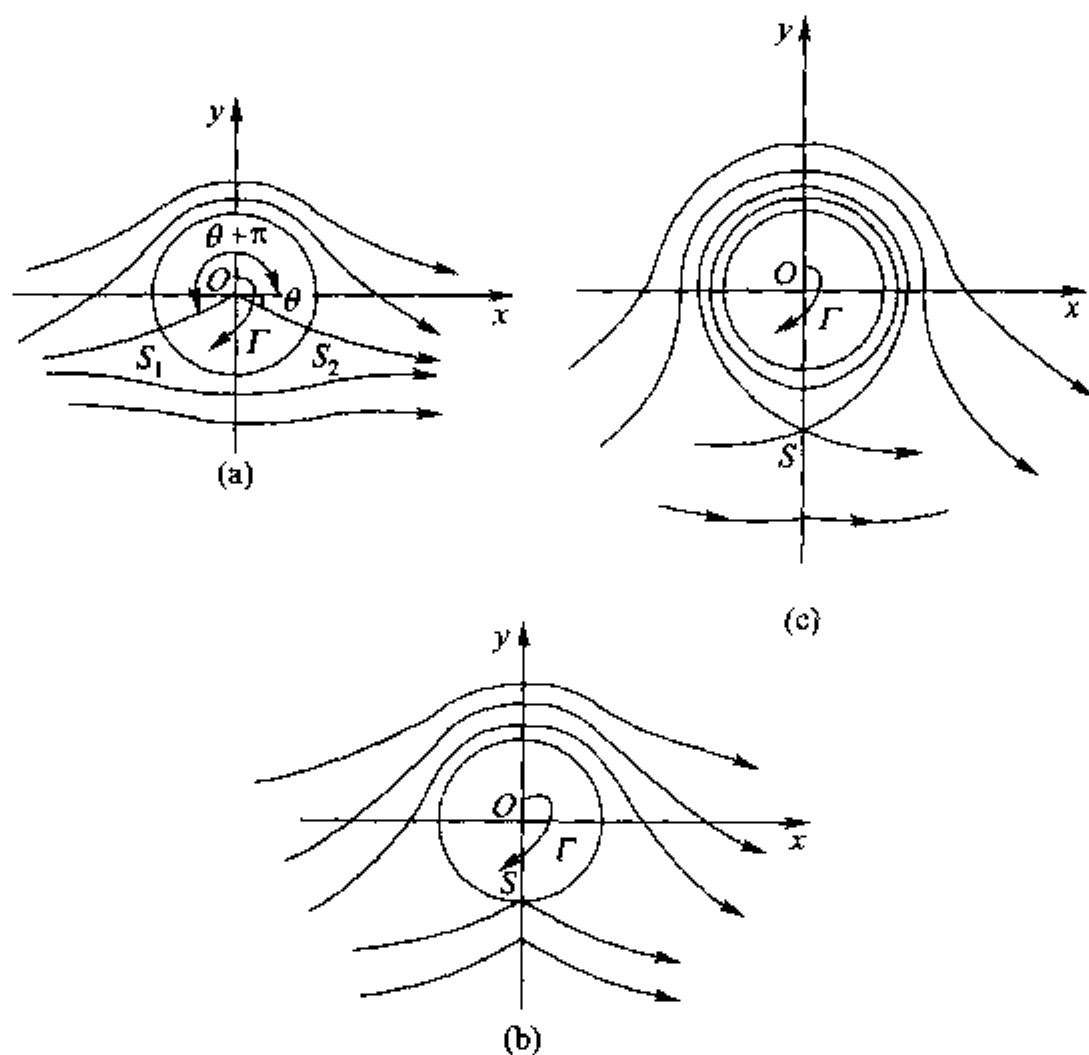


图 6-15

一个在圆柱体外，另一个在圆柱体内。但圆柱体内的驻点对所讨论的绕圆柱流动没有意义，绕流流场由经过圆柱外驻点 S 的闭合流线划分为内、外两个区域，外部区域为平行流绕圆柱的有环流的流动，而在闭合流线和圆柱面之间的绕流，则是自成闭合环流。

由上述讨论可见，驻点的位置决定于 $\Gamma/4\pi r_0 V_\infty$，而在圆柱体半径 r_0 和无穷远来流速度给定的情况下，驻点的位置只取决于环量的大小，随 Γ 增加，驻点逐渐下移。

3. 压强分布

因为流体是有势流动，由拉格朗日积分，在整个流场中有

$$\rho g z + p + \frac{\rho v^2}{2} = C$$

质量力忽略不计时，对无穷远处和圆柱体表面上两点列伯努利方程得

$$\begin{aligned} p_\theta &= p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho v_\theta^2}{2} \\ &= p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho}{2}\left[4V_\infty^2 \sin^2\theta + 2V_\infty \frac{\Gamma}{\pi r_0}\sin\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi r_0^2}\right] \end{aligned}$$

$$= p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}\left[1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2\right] \tag{6-71}$$

柱体表面上的无因次压强分布规律为

$$C_p = \frac{p_\theta - p_\infty}{\rho v_\infty^2/2} = 1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2 \tag{6-72}$$

由式(6-71)和(6-72)可知，圆柱体上的压强及其分布，不仅取决于无穷远来流速度 V_∞和 θ 角，而且与环量 Γ 的大小和方向有关，对顺时针方向的环量，圆柱体上半部各点的压强小于下半部各点的压强。

4. 作用在圆柱体上的合力

因为是理想流体绕流，圆柱体表面上没有粘滞阻力，而只有流体动压强作用。加上点涡环流后，破坏了流动对 x 轴的对称性，但相对于 y 轴的对称性没有被破坏，所以作用于圆柱体表面上 x 方向的阻力为零，y 方向的升力不等于零。

作用于单位长度圆柱体微元面积 dA 上的压力为 $p_\theta r_0 \mathrm{d}\theta$，所以沿整个圆柱体表面上的阻力为

$$\begin{aligned} F_x = F_\mathrm{D} &= \int_0^{2\pi} - p_\theta r_0 \cos\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}\left[1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2\right]\right\} r_0\cos\theta \mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned} \tag{6-73}$$

升力为

$$\begin{aligned} F_y = F_\mathrm{L} &= -\int_0^{2\pi} p_\theta r_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\left\{p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2}\left[1 - \left(2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty}\right)^2\right]\right\} r_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= -r_0\left(p_\infty + \rho V_\infty^2/2 - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2}\right)\int_0^{2\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta + \\ &\quad \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta + 2 r_0 \rho V_\infty^2 \int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} \\ &= \rho V_\infty \Gamma \end{aligned} \tag{6-74}$$

式(6-74)就是著名的库塔-儒科夫斯基(Kutta-Zhoukowski)升力公式。上面的计算结果表明，理想流体对圆柱体作有环量绕流时，流体作用在圆柱体上的阻力等于零；而作用在单位长度圆柱体上的升力等于流体密度、无穷远来流

速度和速度环量三者的乘积。当 V_∞ 不变时，环量 Γ 越大，升力就越大，反之亦然。

升力 $\boldsymbol{F}_L$ 的方向由下述方法确定：将来流速度 $\boldsymbol{V}_\infty$ 的方向沿逆速度环量方向转 90°所指的方向就是升力方向（如图 6-16 所示）。

飞机能够在空中飞行，是由于机翼上所产生的升力作用。无论圆柱体或机翼，产生升力的根本原因都在于绕流流动的不对称性。

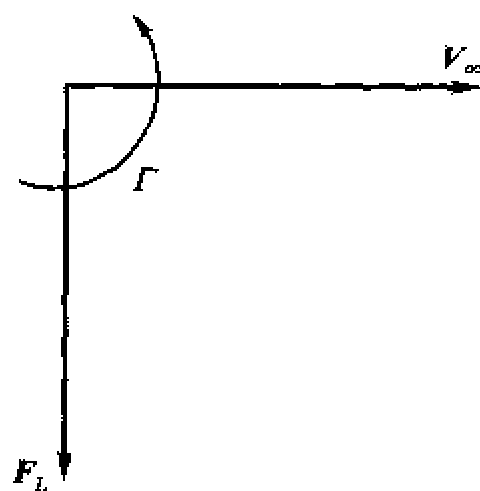


图 6-16

绕流圆柱体的不对称流动由圆柱体的旋转引起，圆柱的旋转作用产生速度环量 Γ。早在 1852 年马格努斯（Magnus, G）就在实验中发现了这一侧向的升力，它使圆柱体产生横向运动，因此这一现象又称为**马格努斯效应**。在日常生活和体育运动中有很多属于这种现象的例子。训练有素的乒乓球运动员可以打出具有强烈旋转的“弧圈球”和“侧旋球”，使球的运动路线“怪异”就是利用了这一原理。足球运动员踢出强烈旋转的“香蕉球”，使球的飞行轨迹为曲线，绕过人墙后飞入球门也是应用了这一原理。

绕机翼流动的不对称性是由无环量绕流流动与一个产生环量的旋涡运动叠加的结果。绕机翼无环量流动的图形如图 6-17a 所示，流体沿翼型的上、下表面流动，沿下表面流动的流体绕过后缘点，与沿上表面流动的流体会合形成后驻点。一般情况下，理想流体绕流后缘尖端时，由于该点的曲率半径等于零，后缘点处的速度将为无穷大。若在机翼外面叠加一个如图 6-17b 所示的旋涡环流运动，就能够得到流体绕流机翼时的平滑流动，即绕机翼流动可看作机翼的无环量绕流与一个旋涡运动的叠加（如图 6-17c）。以这种理论得到的

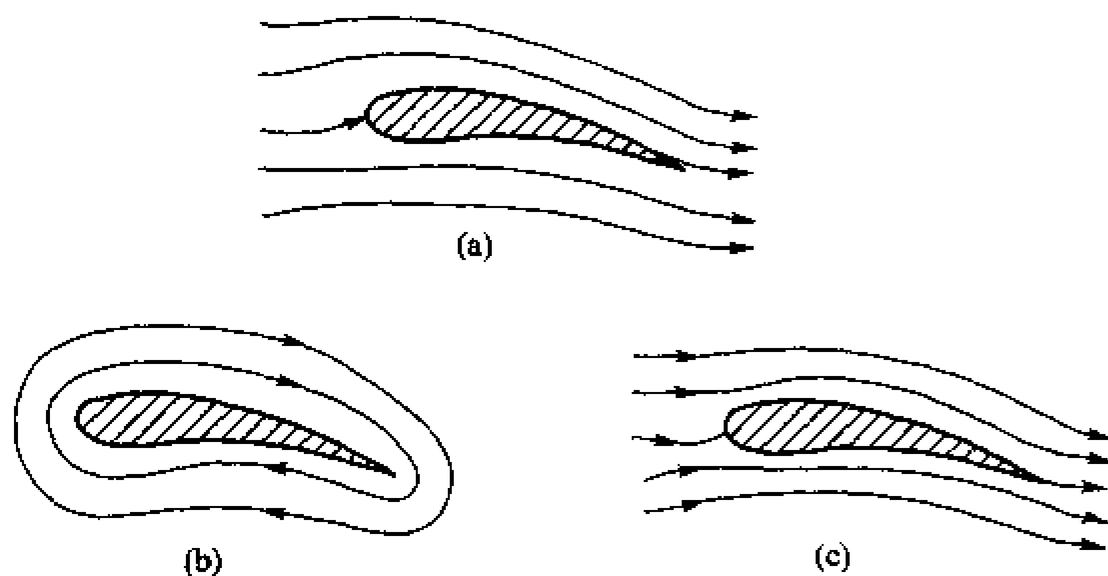


图 6-17

理论机翼所算出的理论升力和实际升力在平滑绕流时很好地符合一致。

§6-7 绕圆球流动

流体绕球体的流动是一个**空间流动**问题。但是，圆球运动中存在旋转对称轴线，而所有包含旋转对称轴线的平面内的流动完全相同，因此，可以将空间流动问题转化为包含旋转对称轴线的平面流动，使绕球体流动的求解简化。

我们曾谈及坐标系的合理选取能够简化问题的求解。这里选用球坐标系，取球心为坐标原点，并使 z 轴与无穷远来流速度平行，这样做可以减少变量，简化方程。这时，变量与经度角无关，使绕流问题变成对 z 轴的对称流动。

1. 空间点源、点汇和偶极流

若在坐标原点放置一点源，向四方放射状流动，流量为 q，则对于任意半径为 R 的球面上，有

$$q = 4\pi R^2 v_R \tag{6-75}$$

对于理想流体的轴对称有势流动，在球坐标系中，点源流动为

$$\begin{cases} v_R = \dfrac{\partial \varphi}{\partial R} = \dfrac{q}{4\pi R^2} \\ v_\theta = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \tag{6-76}$$

速度势函数 φ 只是坐标 R 的函数，所以

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{q}{4\pi R^2}\mathrm{d}R$$

积分得

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi R} \tag{6-77}$$

对于点源流动为 $+q$，因此速度势函数

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi R}$$

对于点汇流动为 $-q$，因此速度势函数

$$\varphi = \frac{q}{4\pi R}$$

若将空间点源置于 $-z$ 轴上，点汇置于 $+z$ 轴上(见图 6-18)，得叠加流动的速度势函数为

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

式中 R_1，R_2 为流场中任意点 P 到点源和点汇的距离。

设点源和点汇间距离为 $\mathrm{d}z$，当 $\mathrm{d}z \to 0$ 时，若 $q \to \infty$，参照平面偶极流的情形，令

$$\lim_{\substack{\mathrm{d}z \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\mathrm{d}z = M$$

为一有限值，就能够得到类似于平面势流的**空间偶极流**，称常数 M 为空间偶极流的偶极距。当 $\mathrm{d}z \to 0$ 时，R_1 与 R_2 接近为 R，则

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi}\left[-\mathrm{d}\left(\frac{1}{R}\right)\right] = \frac{q}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{R}\right)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$$

式中 $R = \sqrt{r^2 + z^2}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\cos\theta}{R^2}$$

因而得到位于坐标原点，其方向指向负 z 轴方向(从汇到源)，强度为 M 的空间偶极流产生流动的速度势函数为

$$\varphi = \lim_{\substack{\mathrm{d}z \to 0 \\ q \to \infty}}\left(\frac{q}{4\pi}\frac{\cos\theta}{R^2}\mathrm{d}z\right) = \frac{M}{2\pi R^2}\cos\theta \tag{6-78}$$

一般空间流动中不存在流函数，但绕球体的轴对称流动类同于平面流动，存在流函数。可以用与平面势流类似的方法，由**轴对称流动**的连续性方程，得到流函数与速度势函数的关系为

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = -\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = R^2\sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial R}$$

即

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \sin^2\theta\frac{M}{4\pi R^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\sin\theta\cos\theta\frac{M}{2\pi R}$$

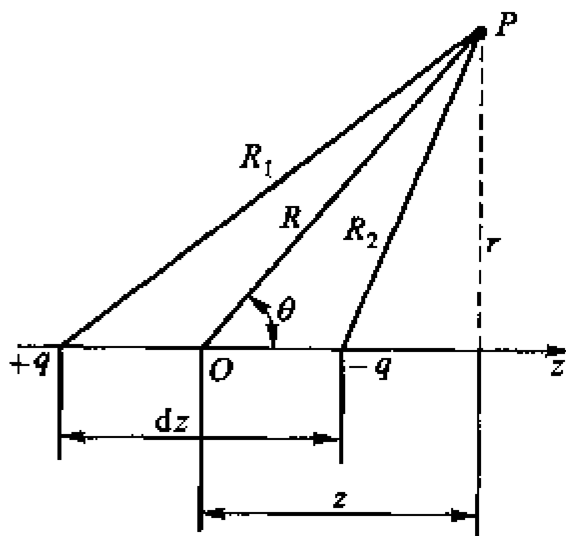


图 6-18

对上面的方程组积分，并令积分常数等于零，得到偶极流的流函数为

$$\psi = \frac{M\sin^2\theta}{4\pi R} \tag{6-79}$$

2. 平行势流与空间偶极流的叠加——绕球体流动

设无穷远平行来流速度 V_∞ 与 z 轴平行(图 6-19)。

在球坐标系中，平行流

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_\infty \cos\theta = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

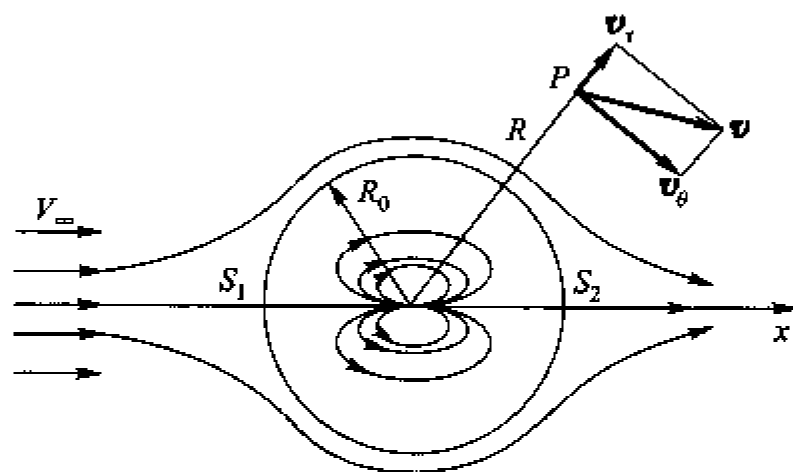


图 6-19

$$v_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V_\infty \sin\theta = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial R}$$

积分上面的方程组，得到平行流的流函数

$$\psi = \frac{1}{2}V_\infty R^2 \sin^2\theta \tag{6-80}$$

将平行流与偶极流叠加，得到流函数

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}V_\infty R^2\sin^2\theta - \frac{M}{4\pi R}\sin^2\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}V_\infty R^2 - \frac{M}{4\pi R}\right)\sin^2\theta\end{aligned} \tag{6-81}$$

与绕圆柱平面势流相同，令 $\psi=0$，得到零流面方程

$$\psi = \left(\frac{1}{2}V_\infty R^2 - \frac{M}{4\pi R}\right)\sin^2\theta = 0$$

零流面是球面方程

$$\frac{1}{2}V_\infty R^2 - \frac{M}{4\pi R} = 0$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{M}{2\pi V_\infty}} = R_0$$

以及 Oz 轴方程，$\sin^2\theta = 0$，即 $\theta = 0,\ \pi$。

R_0 为球面半径。显然，偶极流的偶极矩为

$$M = 2\pi V_\infty R_0^3$$

同样，平行流与偶极流叠加得到的速度势函数为

$$\varphi = V_\infty z + \frac{M}{4\pi R^2}\cos\theta = \left(V_\infty R + \frac{M}{4\pi R^2}\right)\cos\theta \tag{6-82}$$

因此流场中任意点处的速度为

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(V_\infty - \frac{M}{2\pi R^3}\right)\cos\theta \tag{6-83}$$

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{R}\left(V_\infty R + \frac{M}{4\pi R^2}\right)\sin\theta \\ &= -V_\infty\left(1 + \frac{M}{4\pi V_\infty R^3}\right)\sin\theta \end{aligned} \tag{6-84}$$

对于 $R = R_0$ 的球面(零流面)上，在任意 θ 角处均有 $v_r = 0$，即没有流体从球体内、外穿过球面流出或流入。因此我们将 $R = R_0$ 的球面当作固体壁面时，不会影响整个流场的流动，这样，证明了平行流与空间偶极流叠加得到的是平行流绕球体流动。

若将偶极矩代入式(6-81)中，得到绕半径为 R_0 的球体流动的流函数为

$$\psi = \frac{1}{2}V_\infty R^2\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]\sin^2\theta \tag{6-85}$$

速度势函数

$$\varphi = V_\infty R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]\cos\theta = V_\infty z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right] \tag{6-86}$$

流场中任意点的速度

$$v_r = V_\infty\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]\cos\theta \tag{6-87}$$

$$v_\theta = -V_\infty\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right]\sin\theta \tag{6-88}$$

当 $R = R_0$，得到球面上的速度分布规律为

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = -\frac{3}{2}V_\infty \sin\theta$$

当 $R \to \infty$ 时，有

$$v_r = V_\infty \cos\theta,\quad v_\theta = -V_\infty \sin\theta$$

因此，绕球体流动流场中的速度分布可以看成由两部分组成：一部分是未受球体扰动的平行直线流动；另一部分是速度分布式中的后半部分，它是由偶极流所表示的球体对平行直线流的扰动。显然，随 R 增加，即远离球体，扰动速度就迅速减小，它与距离的立方成反比。

在球面上，$v_\theta=0$ 的点是驻点，得到驻点 S_2 和 S_1 的相位角为

$$\theta=0,\ \pi$$

当 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$时，得到球面上最大速度为

$$(v_\theta)_{\max}=\mp\frac{3}{2}V_\infty$$

可以看到，球面上的最大速度只为来流速度的$\frac{3}{2}$倍，而在平面绕圆柱流动情况下，最大速度为来流速度的2倍。

球面上的压强分布，根据伯努利方程，有

$$p_\theta=p_\infty+\frac{\rho}{2}(V_\infty^2-v_\theta^2)$$

因此，球面上无因次压力因数为

$$C_p=\frac{p_\theta-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\left(\frac{v_\theta}{V_\infty}\right)^2=1-\frac{9}{4}\sin^2\theta \tag{6-89}$$

在 $\theta=0°$，π 处，是驻点 S_1，S_2，得

$$C_{p\max}=1$$

$$\theta=\pm\frac{\pi}{2}\text{时，有}$$

$$C_{p\min}=-\frac{5}{4}$$

由上面可以看出，理想流体绕流球体时，球体表面上压强分布对称，因此圆球在理想流体中作等速运动时没有任何阻力作用，这就是在绕圆柱流动中谈及的著名的达朗贝尔佯谬。

§6-8 复位势和复速度

在不可压缩平面势流中，存在速度势函数 $\varphi(x,y,t)$和流函数 $\psi(x,y,t)$，共轭调和函数 φ 和 ψ 间存在下面关系

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases} \tag{6-90}$$

式(6-90)在复变函数理论中称为柯西-黎曼条件(Cauchy-Riemann，简称C-R条件)。若将实变函数 φ 和 ψ 组成复数式

$$W(z)=\varphi+\mathrm{i}\psi \tag{6-91}$$

则 W 是复变数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数，即

$$W=f(z)=\varphi+\mathrm{i}\psi=f(x+\mathrm{i}y)$$

称函数 W 为平面有势运动的特征函数，又称为复位势。

引入 W 使我们将决定两个实变函数 φ 和 ψ 的问题，简化为确定一个复位势函数 W，只要分开 W 的实部和虚部，就能得到 φ 和 ψ。

因为 W 是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数，函数 $f(z)$ 在流域内每一点上均有确定的导数，且导数与微分的方向无关，因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}&=\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-\mathrm{i}v_y=\frac{\partial W}{\partial y}\\&=v(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\\&=|v|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\overline{V}\end{aligned} \tag{6-92}$$

称 $\overline{V}$ 为复速度，它是速度 $\overline{v}=v_x+\mathrm{i}v_y$ 的共轭复数。$\overline{V}$ 与 $\overline{v}$ 大小相同，幅度大小相等但符号相反，即 $\overline{V}$ 与 $\overline{v}$ 对称于 x 轴(见图 6-20)。另外，W 可相差一个任意常数而不影响速度的计算。

$$\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|=|v|,\ \arg\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=-\theta \tag{6-93}$$

根据解析函数的性质，它的导数也是解析函数，所以复速度也是解析函数。

采用一个复变量函数 z 代替了 $(x+\mathrm{i}y)$，可以使运算大为简化。若流动确定，即得到了 φ 和 ψ，则 W 完全确定，或者反之，若确定了复位势函数 W，则流动也就完全确定。由 W 求出的是复速度 $\overline{V}$，但由 $\overline{V}$ 可求得 $\overline{v}$。

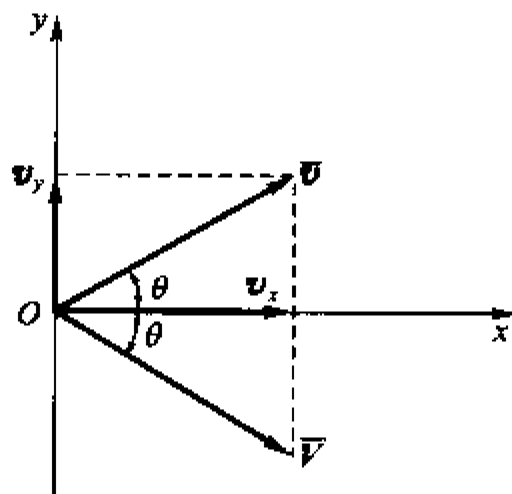


图 6-20

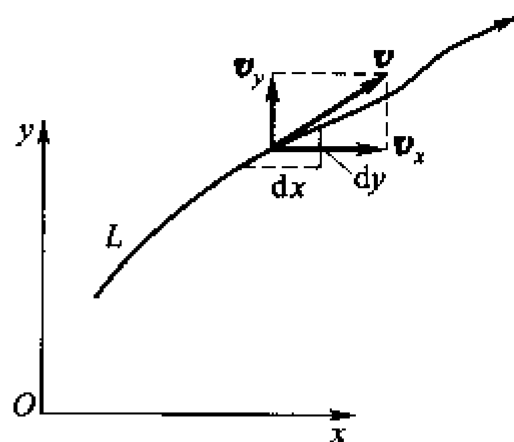


图 6-21

下面讨论复速度积分的意义。

如图 6-21 所示，在流动空间取一曲线 L，沿 L 的线积分有

$$\int_L \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z = \int_L (v_x - \mathrm{i}v_y)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

$$= \int_L (v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_L (v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x) = \Gamma + \mathrm{i}q \qquad (6-94)$$

由式(6-94)可知，复速度沿某一曲线段 L 的线积分，实部为沿线段 L 的速度环量，虚部为通过此曲线的流量。因此，今后只要作此线积分，然后分开实部和虚部，就可分别得到 Γ 和 q。

对于任意封闭围线 L，设其内部没有源和汇，也没有点涡，则对于不可压缩流体，得

$$\oint_L \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z = \oint_L [(v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x)] = 0$$

若 L 中存在转动的旋涡，线积分等于 Γ；若 L 中没有旋涡，仅有点源或点汇，则线积分等于放出或吸收的流量。

下面我们用复位势表示已讨论过的平面势流。

（1）平行直线流动

$$\varphi = v_x x + v_y y,\quad \psi = v_x y - v_y x$$

$$W = \varphi + \mathrm{i}\psi = (v_x x + v_y y) + \mathrm{i}(v_x y - v_y x)$$

$$= (v_x - \mathrm{i}v_y)(x + \mathrm{i}y)$$

$$W = \bar{V}z \qquad (6-95)$$

（2）源与汇

$$\varphi = \pm\frac{q}{2\pi}\ln r,\qquad \psi = \pm\frac{q}{2\pi}\theta$$

$$W = \varphi + \mathrm{i}\psi = \pm\frac{q}{2\pi}(\ln r + \mathrm{i}\theta)$$

$$= \pm\frac{q}{2\pi}(\ln r + \ln \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \pm\frac{q}{2\pi}\ln(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$$

$$W = \pm\frac{q}{2\pi}\ln z \qquad (6-96)$$

（3）点涡

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta,\qquad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$W = \varphi + \mathrm{i}\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}(\theta - \mathrm{i}\ln r) = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}(\ln r + \mathrm{i}\theta)$$

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln z \qquad (6-97)$$

（4）偶极流

$$\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2},\quad \psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$W = \varphi + \mathrm{i}\psi = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{x^2 + y^2}(x - \mathrm{i}y)$$

$$=\frac{M}{2\pi}\frac{x-\mathrm{i}y}{(x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)}$$

$$W=\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{6-98}$$

(5) 源环流与汇环流

$$\varphi=\pm\frac{q}{2\pi}\ln r+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta,\qquad \psi=\pm\frac{q}{2\pi}\theta-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$W=\varphi+\mathrm{i}\psi=\pm\frac{q}{2\pi}\ln r+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta\pm\frac{\mathrm{i}q}{2\pi}\theta-\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$=\pm\frac{q}{2\pi}\ln z+\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln z$$

$$W=\frac{\pm q-\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln z \tag{6-99}$$

(6) 无环量绕圆柱流动

它是平行流与偶极流的叠加，则

$$W=V_\infty z+\frac{M}{2\pi z} \tag{6-100}$$

因为，偶极矩 $M=2\pi V_\infty r_0^2$，所以 $W=V_\infty\left(z+\frac{r_0^2}{z}\right)$

(7) 有环量绕圆柱流动

它是平行流、偶极流与点涡的叠加，则

$$W=V_\infty\left(z+\frac{r_0^2}{z}\right)+\frac{\Gamma\mathrm{i}}{2\pi}\ln z \tag{6-101}$$

§6-9 作用力与作用力矩的布拉修斯公式

如图 6-22 所示，给出一个任意形状的无限长柱体，在 x，y 平面上的周线为 L，设流体对此柱体作二元无分离绕流。

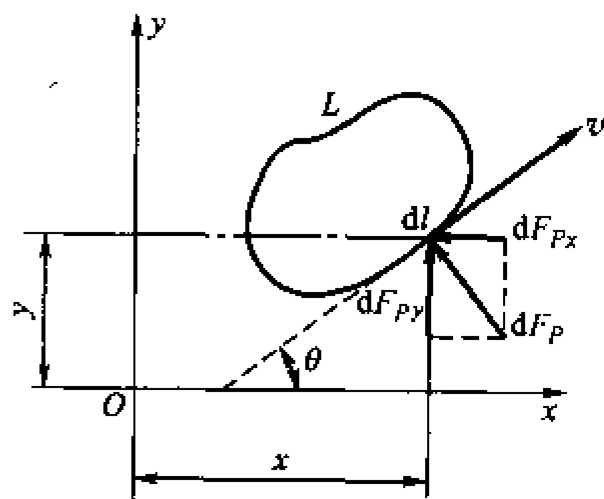


图 6-22

1. 作用力

在单位长度柱体壁面上取微元面积 $\mathrm{d}l\times1$，所受作用力为 $\mathrm{d}F_P=p\mathrm{d}l\times1$，将 $\mathrm{d}F_P$ 投影至 x 和 y 轴，然后分别进行积分

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}F_{Px}&=-p\mathrm{d}l\sin\theta=-p\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}F_{Py}&=p\mathrm{d}l\cos\theta=p\mathrm{d}x\end{aligned}\right\}$$

式中 θ——dl 的切线方向(速度 v 方向)与 x 轴夹角。

p——作用在柱体表面上的压强

于是

$$\left.\begin{aligned} F_{Px} &= \oint_L -p\,dy \\ F_{Py} &= \oint_L p\,dx \end{aligned}\right\} \tag{6-102}$$

在复平面中，作用力 F_P 及其共轭值 $\overline{F}_P$ 分别由下面两式定义

$$F_P = F_{Px} + iF_{Py} \tag{6-103}$$

$$\overline{F}_P = F_{Px} - iF_{Py} = -i\oint_L p\,(dx - idy) \tag{6-104}$$

物体表面上微元线段 dl 的复数表示式为

$$dz = dx + idy = dl \cdot e^{i\theta}$$

$$d\bar{z} = dx - idy = dl \cdot e^{-i\theta}$$

所以

$$d\bar{z} = dz e^{-2i\theta}$$

柱体外面流体是平面势流，柱体表面上沿着流线应用伯努里方程有

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = C \quad 或 \quad p = C - \frac{\rho v^2}{2}$$

于是式(6-104)变为

$$\overline{F}_P = -i\oint_L \left(C - \frac{\rho v^2}{2}\right)(dx - idy)$$

因为

$$i\oint_L C\,dx = 0,\ -\oint_L C\,dy = 0$$

所以

$$\overline{F}_P = i\frac{\rho}{2}\oint_L [v^2 e^{-2i\theta}]\,dz$$

即

$$\overline{F}_P = \frac{i\rho}{2}\oint_L \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz \tag{6-105}$$

式(6-105)称为计算作用力的布拉修斯(Blasius)公式。只要找到特征函数 W，就可以由上式求得合力的共轭值 $\overline{F}_P$，将实部和虚部分开，便可得到作用力在 x 和 y 轴上的投影 F_{Px} 和 F_{Py}。

2. 作用力矩

为求作用在无限长柱体上的力对坐标原点的力矩，将微元面积 $dl \times 1$ 上的作用力对原点取微元力矩为

$$dM = dF_{Px}x - dF_{Py}y = p\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$$

$$M = \oint_L p\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$$

因为

$$z\mathrm{d}\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y)$$
$$= (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\,(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$$

所以 $(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$是 $z\mathrm{d}\bar{z}$ 的实部。

对平面势流，由伯努利方程得 $p = C - \frac{\rho v^2}{2}$，于是

$$M = \oint_L \left(C - \frac{\rho v^2}{2}\right)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$$

因为
$$\oint_L C\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = C\oint_L \mathrm{d}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0$$

所以
$$M = -\frac{\rho}{2}\oint_L v^2\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)$$
$$= \mathrm{Re}\left[-\frac{\rho}{2}\oint_L v^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} z\mathrm{d}z\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[-\frac{\rho}{2}\oint_L \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2 z\mathrm{d}z\right] \tag{6-106}$$

式(6－106)是计算作用力矩的布拉修斯公式。Re[　　]符号表示取运算结果的实部。

现以有环量绕圆柱流动为例，说明式(6－105)和(6－106)的应用。

对有环量绕圆柱流动，复位势为

$$W = V_\infty\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) + \frac{\Gamma \mathrm{i}}{2\pi}\ln z$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = V_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma \mathrm{i}}{2\pi z}$$

式中 r_0 为圆柱体半径。

上式代入式(6－105)，得作用力为

$$\bar{F}_P = \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_L \left[V_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} + \frac{\Gamma \mathrm{i}}{2\pi z}\right)\right]^2 \mathrm{d}z$$
$$= \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_L \left[V_\infty^2\left(1 - \frac{2r_0^2}{z^2} + \frac{r_0^4}{z^4}\right) - \frac{\Gamma^2}{4\pi z^2} + \frac{V_\infty \Gamma \mathrm{i}}{\pi z} - \frac{V_\infty r_0^2 \Gamma \mathrm{i}}{\pi z^3}\right]\mathrm{d}z$$

因为上面积分式中只有包含$\frac{1}{z}$的项，才给出相对于极点 $z = 0$ 的留数，因

此有

$$\bar{F}_P=\frac{\mathrm{i}\rho}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{V_\infty\Gamma\mathrm{i}}{\pi}=-\mathrm{i}\rho V_\infty\Gamma \tag{6-107}$$

又因为 $\bar{F}_P=F_{Px}-\mathrm{i}F_{Py}$

所以 $F_{Px}=0\quad F_{Py}=\rho V_\infty\Gamma$

将$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)$代入式(6-106)，得作用力矩

$$M=\mathrm{Re}\left[-\frac{\rho}{2}\oint_L\left(V_\infty^2 z+V_\infty^2\frac{r_0^4}{z^3}-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z}\right.\right.$$
$$\left.\left.-2V_\infty^2\frac{r_0^2}{z}+V_\infty\frac{\Gamma\mathrm{i}}{\pi}-V_\infty\frac{\Gamma\mathrm{i}}{\pi}\frac{r_0^2}{z^2}\right)\mathrm{d}z\right]$$

由留数定理得到

$$M=\mathrm{Re}\left[\frac{\rho}{2}2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}+2V_\infty^2 r_0^2\right)\right]$$

因为括号中式子是一个虚数，对所要求的实部为 $M=0$，因此可以得出：作用在圆柱体上的合力 F_{Py}必定通过坐标原点，因此对坐标原点取矩得 $M=0$。

§6-10 库塔-儒科夫斯基定理

这一定理将绕圆柱有环量流动的圆柱体受力推广到任意形状的柱体。

设理想不可压缩流体作恒定平面有势流动，无穷远处流速为 V_∞，求绕流任意形状柱体时作用于柱体的升力和阻力。

设物体周线 L 内任意一点为坐标原点，作一圆周 C 包围物体。则$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$在 L 外部的整个流动域内都为变数 z 的解析函数，式(6-105)右边的积分可沿任意包含 L 在内的 C 围线进行。于是，函数$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$可在 C 上及 C 以外的整个流域内展开成只含 z 的负整数幂项的罗朗级数，有

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\bar{V}=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\cdots$$

当 $z\to\infty$时，式中的常数项显然是无穷远处的共轭速度 $A_0=\bar{V}_\infty$。

由于流体不可压缩，通过围线 L 的体积流量为零，即

$$\oint_L\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z=\Gamma_C$$

Γ_C 以逆时针方向积分为正。将复速度$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)$代入上式，并根据留数定理

可求出 A_1，A_2，$\cdots A_n\cdots$，于是

$$\Gamma_C = \oint_L \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots \right) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} A_1$$

所以

$$A_1 = \frac{\Gamma_C}{2\pi \mathrm{i}}$$

将 A_0，A_1 代入原级数

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \bar{V}_\infty + \frac{\Gamma_C}{2\pi \mathrm{i} z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots \tag{6-108}$$

将式(6-108)代入式(6-105)有

$$\bar{F}_P = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\oint_C \left(\bar{V}_\infty + \frac{\Gamma_C}{2\pi \mathrm{i} z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots \right)^2 \mathrm{d}z$$

$$= \frac{\mathrm{i}\rho}{2}\oint_C \left(\bar{V}_\infty^2 - \frac{\Gamma_C^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{A_2^2}{z^4} + \cdots + \frac{\bar{V}_\infty \Gamma_C}{\pi \mathrm{i} z} + \frac{2\bar{V}_\infty A_2}{z^2} + \frac{\Gamma_C A_2}{\pi \mathrm{i} z^3} + \cdots \right) \mathrm{d}z$$

根据留数定理得到

$$\bar{F}_P = 2\pi \mathrm{i}\left[\mathrm{i}\frac{\rho}{2}\frac{\bar{V}_\infty \Gamma_C}{\pi \mathrm{i}} \right]$$

所以

$$\bar{F}_P = \mathrm{i}\rho \bar{V}_\infty \Gamma_C$$

$$F_P = -\mathrm{i}\rho V_\infty \Gamma_C \tag{6-109}$$

式(6-109)中的 $-\mathrm{i}$ 说明力的方向由逆环量方向将 V_∞ 转过 $\pi/2$ 得到，若 x 方向与 V_∞ 方向相同，则由

$$F_P = F_{Px} + \mathrm{i}F_{Py} = -\mathrm{i}\rho V_\infty \Gamma_C$$

分开实部和虚部得到

$$F_{Px} = 0$$

$$F_{Py} = -\rho V_\infty \Gamma_C \tag{6-110}$$

所以

$$|F_P| = |\rho V_\infty \Gamma_C|$$

式(6-109)和(6-110)称为库塔-儒科夫斯基(Kutta-Zhoukowski)定理，即理想流体对任意形状柱体的作用力与无限远来流速度垂直，其方向为沿 V_∞ 指向逆速度环量 Γ_C 转 90°，大小为 $\rho V_\infty \Gamma_C$。

由定理可知，在一定的来流情况下，作用力 F_P 只与绕物体的速度环量大小有关，而且如用一强度为 Γ_C 的无限长直涡束来代替物体(翼型)，从作用力的观点来看，结果完全相同。另外，动力学问题依附于运动学问题，若能求出速度分布、$\mathrm{d}W/\mathrm{d}z$ 和 Γ_C 等表征运动学的参数，那么动力学问题也就解决了。

§6-11 环量 Γ 的确定、翼型后缘无分离绕流的假设

动力工程中，如压气机、风机、水泵，汽轮机和水轮机等流体机械中，广泛地采用着各种形状的叶片。它的横截面形状我们沿用机翼剖面的定义，称之为翼型。翼型一般都设计成圆头尖尾微有弯曲的流线形(如图 6-23 所示)。翼型所有内切圆心的连线称为翼型的中线，中线与翼型周线的交点分别称为前缘点和后缘点，连接前缘和后缘的直线 l 称为翼弦。

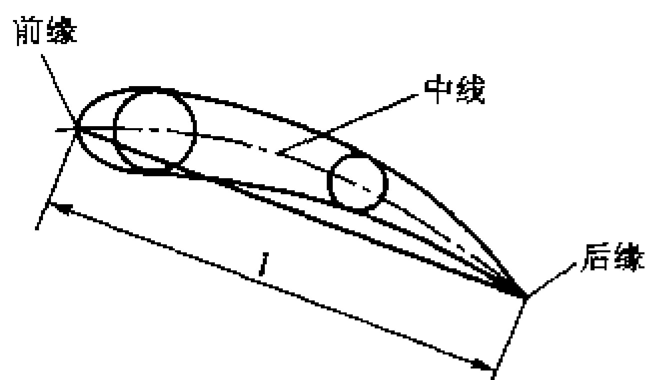


图 6-23

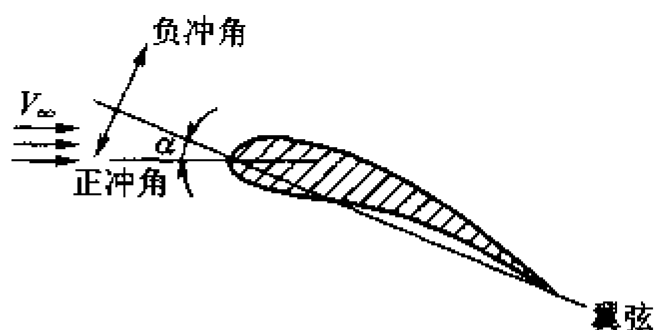


图 6-24

我们最感兴趣的是流体绕流翼型时相互间力的作用特性，即在某一来流下，作用在翼型上的阻力和升力特性，称为翼型的动力特性。无穷远来流速度 V_∞ 的方向与翼弦之间的夹角 α 称为冲角(如图 6-24 所示)。对给定的翼型，冲角和来流速度 V_∞ 的大小，对动力特性有重要影响。

如图 6-17a 所示，理想流体无穷远来流以一定冲角绕流翼型时，在翼型的前驻点分成两股，沿翼型上、下表面流向后缘。这时，根据冲角的不同，或者沿下表面的流体绕过后缘点，在上表面与沿上表面流动的流体在后驻点汇合；或者沿上表面流动的流体绕过后缘点，在下表面与沿下表面流动的流体在后驻点汇合；或者沿上、下表面流动的流体在后缘汇合，后缘点就是后驻点，在该点处流体速度为有限值，这时流体平顺地离开后缘，没有分离现象。在前两种绕流的情况下，由于后缘点的曲率半径等于零，流体绕过尖点时，在后缘点处形成无限大的速度，根据伯努利方程，该点处的压强将变成负无穷大的低压，这在物理上是不可能的。实际上，这种现象是不可能发生的，因为流体绕流后缘点时必然会发生分离，形成旋涡。

对于前两种绕流，在一定的来流下，改变冲角至某一值，可以做到使后驻点与后缘点重合，这时，流体平顺地流过后缘点，不发生分离。但是，符合这

一条件的冲角只有一个，冲角变大或变小，都将引起分离。因此，这种理想的无环量绕流，不能在一定的冲角范围内保持平顺绕流。在实际绕流中，能否在一定冲角范围内保持稳定的平顺绕流呢？实际上，对翼型的绕流是一种有环量绕流，平行流与环流叠加的结果，使后驻点移向后缘点，从而实现平顺绕流。

儒科夫斯基－恰普雷金假定：对于每一个有圆头、尖端后缘的翼型，在某一冲角范围内，流体绕流翼型表面时，将平顺地离开后缘点，速度为有限值。

这一假定已由实验证明。只有在有环量绕流的情况下，才可能有这样的平顺绕流。库塔－儒科夫斯基提出了升力与环量 Γ 的关系，而恰普雷金和库塔则解决了确定环量 Γ 的平顺流动条件，由此可以单值地确定环量 Γ 的数值。

在流体静止的情况下，绕翼型不可能存在环流。理想流体开始时只能是无环量绕过翼型流动，但是从前驻点分流沿翼型上、下两股流体在后缘会合时，因所经的路线不同，使两股流体有不同的速度，上、下两层流体形成间断面（见图 6－25a），即间断面处速度有跳跃式的变化。翼型尾部的这种间断面是不稳定的，只要遇到某种微弱的扰动，间断面就会波动，使流体作曲线运动，并以两层流体的平均速度（图 6－25a 中虚线所示）前进。假设动坐标设在此虚线上，动坐标系以此速度移动，而间断面的波也以这个速度运动，所以波峰和波谷相对于动坐标系保持静止。从图 6－25b 可见，相对于该坐标系，上面那层流体向右流动，下面的流体向左流动。

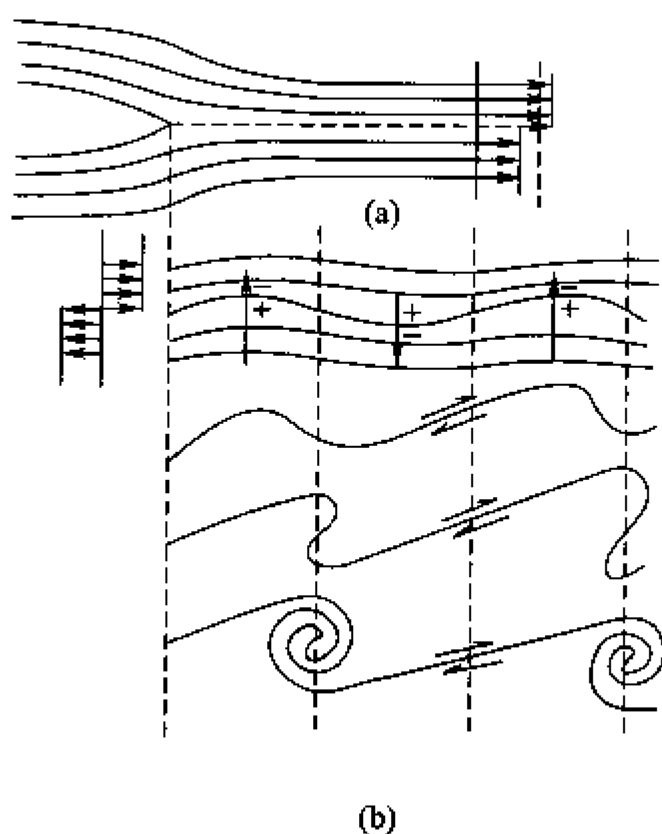
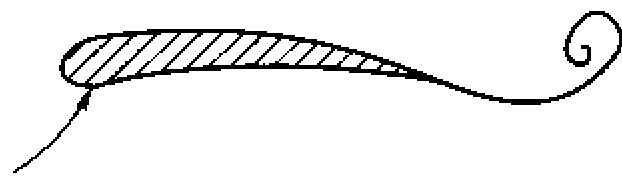


图　6－25

对于恒定流动，在每一边的流体波峰处增压（图 6－25b 中以＋表示），在波谷处减压（图中以－号表示）。即间断面两侧波峰和波谷相互对应，存在压强差，使波动起伏有增强的趋势，增压区中的流体企图向邻近的减压区运动，致使间断面波动起伏越来越大，而两层流体的反向相对运动更加剧了这一波动，致使最后断裂成一个个旋涡，称为起动涡（如图 6－26 所示）。所形成的起动涡将立即脱离翼型并被主流带走。


图　6－26

起动涡改变了翼型剖面周围的速度场，使绕翼型剖面任意周线环量不再为零（图 6－27 所示），其值等于每个瞬时起动涡的环量，正是由于这一环流，使

得驻点与后缘点重合，形成满足恰普雷金假设的平顺绕流。若任取一个包围翼型剖面和起动涡在内的封闭周线 L_{ABCD}，由于运动初始时是无旋运动，沿 L_{ABCD} 周线速度环量等于零，即 $\Gamma_{LABCD}=0$，根据环量保持不变的汤姆逊定理，沿封闭周线的速度环量将始终保持为零。当后缘点处形成环量为 $+\Gamma$ 的起动涡时（$\Gamma_{L2}\neq 0$），为了保持沿封闭周线 L 的总环量为零，必然绕翼型产生一个与起动涡的环量大小相等而方向相反的环流 $-\Gamma$，使 $\Gamma_{L2}=\Gamma_{L1}$，这一环流可以用环量等于 Γ 的旋涡代替。起动涡不断脱离后缘被主流带走，但绕翼型的顺时针环流却使翼型上部速度增加，压强减小，使翼型下部速度减小，压强增大，由翼型上下的压力差形成升力。同时，这一环流的作用，使驻点向后缘点移动，在驻点尚未到达后缘点之前，不断有旋涡形成并脱落被主流带走，而翼型上的环流也不断加强，直至驻点移至后缘点，获得儒科夫斯基－恰普雷金假设的平顺绕流。显然，可以应用儒科夫斯基－恰普雷金的平顺绕流假设，单值地确定环量值，这样计算得到的升力值与实验结果很好地符合。

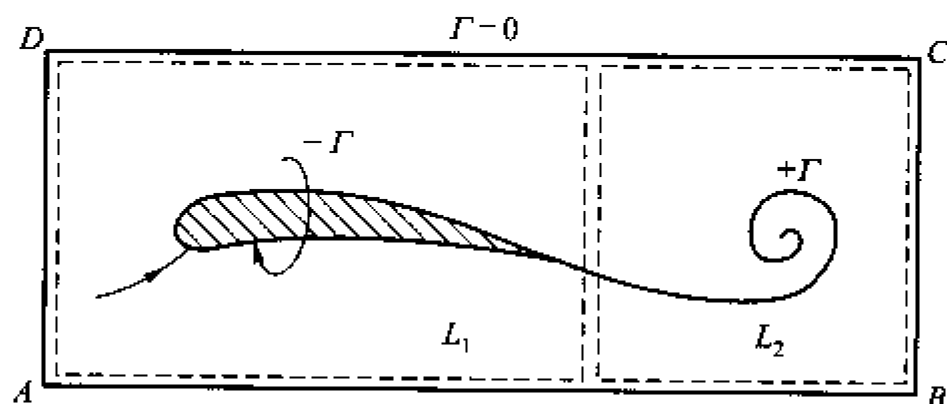


图　6－27

在实际流体绕流翼型时，由于流体的粘性，在物体壁面上形成一层很薄的边界层，边界层流体由无数旋涡组成，称为附着涡，利用附着涡代替实际流体边界层中的旋涡之和。在边界层外的流域中流动是有势的，用附着涡代替边界层后，可以将绕物体的有环量的流动看成是有势流动，所以应该沿边界层外的任意封闭周线计算环量，根据斯托克斯定理，它等于附着涡强度的二倍。显然，流体的粘滞性是绕流物体时环量形成和产生升力的根源。

例　题

例 6－1　已知平面势流的速度势函数 $\varphi=4(x^2-y^2)$，试求速度和流函数。

解　由速度势函数的定义，得 x，y 方向的分速度分别为

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=8x$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-8y$$

所以，合速度为 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=8\sqrt{x^2+y^2}$

且 v 与水平方向的夹角为 $\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\left(-\frac{y}{x}\right)$

又由
$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=v_x=8x$$

积分得 $\psi=8xy+f(x)$

故 $\frac{\partial\psi}{\partial x}=8y+f'(x)=-v_y=8y$

所以 $f'(x)=0$

即 $f(x)=C$

于是 $\psi=8xy+C$

式中 C 为任意常数，它的数值不会影响流动图形，故可令 $C=0$，最后得

$$\psi=8xy$$

流线是一组双曲线。

例 6－2 有两个流动，其速度势函数分别为

$$\varphi_1=3x-4y,\quad \varphi_2=\frac{x}{x^2+y^2}$$

试求合成流动的速度势函数、流函数、复位势和在 $x=\pi$，$y=\pi$ 点上的速度值。

解 合成流动的速度势函数为

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=3x-4y+\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{3x^3-4x^2y+3xy^2-4y^3+x}{x^2+y^2}$$

既可以由 φ 求 ψ，也可以分别由 φ_1，φ_2 求出 ψ_1，ψ_2 再叠加求 ψ。

求 ψ_1：

因为
$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=3$$

所以
$$\psi_1=3y+f_1(x)$$

又
$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=f'_1(x)=-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=4$$

所以
$$f_1(x)=4x+C_1$$

故
$$\psi_1=3y+4x+C_1$$

求 ψ_2：

因为
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

所以
$$\psi_2 = \int \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}y - \int \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{-y}{2(x^2 + y^2)} + \frac{1}{2x} \arctan \frac{y}{x} - \frac{x^2 y}{2x^2(x^2 + y^2)} - \frac{x^2}{2x^3} \arctan \frac{y}{x} + f_2(x)$$

$$= f_2(x) - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

又因为$\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} = f'_2(x) + \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

所以
$$f'_2(x) = 0$$

即
$$f_2(x) = C_2$$

于是
$$\psi_2 = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C_2$$

故
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 4x + 3y + C_1 - \frac{y}{x^2 + y^2} + C$$

$$= 4x + 3y - \frac{y}{x^2 + y^2} + C$$

其中常数 C 的数值不影响流动图形，因此令 $C = 0$，最后得

$$\psi = 4x + 3y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

复位势为 $W = \varphi + i\psi = (3x - 4y) + \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(3y + 4x - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$

求速度：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - \mathrm{i}v_y$$

$$= 3 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \mathrm{i}\left[4 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

故
$$v_x = 3 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_y = -\left[4 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right]$$

所以
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{\left[3 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]^2 + \left[4 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right]^2}$$

当 $x = \pi$，$y = \pi$ 时，代入得

$$v = 5.04 \text{ m/s}$$

例 6-3 试讨论由复位势 $W=a(1-\mathrm{i})z$ 所确定的流动，并求在 $|z|=\sqrt{2}$ 处的流体运动速度。

解 复位势可以改写为

$$W=a(1-\mathrm{i})z=a(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)$$
$$=a(x+y)-a(x-y)\mathrm{i}$$

故得 $\varphi=a(x+y)$，等势线为直线

$\psi=a(y-x)$，流线也为直线

速度为

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=a$$

$$v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=a$$

故

$$v=\sqrt{2}a$$

当 a 给定后，速度场为常数值，故 $|z|=\sqrt{2}$ 处的流体速度为 $\sqrt{2}a$。

例 6-4 已知某二维不可压缩流场速度分布为

$$v_x=x^2+4x-y^2,\ v_y=-2xy-4y$$

试确定：

(1) 流动是否连续？

(2) 流场是否有旋？

(3) 速度为零的驻点位置。

(4) 速度势函数 φ 和流函数 ψ。

解 (1) 由

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=2x+4-2x-4=0$$

判断可知流动连续。

(2) 因为

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=-2y=\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

所以流场无旋。

(3) 由驻点处 $v_x=0$，$v_y=0$

解方程

$$\begin{cases}x^2+4x-y^2=0\\-2xy-4y=0\end{cases}$$

得驻点为

$$\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-4\\y_2=0\end{cases}$$

(4) 由速度势函数定义

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=v_x=x^2+4x-y^2$$

积分得

$$\varphi=\frac{1}{3}x^3+2x^2-y^2x+f(y)$$

又由

$$v_y=-2xy-4y$$

$$v_y=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-2xy+f'(y)$$

得

$$f'(y)=-4y$$

即

$$f(y)=-2y^2+C$$

令 $C=0$ 得速度势函数为

$$\varphi=\frac{1}{3}x^3+2x^2-y^2x-2y^2$$

由流函数定义

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=v_x=x^2+4x-y^2$$

积分得

$$\psi=x^2y+4xy-\frac{1}{3}y^3+f(x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=2xy+4y+f'(x)$$

又

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=-v_y=2xy+4y$$

得

$$f'(x)=0$$

即

$$f(x)=C$$

令 $C=0$ 得流函数为

$$\psi=x^2y+4xy-\frac{1}{3}y^3$$

习　　题

6-1　平面不可压缩流体的速度分布为

(1) $v_x=y$，$v_y=-x$；

(2) $v_x=x-y$，$v_y=x+y$；

(3) $v_x=x^2-y^2+x$，$v_y=-(2xy+y)$

试判断它们是否满足 φ 和 ψ 的存在条件，并将存在的 φ 或 ψ 求出。

6-2　绘出下列流函数所表示的流动图形(标明流动方向)，计算其速度、加速度，并

求出速度势函数，绘出等势线。

(1) $\psi = x + y$ (2) $\psi = xy$

(3) $\psi = x/y$ (4) $\psi = x^2 - y^2$

6-3 设 $\varphi = xyz$，求点(1,2,1)处的速度、加速度和流线方程。又 $\varphi = xyzt$ 时情况又如何？

6-4 设有一不可压缩流体的平面势流，其 x 方向的速度分量为 $v_x = 3ax^2 - 3ay^2$，在 $y = 0$ 处 y 方向速度分量 $v_y = 0$。试求通过(0,0)及(1,1)两点连线的流体的流量。

6-5 理想不可压缩流体做平面有势流动，其速度势为 $\varphi = ax(x^2 - 3y^2)$，$a < 0$，试确定其运动速度及流函数，并求通过连接 A(0,0)及 B(1,1)两点的直线段的流体的流量。

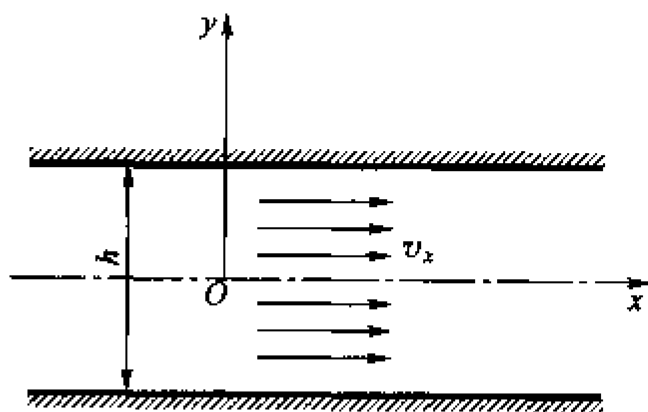
6-6 若平面不可压缩流体运动的速度势 $\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$，试求离原点(奇点)0.5 m 处的运动速度。

6-7 二维势流的速度势为 $\varphi = k\theta$，式中 θ 是极角，κ 为常数，试计算：

(1) 沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的环量；

(2) 沿圆周 $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ $(R < a)$的环量。

6-8 距离 $h = 2$ m 的两平板表面间的速度分布为



题6-8图

$$v_x = 10\left(\frac{1}{4}h^2 - y^2\right)$$

式中 v_x 是两平面间 y 处的速度。试求流函数 ψ 的表达式，并绘制流线。

6-9 已知某平面流场速度势函数为

$$\varphi = K(x^2 - y^2)$$

式中 K 为常数。试求流函数。

6-10 试判断下列流场是否连续，是否有势，并求其速度势函数和流函数。

(1) $v_x = Kx$，$v_y = -Ky$

(2) $v_x = Ky$，$v_y = Kx$

(3) $v_x = x - y$，$v_y = x + y$

(4) $v_x = x^2 + 2xy$，$v_y = y^2 + 2xy$

式中 K 为常数。

6-11 已知某二维不可压缩流场的流函数为 $\psi = 3x^2y - y^3$，试论证其有势并求出速度

势函数。

6－12　试推证分别用下列速度势函数和流函数表示的二个流动相同。

(1) $\varphi_1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2x - 3y$

(2) $\psi_2 = xy + 3x + 2y$

6－13　某二维流场速度势函数为 $\varphi = x^2 - y^2$，试求其流函数和过点(1,1)的速度。

6－14　一点源置于(1,0)点，强度 $q_1 = 10\ \mathrm{m^3/s}$，点汇置于(－1,0)，强度 $q_2 = -10\mathrm{m^3/s}$。现与速度 $v = v_x = 25\ \mathrm{m/s}$ 的沿 x 轴反向的平行流叠加，试求：

(1) 叠加流动前、后驻点间的距离 l；

(2) 上游无穷远处和(1,1)点处的压差

6－15　长 $l = 8\ \mathrm{m}$，直径 $D = 1\ \mathrm{m}$ 的圆柱体，垂直地置于平板汽车上，汽车以速度 $v_1 = 30\ \mathrm{m/s}$ 等速直线行驶，且该圆柱体以 300 r/min 绕垂直轴旋转，并受到垂直于汽车行驶方向的侧风作用，风速 $v_2 = 15\ \mathrm{m/s}$，空气密度 $\rho = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$，试求圆柱体所受的力。

6－16　已知不可压缩平面势流的 $v_x = yt - x$，且在 $t = 0$ 时，$x = 0$，$y = 0$ 处 $v_y = 0$。试求势函数 φ，流函数 ψ，及 $t = 0$ 时过(1,1)点的流线方程。

第7章

粘性流体动力学

前几章中，我们采用理想流体的假设，以简化的数学模型研究了许多流体力学的理论问题。对于粘性流体在大雷诺数情况下离边壁一定距离处的流动，将它看作理想流体，得到了与实际流体流动很接近的满意结果。实际上，自然界中的真实流体都存在粘性，但在大雷诺数情况下，求解作用于被绕流物体上的升力等问题时，除壁面处很薄的边界层外，粘性的作用不显著，适当处理后可以用理想流体研究解决。而当研究边界层、管道中**流动损失**的机理和计算等问题时，粘性作用是它们存在的根本原因，这时若再忽略粘性，将会导致“达朗贝尔佯谬”那样问题的出现。

§7-1 粘性流体运动微分方程式

1. 粘性流体中的应力分析

理想流体没有粘性作用，流动中流体间或流体与固体间不存在切应力。实际流体是有粘性的，它阻抗流体微元的形状改变。因此，**粘性流体**中切应力的存在，不仅出现了阻碍运动的摩擦力，而且也影响了法向应力的性质。

在流场中取微小平行六面体流体微元 $ABCD$（图7-1），三条边长为 dx，dy，dz，分别平行 x，y，z 轴，A 点的坐标为(x,y,z)。因为所取的六面体无限微小，可以认为同一作用面上各点具有相同的应力。

由于粘性的存在，六个面上的表面力与作用面不垂直，每个面上任意点的表面力可以分解为法向应力和切向应力。假设法向应力以外法线方向为正，而过 A 点的三个平面上的切向应力方向与坐标轴方向相反，其它三个面上与坐标轴方向相同。在直角坐标中，垂直于 x 轴的作用面 AC 上任意点处的应力可以分解为

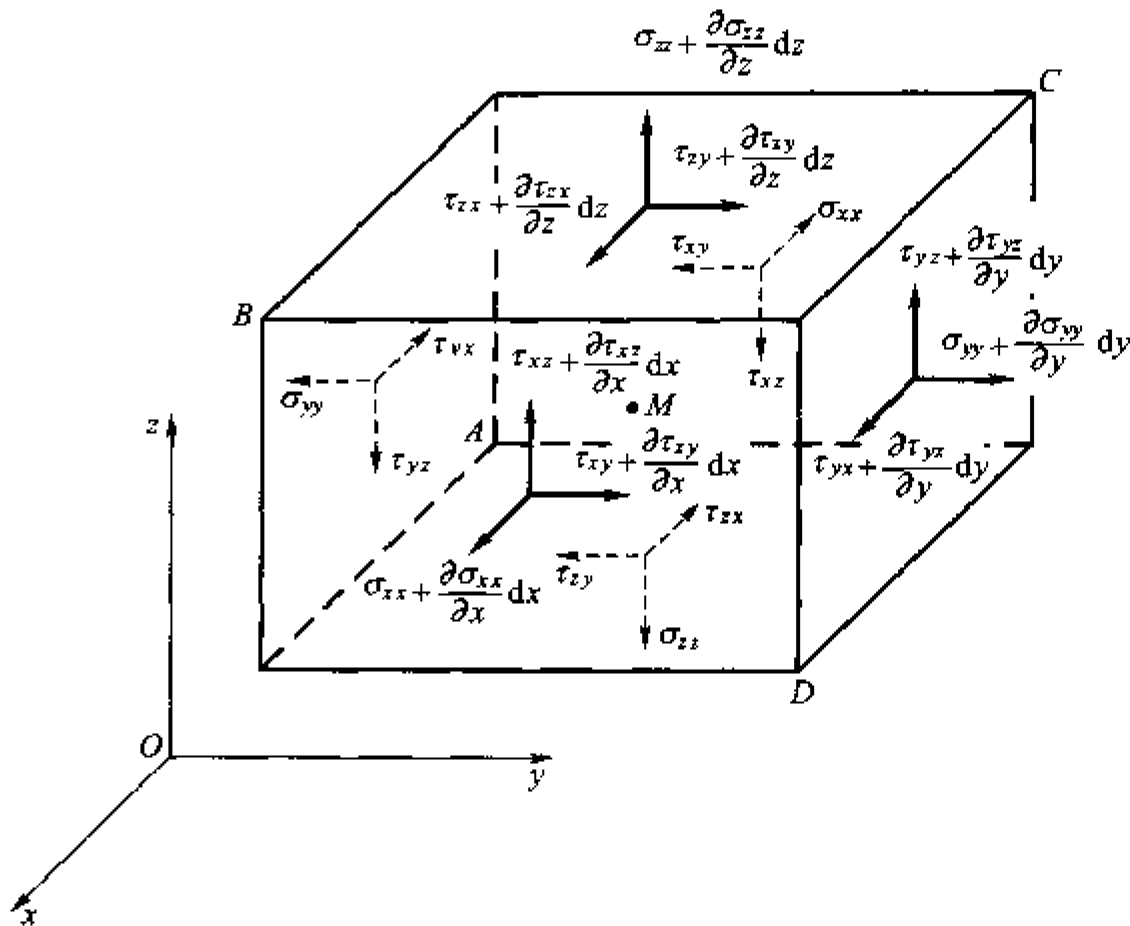


图 7－1

$$\sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}$$

同样，作用在垂直于 y 和 z 轴的作用面上任意点处的应力分解为

$$\tau_{yx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{yz}$$

$$\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_{zz}$$

法向应力 σ 和切向应力 τ 的角标，第一个表示与该应力的作用面相垂直的坐标轴；第二个表示与该应力的作用线相平行的坐标轴。这样，六个面上共 18 个应力。

若将六面体向 A 点无限缩小，这时，三个作用面上的 9 个应力就表示为 A 点的应力。因此，粘性流体中一点的应力由 9 个应力分量表示。

这里讨论受力的六面体处于任意运动状态。将作用于六面体微元上的所有应力，对过六面体中心点 M 而与 x 轴平行的轴线取力矩，由于所有各面上的法向应力通过六面体中心，对 M 点取矩为零。质量力通过中心 M 点，不产生力矩。所取的力矩若以逆时针方向为正，顺时针方向为负，则表面力对该轴的力矩之和为

$$\sum M = \tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}+\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dy}{2}$$
$$-\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\frac{dz}{2}$$

根据转动定律

$$\sum M = Ja$$

式中 J——物体的转动惯量，对平行六面体 $J=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,(\mathrm{d}r)^2$，

$\mathrm{d}r$ 为转动惯量半径；

a——角加速度。

所以

$$(\tau_{yz}-\tau_{zy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y-\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{2}=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,(\mathrm{d}r)^2a$$

若略去方程中四阶和五阶微量，有

$$(\tau_{yz}-\tau_{zy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

则得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

同理

$$\tau_{zx}=\tau_{xz} \tag{7-1}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

因此，粘性流体中一点上的应力可以用6个独立应力分量表示，其中3个法向应力，3个切向应力。

2. 以应力形式表示的运动微分方程

如图7-1所示，分析六面体各作用面沿 x 方向的应力分量。由于应力连续分布，作用于六面体不包含 A 点的三个面上的应力按台劳级数展开，并略去二阶以上的微量，这样，六个作用面上沿 x 轴向的应力为

(1) 表面力

在 AB，CD 面上

$$\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在 AC，BD 面上

$$\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在 AD，BC 面上

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

于是微元表面上沿 x 轴方向的合力为

$$\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(2) 质量力

用 f_x，f_y，f_z 表示单位质量流体上所受的质量力沿 x，y，z 轴方向的分力，则六面体流体微元在 x 方向的质量力为

$$F_{Qx}=f_x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(3) 惯性力

设六面体微元沿 x 轴方向的加速度为 $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，所以微小六面体在 x 方向的惯性力为

$$-\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

根据牛顿第二定理 $\sum F_x=ma_x$，可写出沿 x 轴向的运动微分方程

$$f_x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

整理后得到

$$f_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

同理可得沿 y 轴和 z 轴方向的运动微分方程。于是有

$$\begin{cases}f_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\ f_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\\ f_z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\end{cases}\tag{7-2}$$

式(7 - 2)是以应力形式表示的粘性流体运动微分方程式。对于不可压缩流体，$\rho=C$，且质量力通常是已知的，上面 3 个方程中，有 9 个未知数，但加上连续方程只有 4 个方程，不能求解，必须寻找应力与变形速度间关系的补充方程。

3. 应力与变形速度的关系

(1) 切应力与角变形速度的关系

粘性流体运动时，由于流体微元上各点的速度不同，运动过程中必然发生变形，引起切应力。切应力大小由牛顿内摩擦定律给出

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}$$

在运动流体中取一正方形的无限小流体微元 $abcd$（图 7-2），微元的 ad 与 bc 上下两层（间隔 dn）流动速度不等，运动过程中 ab 和 cd 边转角 $d\beta$，因为 $d\beta$ 很微小，所以有

$$\tan d\beta = \frac{dv dt}{dn} \approx d\beta$$

于是角变形速度为

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{dv}{dn} \qquad (7-3)$$

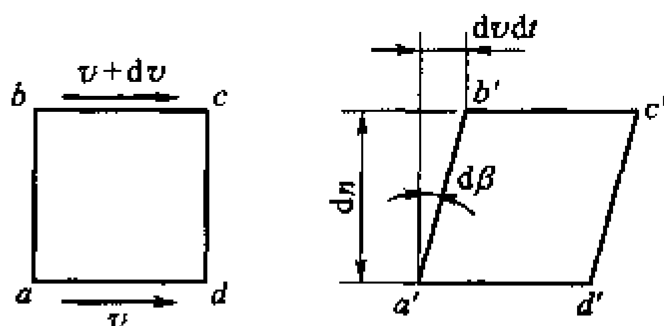


图 7-2

即流体微元的角变形速度等于垂直于流动方向上的速度梯度。所以牛顿内摩擦定律变为

$$\tau = \mu \frac{d\beta}{dt} \qquad (7-4)$$

上式表明，相邻两流体层间的切应力 τ 与角变形速度 $\frac{d\beta}{dt}$ 成正比，但这只是一元流动的最简单情况。

若考虑与 z 轴垂直的二元流动（图 7-3），正方形微元经 dt 时间运动变形为菱形 $a'b'c'd'$，四边形的角变形速度根据 §3-4 中式(3-23)有

$$\frac{d\beta_z}{dt} = \frac{d\beta_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2\gamma_z$$

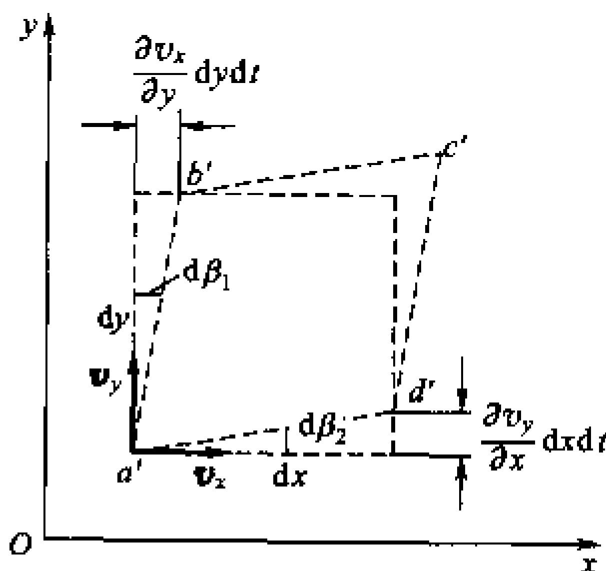


图 7-3

假定流体的粘性在各个方向上都相同，于是得到切应力与角变形速度关系的广义牛顿内摩擦定律

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = 2\mu\gamma_z \\
\tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = 2\mu\gamma_x \\
\tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = 2\mu\gamma_y
\end{aligned}\right\} \qquad (7-5)$$

上式说明，切向应力等于动力粘性系数与角变形速度的乘积。式(7-5)的 3 个方程使式(7-2)的未知数还剩下 6 个。

(2) 法向应力

在理想流体中，不存在切应力，因此任何一点的法向应力与作用面的方位

无关，即同一点各方向上的应力

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=p$$

但是对于粘性流体，流体微元除了产生引起切应力的角变形外，同时还发生直线变形，使流体拉伸或缩短，法线方向上的变形引起附加的法向应力。由于线变形速度不同，使各个方向上的法向应力不相等。因此，粘性流体中的法向应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=-p+\sigma'_{xx}\\\sigma_{yy}&=-p+\sigma'_{yy}\\\sigma_{zz}&=-p+\sigma'_{zz}\end{aligned}\right\}\qquad(7-6)$$

式中 σ'_{xx}，σ'_{yy}和σ'_{zz}——由于线变形而产生的各坐标轴方向上法向应力的附加增量；

p——粘性流体中的动水压强。前面的负号是因为动水压强为压应力。

线变形引起的附加法向应力，可以仿照切应力的**广义牛顿内摩擦定律**给出，即附加法向应力等于动力粘度 μ 与两倍线变形速度的乘积

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_{xx}&=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)=2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\\\sigma'_{yy}&=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\\\sigma'_{zz}&=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(7-7)$$

将式(7-7)代入式(7-6)得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\\\sigma_{yy}&=-p+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\\\sigma_{zz}&=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(7-8)$$

式(7-8)是反映粘性流体应力与应变速度关系的本构方程。它是在牛顿粘性内摩擦定律的基础上，假设流体的粘性在各个方向上都相同，得出广义牛顿内摩擦定律之后推导得到的，凡满足本构方程的流体就是牛顿流体。

将式(7-8)中的3个方程相加，得

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}=-3p+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

对不可压缩流体，有连续性方程式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

所以

$$p=\frac{-(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})}{3} \tag{7-9}$$

将 p 定义为粘性流体中的流体动压强，它等于给定点上任意3个相互垂直微元面上法向应力的算术平均值。若微小六面体的 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 趋近于零，这时 σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{zz}变成粘性流体中 A 点上的 3 个法向应力，它们各不相等，但其算术平均值的动压强 p 则不随方向而变，即粘性流体中的动压强只是空间坐标和时间的函数。

对于平行流动，$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$，$\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$，所以有

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-p$$

4. 纳维－斯托克斯(Navier-Stokes)方程

对于不可压缩粘性流体，若满足牛顿内摩擦定律，将已得到的式(7－5)和(7－8)代入式(7－2)，得

$$f_x+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right]\right\}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

假设动力粘度不变，则上式变为

$$f_x+\frac{1}{\rho}\left\{-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right\}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

或

$$f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left\{\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\right\}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

对不可压缩流体，有连续性方程式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

同时，利用拉普拉斯算子 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$代入上式，得

$$\left.\begin{aligned}f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\ \nabla^2 v_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\\f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\ \nabla^2 v_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\\f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\ \nabla^2 v_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

式(7－10)为不可压缩粘性流体的运动微分方程式，又称纳维－斯托克斯方程式(简称 N－S 方程)。

N－S 方程写成向量形式得到

$$\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p+\nu\nabla^2\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \qquad (7-11)$$

流体力学问题的解决，其难易程度与坐标系的选取恰当与否很有关系。例如在求解流体绕圆柱体和球体的流动时，采用柱坐标系(r,θ,z)和球坐标系(r,θ,φ)，比直角坐标系更为简单方便，因此，这里给出圆柱坐标系和球坐标系的 N－S 方程，但不做变换推导。

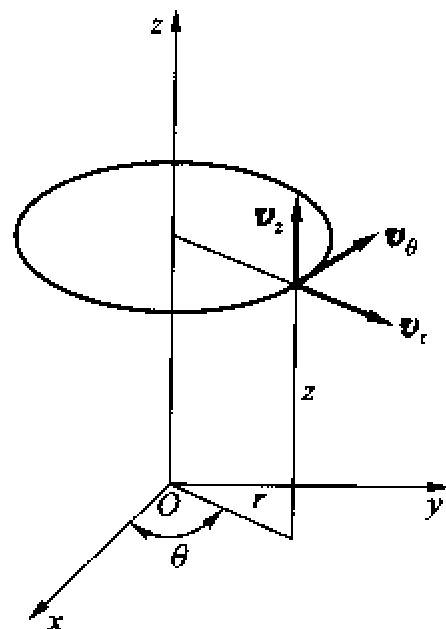


图　7－4

柱坐标系的 N－S 方程组(见图 7－4)。

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v^2}{r}$$

$$=f_R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{v_r}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$=f_\Theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \qquad (7-12)$$

柱坐标系不可压缩流体的连续性方程为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (7-13)$$

式中 f_R，f_Θ，f_z 分别为单位质量的质量力沿坐标轴(r,θ,z)的分量。

切向应力和法向应力与变形速度的关系为

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{r\theta}&=\tau_{\theta r}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\\
\tau_{\theta z}&=\tau_{z\theta}=\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right]\\
\tau_{zr}&=\tau_{rz}=\mu\left[\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (7-14)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\\ \sigma_{\theta\theta} &= -p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)\\ \sigma_{zz} &= -p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{7-15}$$

球坐标系(r,θ,φ)的 N－S 方程组(图 7－5)

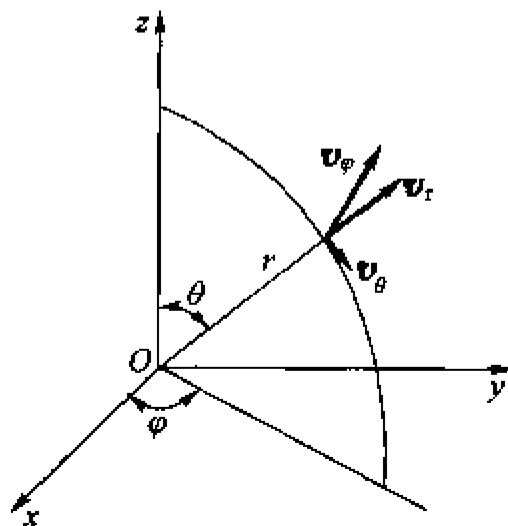


图 7－5

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}\\ &=f_R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right.\\ &\quad+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta\\ &\quad\left.-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\\ &\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi^2}{r}\cot\theta+\frac{v_r v_\theta}{r}\\ &=f_\Theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\varphi^2}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\\ &\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r v_\varphi}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi}{r}\cot\theta\\ &=f_\Phi-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}\right.\\ &\quad+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\varphi^2}-\frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\\ &\quad\left.+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7-16}$$

式中 f_R，f_θ，f_φ 分别为单位质量的质量力沿坐标轴(r,θ,φ)的分量。

球坐标系不可压缩流体的连续性方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}=0 \tag{7-17}$$

切向应力和法向应力与变形速度的关系为

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{r\theta}&=\tau_{\theta r}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)\\
\tau_{\theta\varphi}&=\tau_{\varphi\theta}=\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-\frac{v_\varphi\cot\theta}{r}\right)\\
\tau_{\varphi r}&=\tau_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7-18}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\\
\sigma_{\theta\theta}&=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)\\
\sigma_{\varphi\varphi}&=-p+2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7-19}$$

N-S 方程是流体力学中具有普遍意义的微分方程式，有几点说明：

(1) 对于没有粘性的理想流体，$\nu=0$，N-S 方程变为理想流体的欧拉运动微分方程式；对静止流体，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0$，又变为欧拉平衡方程式；

(2) 式(7-10)、(7-12)和(7-16)仅适用于不可压缩流体；

(3) N-S 方程仅适用于满足牛顿内摩擦定律的牛顿流体；

(4) 对层流或紊流状态时的真实流场，N-S 方程都可应用，但对紊流的时均流场，N-S 方程演变为雷诺方程。

对粘性流体求解 N-S 方程是流体力学的一项重要任务，方程中 v_x，v_y，v_z 和 p 4 个未知数，补充连续性方程后原则上已经可以求解，但 N-S 方程是一个二阶非线性的偏微分方程，加之边界条件难以用数学方程表达，即使采用电子计算机，企图求得一般情况下的普遍解仍然极为困难。

但是，对许多流动问题，如圆管、平行平板、平行圆盘、同心圆环间的层流流动，以及边界层等问题，根据 N-S 方程每一项的物理意义，针对不同情况，略去惯性项或粘性项简化后，可以精确求解。

§7-2 粘性流体的葛罗米柯-斯托克斯方程

为了便于看出微分方程在什么情况下可以积分，并使方程具有更明显的物理力学含义，将N-S方程变换为葛罗米柯-斯托克斯(G-S)形式微分方程。这样，再引入一些附加条件后，有可能将三个偏微分方程变成常微分方程，使之便于积分求解。

假设流体所受的质量力有势，则必存在力的势函数 $U(x,y,z,t)$，并有

$$f_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad f_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad f_z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

可以对方程的惯性项作如下变换

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)+2\left(\omega_y v_z-\omega_z v_y\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)+2\left(\omega_z v_x-\omega_x v_z\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right)+2\left(\omega_x v_y-\omega_y v_x\right)$$

式中旋转角速度分量

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

将上式代入N-S方程，得到不可压缩粘性流体的葛罗米柯-斯托克斯方程(G-S)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\ \nabla^2 v_x&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+2\left(\omega_y v_z-\omega_z v_y\right)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\ \nabla^2 v_y&=\frac{\partial v_y}{\partial t}+2\left(\omega_z v_x-\omega_x v_z\right)\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\ \nabla^2 v_z&=\frac{\partial v_z}{\partial t}+2\left(\omega_x v_y-\omega_y v_x\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(7-20)$$

式(7-20)与N-S方程的适用范围相同，而旋转角速度 ω 的引入，使之更容易从力学角度看出方程求解积分的条件，应用起来更为方便。

§7-3　葛罗米柯-斯托克斯方程的伯努利积分

这里讨论不可压缩粘性流体的恒定流动。假定作用在流体上的质量力有势。

对恒定流动有

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v_y}{\partial t}=0,\ \frac{\partial v_z}{\partial t}=0$$

因此 G-S 方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\ \nabla^2 v_x=2\left(\omega_y v_z-\omega_z v_y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\ \nabla^2 v_y=2\left(\omega_z v_x-\omega_x v_z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\ \nabla^2 v_z=2\left(\omega_x v_y-\omega_y v_x\right)$$

为了进一步简化方程，注意到对于恒定流动，流线和迹线重合，在 dt 时间内沿着同一流线(或微小流束)有 $dl=v dt$ (图 7-6)，因此沿着流线的坐标增量为

$$dx=v_x dt,\ dy=v_y dt,\ dz=v_z dt$$

方程组的左边分别乘以 dx，dy，dz，右边分别乘以 $v_x dt$，$v_y dt$，$v_z dt$，然后将三个方程相加，注意到方程右边各项之和等于零，于是得

$$d\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{v^2}{2}\right)+\nu\left(\nabla^2 v_x dx+\nabla^2 v_y dy+\nabla^2 v_z dz\right)=0 \qquad (7-21)$$

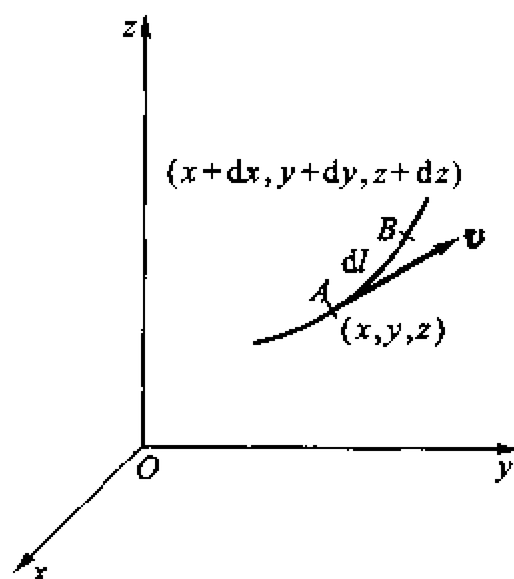


图 7-6

式中 $\nu\ \nabla^2 v_x$，$\nu\ \nabla^2 v_y$，$\nu\ \nabla^2 v_z$ 是单位质量流体上的**粘性切应力**在相应坐标轴方向的投影。实际上方程式的第二项表示单位质量流体沿流线微小移动中切应力所做的功。将第二项移至方程的右边，因为方程左边是全微分，因此方程右边也必须是某一函数的全微分。在粘性流体运动中，切应力的合力表示为阻滞流体运动的摩擦力，合力的方向总是指向流体运动的反向，即

$$\nu\left(\nabla^2 v_x \mathrm{d}x + \nabla^2 v_y \mathrm{d}y + \nabla^2 v_z \mathrm{d}z\right) = -\mathrm{d}\int F_f \mathrm{d}l = -\mathrm{d}w_f \qquad (7-22)$$

式中沿流线的微元线段 $\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$，$F_f$ 为摩擦力，于是式(7－21)变为

$$\mathrm{d}\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} - w_f\right) = 0$$

沿流线积分得到

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} - w_f = C \qquad (7-23)$$

该式对同一流线上的所有各点常数 C 相等，对不同的流线有不同的 C 值。式(7－23)称为粘性流体沿流线的伯努利积分，该式在有势质量力作用下，不可压缩粘性流体作恒定流动时沿着流线成立。对于同一流线上的任意两点有

$$U_1 - \frac{p_1}{\rho} - \frac{v_1^2}{2} - w_{f1} = U_2 - \frac{p_2}{\rho} - \frac{v_2^2}{2} - w_{f2} \qquad (7-24)$$

与理想流体的伯努利积分类似，流体上作用的质量力不同，将会得到不同的伯努利方程式。

§7－4 重力作用下实际流体微小流束伯努利方程式

当粘性不可压缩流体上质量力只有重力作用时，力势函数

$$U = -gz$$

因此式(7－23)变为

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + w_f = C \qquad (7-25)$$

对同一流线上的任意两点有

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + w_{f1} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + w_{f2} \qquad (7-26)$$

我们令 $w_{f2} - w_{f1} = gh'_w$，gh'_w 是单位质量流体流动时摩擦阻力所作的功，因为摩擦阻力做功随着流动长度的增加而增大，所以 gh'_w 总为正，故可得到单位质量流体的能量为

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh'_w \qquad (7-27)$$

式(7－27)就是粘性流体微小流束的伯努利方程式。

若将方程的每一项除以 g，得到

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+h'_w \tag{7-28}$$

式中的三项分别表示单位重力流体所具有的位置能头、测压管能头和速度能头，这三项的物理力学意义与理想流体伯努利方程的对应各项相同。$w_{f2}-w_{f1}$表示在恒定流动下，流体微元沿着流线从点 1 运动至点 2 过程中，对单位质量流体产生的摩擦阻力所做的功。h'_w 则表示当流体微元沿着流线从 1 点运动到 2 点时，对单位质量流体的摩擦阻力所做的功，这是粘性流体从 1 点到 2 点流动时由于阻力所损失的机械能。h'_w 具有长度的量纲。我们从式(7-28)可以看出，总的机械能头线已不再是一条水平直线，而是一条沿流动方向下降的斜线。克服粘性流体运动中摩擦阻力所消耗的机械能，转变成热能。

§7-5 缓变流动及其特性

微小流束是从流动流体中抽象取出的流体束，通常并不知道它的运动要素。而且每个微小流束的运动要素都不相同，也难以从流体中分出微小流束，所以无法用于解决工程问题。但它却为推导全液流伯努利方程奠定了基础，并使我们了解了方程中每一项的物理力学意义。

无限多个微小流束的总和称为总流。实际上就是具有有限过流断面积的流体流束。为了推导总流伯努利方程，需要对流动作一些限制和简化。

缓变流动：若某过流断面上的流线几乎是相互平行的直线，则此过流断面称为**缓变断面**，过流断面上的流动称为**缓变流动**。

由上面的定义可见，缓变流动有两个特征：

(1) 流线之间的夹角很小，流线间几乎是平行的；

(2) 流线具有很大的曲率半径，因此作缓变流动时流体的向心加速度 $\frac{\omega^2}{r}$ 很小，即流体只有不大的离心惯性力，可以认为、质量力只有重力作用。

若设缓变流动方向与 x 轴方向重合，于是 $v_x=v$，$v_y=v_z=0$，因此 N-S 方程变为

$$\begin{cases} f_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\ \nabla^2 v_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ f_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ f_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases} \tag{7-29}$$

从式(7-29)可见，方程组中的第二、第三个方程与流体静力学的平衡微分方程相同，说明流体作缓变流动时，Oyz 平面上各点的压强遵循重力作用下静力学的分布规律，而缓变断面就在 Oyz 坐标面中，因此，在缓变流动过流断面上流体动压强按静压强规律分布，即 $z+\dfrac{p}{\rho g}=C$，但必须指出，如图7-7所示，流体动压强的这种分布规律仅限于同一缓变断面。在沿流动方向上，不同过流断面上的点，由于流动中存在能量损失，以及过流断面积不同，常数 C 具有不同的数值。

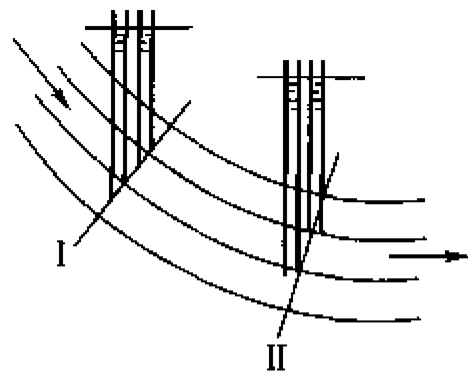


图 7-7

§7-6 动能和动量修正因数

管道中过流断面每一点上的速度都不相同，但在工程技术问题中，没有必要求出过流断面每一点的真实速度，因此引入了过流断面上流体平均流速的概念，这将使流动特性的计算和研究大为简化。

应用平均流速计算某一断面的流量，与用真实流速计算的流量相同。但是，以引入的平均流速计算单位时间内通过某一断面的动量和动能，与用真实流速计算通过该断面的动量和动能间有差异，因此，这里引入动量和动能修正因数，以修正与实际的偏差。

1. 动能修正因数

动能修正因数 α 为用真实流速计算的动能与平均流速计算的动能间的比值。

令动能修正因数(不可压缩流体)

$$\alpha=\frac{\int_A\frac{\rho v^3}{2}\mathrm{d}A}{\frac{\rho V^3}{2}A}=\frac{\int_A v^3\mathrm{d}A}{V^3A}\qquad(7-30)$$

式中 v 表示过流断面上真实流速，V 为平均流速(图7-8)，则

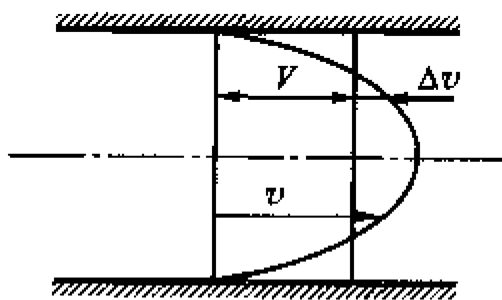


图 7-8

$$v=V\pm\Delta v$$

于是
$$\int_A v^3\mathrm{d}A=\int_A(V\pm\Delta v)^3\mathrm{d}A$$

$$= V^3\int_A \mathrm{d}A + 3V^2\int_A (\pm \Delta v)\,\mathrm{d}A$$

$$+ 3V\int_A (\Delta v)^2\mathrm{d}A + \int_A (\pm \Delta v)^3\mathrm{d}A$$

因此

$$\alpha = \frac{1}{A}\left\{\int_A \mathrm{d}A \pm 3\int_A \frac{\Delta v}{V}\mathrm{d}A + 3\int_A \left(\frac{\Delta v}{V}\right)^2\mathrm{d}A \pm \int_A \left(\frac{\Delta v}{V}\right)^3\mathrm{d}A\right\} \tag{7-31}$$

式中 $\pm\int_A \left(\frac{\Delta v}{V}\right)^3\mathrm{d}A$ 为高阶小量，且有正有负而互相抵消一部分，可以略去不计。

又因为

$$q_V = \int_A v\,\mathrm{d}A = \int_A (V \pm \Delta v)\,\mathrm{d}A = \int_A V\mathrm{d}A \pm \int_A \Delta v\,\mathrm{d}A = q_V \pm \int_A \Delta v\,\mathrm{d}A$$

得到

$$\pm\int_A \Delta v\,\mathrm{d}A = 0$$

所以

$$\alpha = 1 + 3\,\frac{1}{A}\int_A \left(\frac{\Delta v}{V}\right)^2\mathrm{d}A = 1 + 3\eta$$

因为 $\eta = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{\Delta v}{V}\right)^2\mathrm{d}A > 0$，所以 $\alpha > 1$。这说明按平均流速计算的动能小于按真实流速计算的动能。

α 的大小取决于过流断面上的流速分布均匀程度，以及断面的形状和大小，分布愈不均匀，α 愈大。除层流等个别情况外，α 只能由实验确定。

α 还与流动状态有关，对圆管层流 $\alpha = 2$，紊流 $\alpha \approx 1.01 \sim 1.15$，常用 $\alpha = 1.03 \sim 1.06$。对一般工业管道 $\alpha = 1.05 \sim 1.1$，在缓变流动情况下，可以取 $\alpha \approx 1$。

2. 动量修正因数

动量修正因数 α_0 是用真实流速计算的动量与以平均流速计算的动量间的比值。

令动量修正因数

$$\alpha_0 = \frac{\int_A \rho v^2\mathrm{d}A}{\rho V^2 A} = \frac{\int_A v^2\mathrm{d}A}{V^2 A} \tag{7-32}$$

式中

$$\int_A v^2\mathrm{d}A = \int_A (V \pm \Delta v)^2\mathrm{d}A$$

$$= V^2\int_A \mathrm{d}A \pm 2V\int_A \Delta v\,\mathrm{d}A + \int_A \Delta v^2\mathrm{d}A$$

所以 $\alpha_0 = 1 + \dfrac{\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A}{V^2 A} = 1 + \eta$ (7-33)

同样，$\alpha_0 > 1$。因此，按平均流速计算的动量，小于按真实流速计算的动量。影响动量修正因数 α_0 的因素与动能修正因数的影响因素相同。对圆管层流 $\alpha_0 = 1.33$，紊流 $\alpha_0 = 1.005 \sim 1.05$。对一般工业管道 $\alpha_0 = 1.02 \sim 1.05$，若计算中不要求很高精度时，为计算方便，常取 $\alpha_0 = 1$。

§7-7 粘性流体恒定总流的伯努利方程

前面由 G-S 方程积分，得到了重力作用下粘性流体微小流束伯努利方程。但实际工程的管路或渠道中的流动，都是有限断面积的**总流**。因此，应该将沿微小流束的伯努利方程推广到总流中去。

图 7-9 所示为粘性流体的总流，1-1 和 2-2 为两个缓变的过流断面。任取一微小流束 i，当粘性流体作恒定流动，且质量力只有重力作用时，对微小流束 i 的 1-1 和 2-2 断面列伯努利方程，得单位重力流体的总能量为

$$z_{1i} + \frac{p_{1i}}{\rho g} + \frac{v_{1i}^2}{2g} = z_{2i} + \frac{p_{2i}}{\rho g} + \frac{v_{2i}^2}{2g} + h'_w \tag{7-34}$$

单位时间内流过微小流束过流断面 1-1 和 2-2 流体的能量为

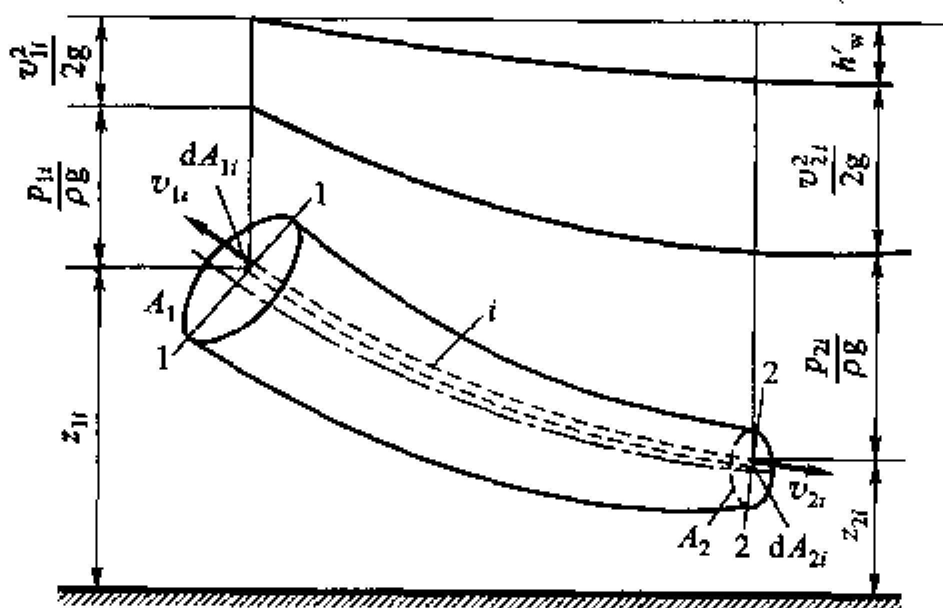


图 7-9

$$\left(z_{1i} + \frac{p_{1i}}{\rho g} + \frac{v_{1i}^2}{2g}\right) v_{1i} \mathrm{d}A_{1i} \rho g$$

$$= \left(z_{2i} + \frac{p_{2i}}{\rho g} + \frac{v_{2i}^2}{2g} + h'_w\right) v_{2i} \mathrm{d}A_{2i} \rho g \tag{7-35}$$

单位时间内总流流经过流断面 1-1 和 2-2 流体的总能量为

$$\int_{A_1}\left(z_{1i}+\frac{p_{1i}}{\rho g}+\frac{v_{1i}^2}{2g}\right)\rho g v_{1i}\mathrm{d}A_{1i}=\int_{A_2}\left(z_{2i}+\frac{p_{2i}}{\rho g}+\frac{v_{2i}^2}{2g}\right)v_{2i}\rho g\mathrm{d}A_{2i}+\int_{A_2}h'_w\rho g v_{2i}\mathrm{d}A_{2i} \quad (7-36)$$

为了计算积分，有必要对流动作进一步的限制。

设所研究的两个过流断面上的流动为缓变流动，在缓变断面上，所有各点的压强分布遵循静压强的分布规律，即 $z+\frac{p}{\rho g}=\mathrm{const}$，于是，在所取的过流断面为缓变流动的条件下，积分

$$\int_A\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g v\mathrm{d}A=\int_{q_V}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g\mathrm{d}q_V=\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g q_V \quad (7-36a)$$

若以平均流速 V 计算单位时间内通过过流断面的流体动能，

$$\int_A\frac{v^2}{2g}\rho g v\mathrm{d}A=\frac{\alpha V^2}{2g}\rho g q_V \quad (7-36b)$$

则式中 α 为动能修正因数。

单位时间内流体克服摩擦阻力消耗的能量 $\int_{q_V}h'_w\rho g\mathrm{d}q_V$ 中，h'_w 为一无规律变化的值，无法积分，但可令

$$\frac{\int_{q_V}h'_w\rho g\mathrm{d}q_V}{\rho g q_V}=h_w \quad (7-36c)$$

为总流从 1-1 断面到 2-2 断面流动中，单位重力流体的平均能量损失，实验证明，这样处理符合实际情况。

将式(7-36a)，(7-36b)，(7-36c)代入式(7-36)且注意到流量连续，有

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}\right)\rho g q_V=\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}\right)\rho g q_V+h_w\rho g q_V$$

等式两边同除 $\rho g q_V$，得到重力作用下不可压缩粘性流体恒定总流的伯努利方程

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_w \quad (7-37)$$

粘性流体总流伯努利方程每一项的能量意义与微小流束伯努利方程相同，流动中为了克服粘性摩擦阻力，总流的机械能沿流程不断减小，因此总水头线逐渐降低(见图示)。

总流伯努利方程是在一定条件下导出的，所以应用这一方程时要满足以下

限制条件：

(1) 流动恒定，即$\frac{\partial V_x}{\partial t}=\frac{\partial V_y}{\partial t}=\frac{\partial V_z}{\partial t}=0$；

(2) 流体上作用的质量力只有重力，即 $U=-gz$；

(3) 流体不可压缩，$\rho=\text{const}$；

(4) 沿总流流束流量连续，$q_V=\text{const}$，若沿流束存在流束分支或合流时，应分段以全部流体总能量守恒列出伯努利方程；

(5) 列伯努利方程的过流断面上的流动必须是缓变流动，而两个断面之间有否急变流动都可以。

§7-8 动量方程

这一节里，主要解决液流与限制其流动的固体壁面间的相互总作用力问题。

讲述运动微分方程时，在流场中取一个流体微元，分析微元的受力、变形以及在力作用下的运动，对粘性流体得到 N-S 方程。但是，除了一些特殊的流动情况外，一般情况下，由于起始、边界条件难以建立数学表达式，求解十分困难。因此，这里从分析有限体积内流体质点的运动出发，用积分方法建立方程，得到流体运动规律及与边界的相互作用。

关于系统和控制体：这里利用控制体积法来研究**流体质点系统**。有限体积的流体质点的集合称为系统。不管流体怎样运动，且运动中系统的表面可以不断变形，但流体质点的集合不变，所含有的质量不变。取流场中某一确定的空间区域，这个空间区域称为控制体，控制体的周界称为**控制面**。

根据牛顿运动定律，当质量为 m 的**质点系**受到外力$\sum \boldsymbol{F}$ 作用时，运动速度$\boldsymbol{v}$ 就将发生变化，$\boldsymbol{M}=m\boldsymbol{v}$ 称为质点系的动量。

动量定理：在 $\mathrm{d}t$ 时间内作用于质点系的外力的冲量，等于同一时间间隔内该质点系在力作用方向上的动量改变率，即

$$\sum \boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{7-38}$$

如图 7-10 所示，瞬时 t 流体质点系统占有的空间体积为 R，它与所选的控制体重合。在稍后的 $t+\Delta t$ 瞬时，质点系统所占有的空间体积为 $R'+O$，R'是在 $t+\Delta t$ 瞬时，质点系统所占有的空间与 t 瞬时所占的空间相重合的部分。不管质点系统怎样运动，控制体始终不变。在 Δt 时间间隔内，一部分体积的流体质点 O 从控制体 R 中流出，而另一部分体积的流体质点 Ⅰ 则流入控

制体 R，以取代已流出的流体。

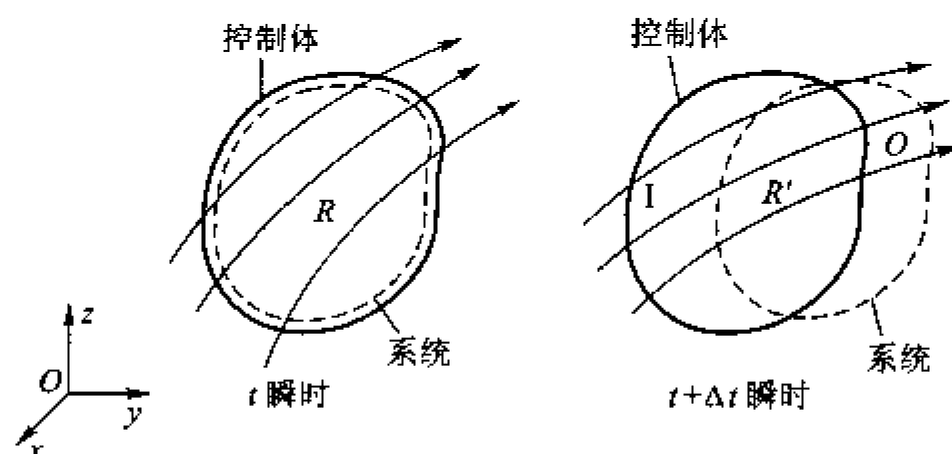


图　7－10

在 t 到 $t+\Delta t$ 的时间间隔中，质点系统内的流体所具有的动量的增量为

$$\left(\int_{R'} \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}V + \int_{O} \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{R} \boldsymbol{v}\rho \mathrm{d}V\right)_{t}$$

$\mathrm{d}V$ 为微元体积。

于是，由质点系的动量定理有

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{F} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left(\int_{R'}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \int_{O}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{R}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left[\left(\int_{R'}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathrm{I}}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{R}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t}\right]}{\Delta t} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\left[\left(\int_{O}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{\mathrm{I}}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t}\right]}{\Delta t}\right\}\end{aligned} \tag{7－39}$$

考虑到 $R = R' + \mathrm{I}$，所以式中

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left[\left(\int_{R'}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathrm{I}}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{R}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t}\right]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left(\int_{R}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t} - \left(\int_{R}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t}}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{R}\rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho \boldsymbol{v}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{7－40}$$

式中$\int_{C.V}$表示对控制体的积分。$\left(\int_{O}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t}$ 项是 Δt 时间内，从控制体 R 内流出的流体所具有的动量，除以 Δt，表示单位时间内流出控制体的流体动量的平均值；$\left(\int_{\mathrm{I}}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\right)_{t+\Delta t}$ 项是 Δt 时间内流入控制体 R 的流体所具有的动量，

除以 Δt，表示单位时间内流入控制体的流体动量的平均值。

如图 7-11 所示，取控制面上流入和流出部分的微元面积为 $d\boldsymbol{A}$（指微元面积与其法向单位向量 $\boldsymbol{e}_n$ 的乘积），微元面积上的流速为 $\boldsymbol{v}$，则单位时间内从微元面积流出流体的动量为 $\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A}$，于是单位时间内从控制面经面积 A_O 处流出控制体的流体的动量为

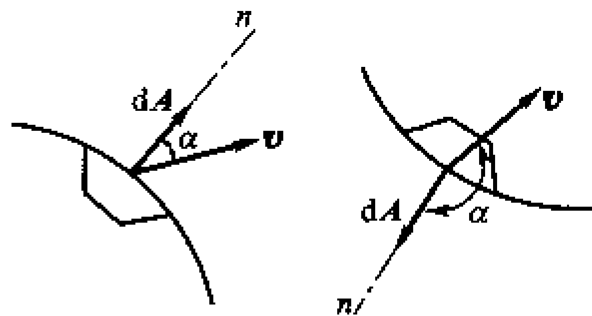


图 7-11

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\int_O \boldsymbol{v}\rho dV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}=\int_{AO}\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{A}$$

单位时间内从控制面经面积 A_{I} 处流入控制体的流体的动量为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\int_{\mathrm{I}} \boldsymbol{v}\rho dV_{\mathrm{I}}\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}=-\int_{A\mathrm{I}}\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{A}$$

所加的负号是因为流入时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 反向，$\alpha>\frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha$ 为负值。

通常在工程问题中，控制面将包括有固体边界，在这部分控制面上，没有流体流入和流出。于是，整个控制面上流入和流出的流体动量为

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\left(\int_O \boldsymbol{v}\rho dV\right)_{t+\Delta t}-\left(\int_{\mathrm{I}} \boldsymbol{v}\rho dV\right)_{t+\Delta t}\right]}{\Delta t}\\&=\int_{A_O}\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}d\boldsymbol{A}+\int_{A\mathrm{I}}\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}d\boldsymbol{A}\\&=\int_{C.S}\boldsymbol{v}\rho\boldsymbol{v}d\boldsymbol{A}\end{aligned}\tag{7-41}$$

所以，式(7-39)为

$$\begin{aligned}\sum \boldsymbol{F}&=\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho\boldsymbol{v}dV+\int_{C.S}\boldsymbol{v}\,(\rho\boldsymbol{v}d\boldsymbol{A})\\&=\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho\boldsymbol{v}dV+\int_{C.S}\boldsymbol{v}\,(\rho v\cos\alpha dA)\end{aligned}\tag{7-42}$$

因此，**流体质点系统**的动量变化率由两部分表达：控制体积内流体动量随时间的变化率，加上单位时间内流出和流入控制面的流体动量差。前者是在同一地点(控制体积内)由于时间变化而产生的力，又称为**瞬态力**，它相当于当地导数；后者是由于流体质点流入流出控制而所处的空间地点变化面产生的力，又称为稳态力，它相当于迁移导数。瞬态力与控制体积和时间有关，稳态力则与所取的控制面有关。

流体作恒定流动时，瞬态力

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{C.V}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = 0$$

即在恒定流动情况下，整个系统的动量变化只与通过控制面的流动有关。

$$\sum \boldsymbol{F} = \int_{C.S}\rho \boldsymbol{v} v_n \mathrm{d}A = \int_{C.S}\rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}q_V \tag{7-43}$$

在坐标轴方向的投影为

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \int_{C.S}\rho v_x v_n \mathrm{d}A = \int_{C.S}\rho v_x \mathrm{d}q_V\\ \sum F_y &= \int_{C.S}\rho v_y v_n \mathrm{d}A = \int_{C.S}\rho v_y \mathrm{d}q_V\\ \sum F_z &= \int_{C.S}\rho v_z v_n \mathrm{d}A = \int_{C.S}\rho v_z \mathrm{d}q_V\end{aligned} \tag{7-44}$$

对于管道中的流体流动(图 7-12)，我们取管道的壁面和过流断面为控制面，并以平均流速进行计算，则**动量方程**为

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \rho_2 q_{V_2}\alpha_{02}V_{2x} - \rho_1 q_{V_1}\alpha_{01}V_{1x}\\ \sum F_y &= \rho_2 q_{V_2}\alpha_{02}V_{2y} - \rho_1 q_{V_1}\alpha_{01}V_{1y}\\ \sum F_z &= \rho_2 q_{V_2}\alpha_{02}V_{2z} - \rho_1 q_{V_1}\alpha_{01}V_{1z}\end{aligned}$$

或

$$\sum \boldsymbol{F} = \rho_2 q_{V_2}\alpha_{02}\boldsymbol{V}_2 - \rho_1 q_{V_1}\alpha_{01}\boldsymbol{V}_1 \tag{7-45}$$

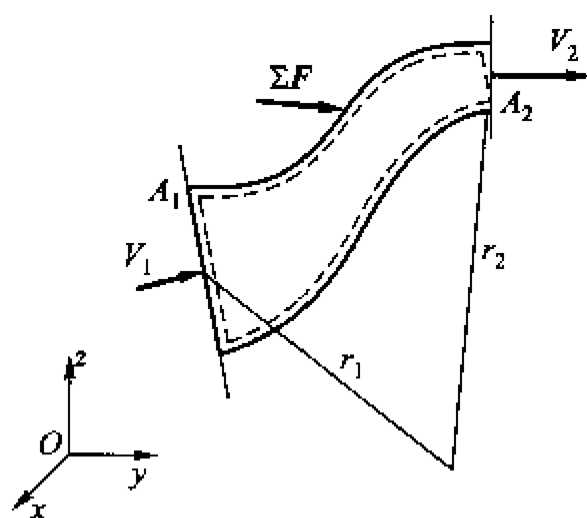


图 7-12

若流体不可压缩，流量连续，上式可写成

$$\sum \boldsymbol{F} = \rho q_V(\alpha_{02}\boldsymbol{V}_2 - \alpha_{01}\boldsymbol{V}_1) \tag{7-46}$$

应用动量方程解题时需要注意下列几点：

(1) 动量方程不同于连续性方程和伯努利方程，它是一个向量方程，所以应用时，将上式向指定方向投影，即可得到某指定方向上的动量方程，由此求出外力在该方向上的分量；

(2) $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$ 为平均流速，α_{01}，α_{02}为动量修正系数，一般工程计算中，对紊流流动，取 $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$；

(3) 要特别注意正确地选取控制面，控制面应恰好完全包含受所求总作用力影响的全部流体，应该完整地表达出作用在控制体和控制面上的外力，并注意流动方向和投影的正负。

将流入断面 1 的流体动量和流出断面 2 的流体动量对某点取矩，就可得到恒定流动的**动量矩方程**，即

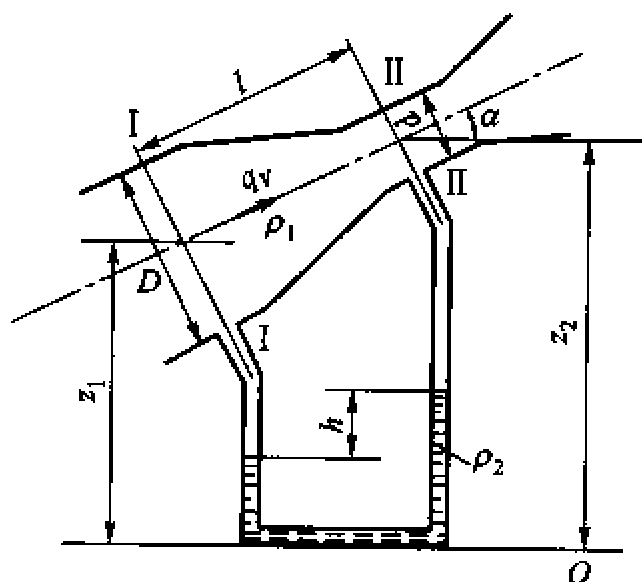
$$L=\rho q_V\alpha_{02}V_{20}r_2-\rho q_V\alpha_{01}V_{10}r_1 \tag{7-47}$$

式中 V_{20}，V_{10}——分别为 $\boldsymbol{V}_2$ 和 $\boldsymbol{V}_1$ 在以 r_2 和 r_1 为半径的圆周上的切向分量。

动量方程与动量矩方程，在求解叶片式流体机械中流体与固体间的相互作用力和力矩时十分有用，但控制体的正确选取有时并不十分容易。

例　　题

例 7-1　文丘里流量计可以测量流量 q_V，已知流量计的尺寸为：$D=0.2$ m、$d=75$ mm、$l=0.5$ m，并与水平面成 $\alpha=30°$ 角放置。压差计读数 $h=0.6$ m，水银密度 $\rho_2=13.6\times10^3$ kg/m^3，测量的液体为水 $\rho_1=10^3$ kg/m^3，不计任何损失，求流量 q_V。



例 7-1 图

解　对缓变过流断面Ⅰ-Ⅰ和Ⅱ-Ⅱ上的1、2两点以0-0为基准列伯努利方程，不计损失，有

$$z_1+\frac{p_1}{\rho_1 g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho_1 g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$$

取 $\alpha_1=\alpha_2=1$，则上式可整理成

$$(z_1-z_2)+\frac{p_1-p_2}{\rho_1 g}=\frac{V_2^2-V_1^2}{2g} \tag{a}$$

由几何关系有

$$z_1-z_2=-l\sin\alpha \tag{b}$$

又由静力学，有

$$p_1-p_2=\rho_1 g l\sin\alpha+(\rho_2-\rho_1)gh \tag{c}$$

由连续性方程

$$V_1\frac{\pi}{4}D^2=V_2\frac{\pi}{4}d^2$$

即

$$V_2=\left(\frac{D}{d}\right)^2 V_1 \tag{d}$$

将式(b)、(c)、(d)代入式(a)，得

$$-l\sin\alpha+\frac{1}{\rho_1 g}\left[\rho_1 g l\sin\alpha+(\rho_2-\rho_1)gh\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{D}{d}\right)^4 V_1^2-V_1^2}{2g}$$

整理得　$V_1=\sqrt{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)gh\Big/\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]}$

所以，流量为

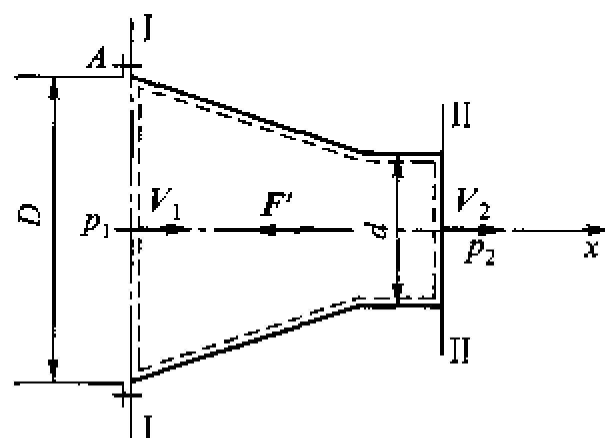
$$q_V=\frac{\pi}{4}D^2V_1$$

$$=\frac{\pi}{4}D^2\sqrt{2gh\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\Big/\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4-1\right]}$$

$$=0.054\ 3\ \mathrm{m^3/s}$$

由上式可见，q_V 与 α 无关，即流量计倾斜放置对流量的测量无影响。

例 7-2　密度 $\rho=1\ 000\ \mathrm{kg/m^3}$ 的水从图示水平放置的喷嘴喷出流入大气。已知喷嘴尺寸 $D=8$ cm，$d=2$ cm，测得出口速度 $V_2=15$ m/s，求螺栓组 A 所受的力。



例 7-2 图

解　由连续性方程得

$$q_V=\frac{\pi}{4}D^2V_1=\frac{\pi}{4}d^2V_2 \qquad (a)$$

所以

$$V_1=\left(\frac{d}{D}\right)^2V_2 \qquad (b)$$

对缓变过流断面Ⅰ－Ⅰ及Ⅱ－Ⅱ列伯努利方程，不计损失，且取 $\alpha_1=\alpha_2=1$，有

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}$$

由于喷嘴水平放置，故 $z_1=z_2$。而出流大气中 $p_2=0$。所以上式变为

$$p_1=\frac{\rho}{2}(V_2^2-V_1^2)$$

将式(b)代入，得

$$p_1=\frac{\rho}{2}\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]V_2^2 \qquad (c)$$

用动量方程求受力。取控制体ⅠⅠⅡⅡⅠ，则控制体内流体在 x 方向受压力 $p_1\frac{\pi}{4}D^2$，方向沿 x 轴正向；喷嘴对控制体内流体的作用力 F'，方向逆 x

方向。因此有

$$\sum F_x = p_1 \frac{\pi}{4} D^2 - F'$$

沿 x 方向列动量方程，且取 $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$，有

$$p_1 \frac{\pi}{4} D^2 - F' = \rho q_V (V_2 - V_1)$$

整理并将式(a)、(b)、(c)代入，有

$$\begin{aligned} F' &= p_1 \frac{\pi}{4} D^2 - \rho q_V (V_2 - V_1) \\ &= \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\rho}{2}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] V_2^2 - \rho \frac{\pi}{4} d^2 V_2 \left[V_2 - \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_2\right] \\ &= \frac{\pi \rho V_2^2 D^2}{8}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2 \\ &= 497\ \text{N} \end{aligned}$$

由牛顿第三定律，螺栓 A 受力

$$F = -F' = -497\ \text{N}$$

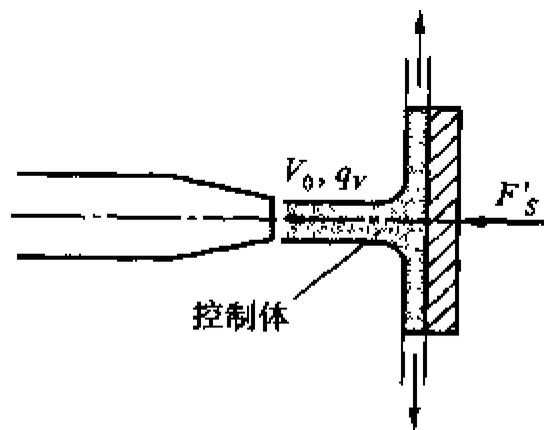
其中负号表示 F 与 F' 方向相反，即 F 沿 x 轴正向。

例 7－3 如图所示，来自喷嘴的射流垂直射向挡板。已知射流速度为 V_0，流量为 q_V，密度为 ρ，射流上的压强均为大气压，求挡板所受射流作用力。

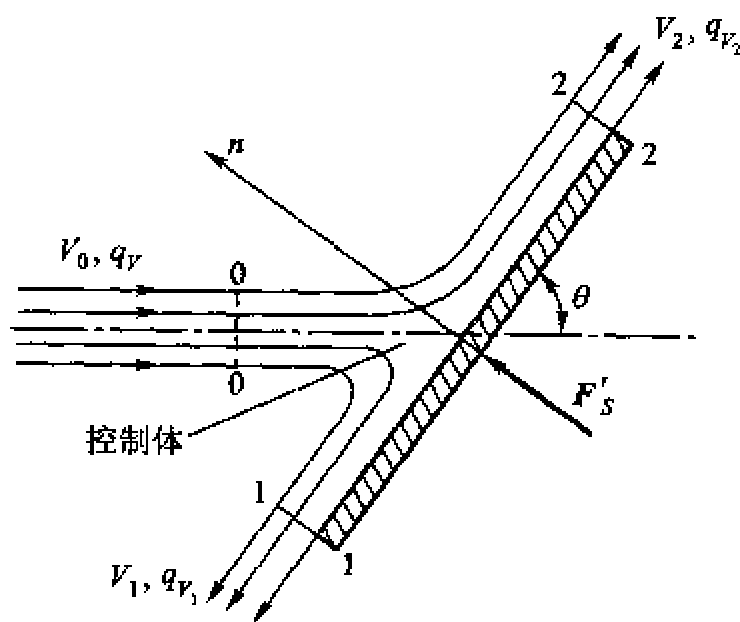
解 选取控制体如图所示，设挡板对射流的作用力为 F'_S，列水平方向上的动量方程得

$$\sum F_x = -F'_S = \rho q_V (0 - V_0) = -\rho q_V V_0$$

$$F'_S = \rho q_V V_0$$



例 7－3 图



例 7－4 图

挡板受射流作用力 F_S 与 F'_S 等值反向，垂直指向挡板，其大小为

$$F_S = \rho q_V V_0$$

例 7-4　一股水平方向上的射流冲击一斜置的光滑平板。已知射流来流速度为 V_0，流量为 q_V，密度为 ρ，平板倾角为 θ。不计重力及流动损失，求射流对平板的作用力及分流流量 q_{V_1}，q_{V_2}。

解　取控制体如图所示，控制面包含过流断面 0-0，1-1，2-2。设平板对液流的作用力为 F'_S，因忽略流动损失，即液流与平板间的摩擦力略去不记，则 F'_S 必垂直于板面。又由于不计重力和流动损失，由液流的能量关系式可知 $V_1 = V_2 = V_0$。列平板法线方向上的动量方程可得

$$\sum F_n = F'_S = \rho q_V [0 - (-V_0 \sin\theta)] = \rho q_V V_0 \sin\theta$$

平板受射流作用力 F_S 垂直指向平板，其大小为

$$F_S = \rho q_V V_0 \sin\theta$$

沿平板方向列动量方程，可得

$$\rho q_{V_2} V_2 - \rho q_{V_1} V_1 - \rho q_V V_0 \cos\theta = 0$$

由 $V_2 = V_1 = V_0$ 得

$$q_{V_2} - q_{V_1} - q_V \cos\theta = 0$$

又

$$q_{V_1} + q_{V_2} = q_V$$

联立上两式解得

$$q_{V_1} = \frac{q_V}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$q_{V_2} = \frac{q_V}{2}(1 + \cos\theta)$$

例 7-5　一水平放置的渐缩弯管如图所示，已知管内液流密度为 ρ，流量为 q_V，弯管进出口内径分别为 d_1、d_2，d_1 处压强为 p_1，弯管弯转角度为 θ。不计流动损失，求弯管所受液流作用力

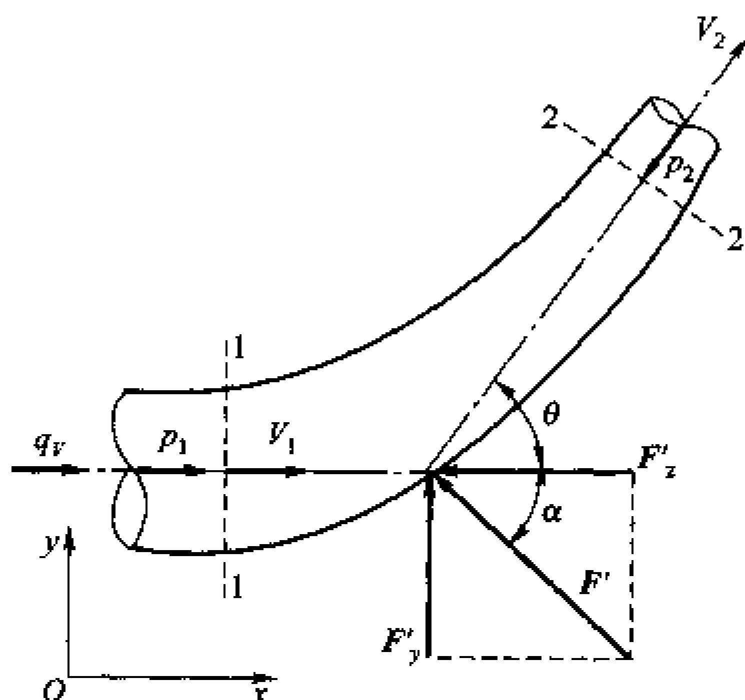
解　取断面 1-1、2-2 列伯努利方程，并注意到，弯管水平放置，有 $z_1 = z_2$，不计流动损失，取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$，可得

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \qquad ①$$

断面 1-1、2-2 上的平均速度为

$$V_1 = \frac{q_V}{\frac{\pi}{4} d_1^2}; \quad V_2 = \frac{q_V}{\frac{\pi}{4} d_2^2} \qquad ②$$

将②式代入①式中，可解得 p_2 为



例 7－5 图

$$p_2 = p_1 + \frac{8\rho q_V^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^4}\right) \tag{③}$$

选取 1122 为控制体，设弯管壁对控制体液流的作用力为 F'。取 $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$，列 x 方向的动量方程，可得

$$p_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 - p_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 \cos\theta - F'_x = \rho q_V (V_2 \cos\theta - V_1)$$

$$F'_x = p_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 - p_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 \cos\theta - \rho q_V (V_2 \cos\theta - V_1)$$

将式①、②、③代入上式整理可得

$$F'_x = p_1 \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2 \cos\theta) - \frac{2\rho q_V^2}{\pi}\cos\theta\left(\frac{d_2^2}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^2}\right) + \frac{4\rho q_V^2}{\pi}\frac{1}{d_1^2} \tag{④}$$

同理，由 y 方向动量方程可得

$$F'_y - p_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 \sin\theta = \rho q_V V_2 \sin\theta$$

$$F'_y = \left(\rho q_V V_2 + p_2 \frac{\pi}{4} d_2^2\right)\sin\theta$$

$$= \left[\frac{\rho q_V^2}{\frac{\pi}{4} d_2^2} + \frac{\pi}{4} d_2^2 p_1 + \frac{2\rho q_V^2}{\pi}\left(\frac{d_2^2}{d_1^4} - \frac{1}{d_2^2}\right)\right]\sin\theta \tag{⑤}$$

管壁对液流的总作用力 F' 为

$$F' = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2}$$

作用方向为

$$\tan\alpha=\frac{F'_y}{F'_x}$$

弯管受液流作用力 F 与 F' 大小相等，方向相反。

由式④、⑤可以讨论任一弯角 θ 下的 F'_x 和 F'_y，如当 $\theta=0$ 时，有

$$F'_x=p_1\frac{\pi}{4}(d_1^2-d_2^2)-\frac{2\rho q_V^2}{\pi}\left(\frac{d_2^2}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^2}\right)+\frac{4\rho q_V^2}{\pi}\frac{1}{d_1^2}$$

$$F'_y=0$$

当 $\theta=\pi/2$ 时

$$F'_x=p_1\frac{\pi}{4}d_1^2+\frac{4\rho q_V^2}{\pi}\frac{1}{d_1^2}$$

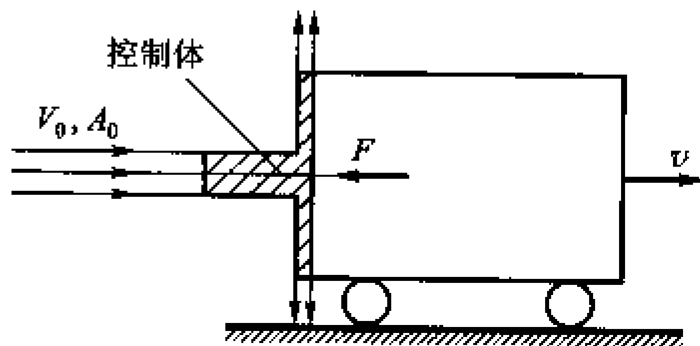
$$F'_y=\frac{\rho q_V^2}{\frac{\pi}{4}d_2^2}+\frac{\pi}{4}d_2^2p_1+\frac{2\rho q_V^2}{\pi}\left(\frac{d_2^2}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^2}\right)$$

当 $\theta=\pi$ 时

$$F'_x=p_1\frac{\pi}{4}(d_1^2+d_2^2)+\frac{2\rho q_V^2}{\pi}\left(\frac{d_2^2}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^2}\right)+\frac{4\rho q_V^2}{\pi}\frac{1}{d_1^2}$$

$$F'_y=0$$

例 7-6　一水平方向射流射向水平位置上的小车左侧面壁上，已知射流的密度为 ρ，速度为 V_0，过流断面为 A_0，小车在射流作用下以速度 v 向右行走。求：(1)小车受射流作用力 F；(2)当小车运动速度 v 为何值时，可由射流获得最大功率。



例 7-6 图

解　(1) 取动坐标系下的控制体如图所示。控制体的入流速度为相对速度 $v_r=V_0-v$，流量为相对流量 $q_{V_r}=v_rA=(V_0-v)A$，控制面上的压强除壁面外均为大气压强。设小车给射流的作用力为 F'，列水平方向动量方程，可得

$$\sum F=-F'=-\rho q_{V_r}v_r=-\rho A(V_0-v)^2$$

$$F'=\rho A(V_0-v)^2$$

小车受射流作用力 $F=-F'$，方向向右，其大小为

$$F=\rho A(V_0-v)^2$$

(2) 小车由射流获得的功率为

$$P = F \cdot v = \rho A\ (V_0 - v)^2 v$$

上式对 v 求导并令其为零，有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = \rho A\ (V_0^2 - 4V_0 v + 3v^2) = 0$$

即
$$V_0^2 - 4V_0 v + 3v^2 = 0$$

解得
$$v_1 = V_0;\quad v_2 = \frac{1}{3}V_0。$$

舍去 $v_1 = V_0$，得出当 $v = \frac{1}{3}V_0$ 时，$P = P_{\max}$

$$P_{\max} = \rho A\left(V_0 - \frac{1}{3}V_0\right)^2 \cdot \frac{1}{3}V_0$$

$$= \frac{4}{27}\rho A V_0^3$$

习　题

7-1 粘性流体总水头线沿程的变化是：(a)沿程下降；(b)沿程上升；(c)保持水平；(d)前三种情况都有可能。

7-2 粘性流体测压管水头线的沿程变化是：(a)沿程下降；(b)沿程上升；(c)保持水平；(d)前三种情况都有可能。

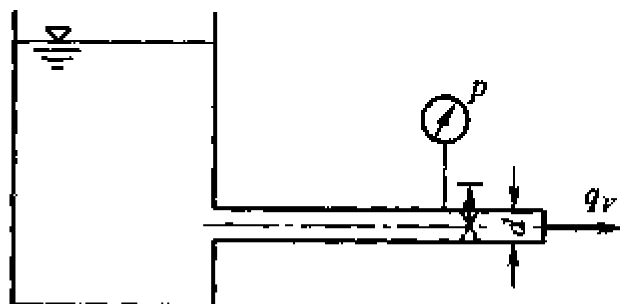
7-3 已知粘度为 μ 的不可压缩流体流动的速度分量为

$$v_x = Ax + By \quad v_x = Cx + Dy \quad v_z = 0$$

且在原点 $p = 0$。试求该流场中任一点 $M\ (x, y, z)$上各方向的应力。

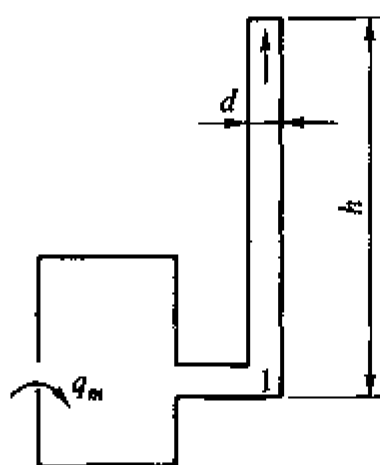
7-4 试证明粘性不可压缩流体在一般情况下不可能有势。

7-5 有一容器的出水管直径 $d = 10$ cm，当龙头关闭时压强计读数为 49 000 Pa（表压），龙头开启后压强计读数降为 19 600 Pa（表压），如果总的能量损失为 4 900 Pa，试求通过管路的水流流量 q_V。

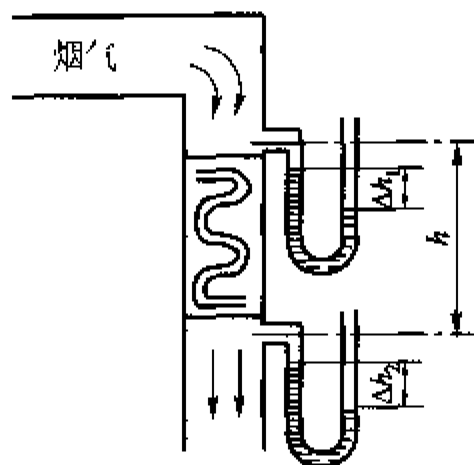


题7-5图

7-6 烟囱直径 $d = 1$ m，通过烟气量 $q_m = 17.96$ kg/h，烟气密度 $\rho = 0.7$ kg/m³，周围大气密度 $\rho = 1.2$ kg/m³，烟囱内压强损失 $\Delta p_w = 0.035\,\frac{h}{d}\cdot\frac{V^2}{2g}$。为保证烟囱底部断面 1 的负压不小于 10 mm 水柱，烟囱高度 h 应为多少？



题 7-6 图



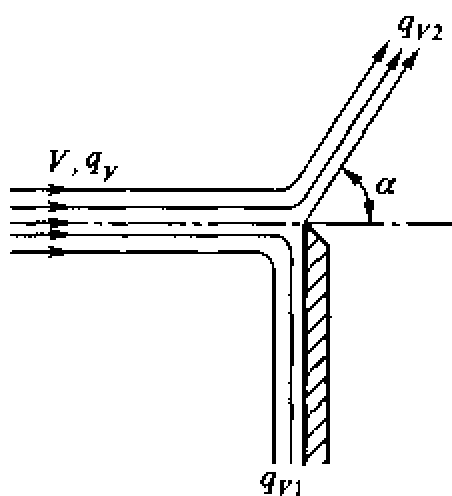
题 7-7 图

7-7 在锅炉省煤器的进口断面测得负压 $\Delta h_1 = 102.97$ Pa，出口断面负压 $\Delta h_2 = 196.13$ Pa，两测点的高差 $h = 5$ m，烟气的平均密度 $\rho_{sm} = 0.6\ \mathrm{kg/m^3}$，炉外空气密度 $\rho_{ai} = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$。求烟气通过省煤器时的压强损失值。

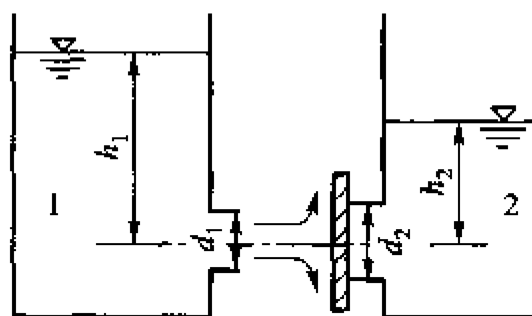
7-8 齿轮泵从油箱吸油。如果齿轮泵安装在油面之上 0.4 m 处，泵的流量为25 l/min，吸油口直径 $d = 30$ mm，设滤油网及管道内总的压降为 0.3×10^5 Pa，油液相对密度 $d = 0.88$。求进油口的绝对压强。(设油面上的大气压强 $p_a = 9.81 \times 10^4$ Pa)。

7-9 嵌入支座的一段输水管，直径 $D = 1.5$ m、$d = 1$ m，当支座前的压强 $p = 3.92 \times 10^5$ Pa 和流量 $q_V = 1.8\ \mathrm{m^3/s}$ 时，试确定支座所承受的轴向力(忽略损失)。

7-10 将一平板深入水的自由射流内，垂直于射流的轴线。该平板截去射流流量的一部分 q_{V_1}，引起射流剩余部分偏转角度 α。已知射流流速 $V = 30$ m/s，全部流量 $q_V = 36 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$，截去流量 $q_{V_1} = 12 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$。求偏角 α 及平板受力 F。



题 7-10 图



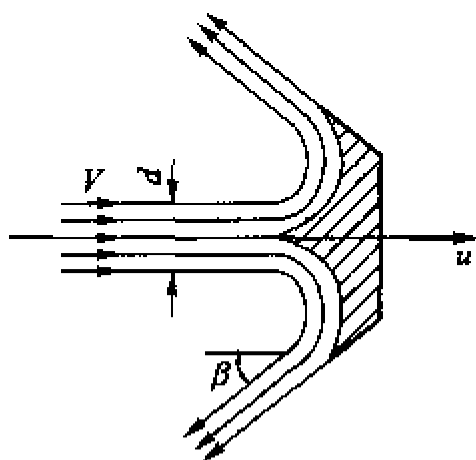
题 7-11 图

7-11 如图所示，水由水箱 1 经圆滑无阻力的孔口水平射出，冲击到一平板上，平板封盖着另一水箱 2 的孔口，两水箱孔口中心线重合，水位高分别为 h_1 和 h_2，孔口径 $d_1 = \frac{1}{2} d_2$。求保证平板压在 2 箱孔口上时 h_1 与 h_2 的关系。(不计平板的重量及摩擦力)。

7-12 一股直径 $d=50$ mm，速度 $V=70$ m/s 的射流射入图示水斗，水斗出水口角度 $\beta=10°$。不计损失，求下列两种情况下水斗受力。

(1) 水斗不动；

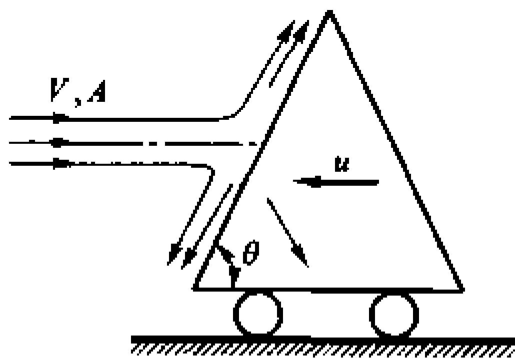
(2) 水斗以 $u=35$ m/s 等速运动。



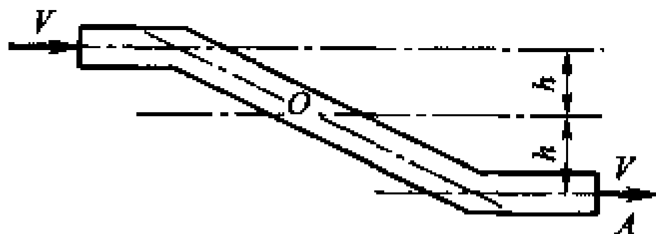
题 7-12 图

7-13 使带有倾斜光滑平板的小车逆着射流方向以速度 u 移动(如图)，若射流喷咀固定不动，射流断面积为 A，流速为 V，不计小车与地面的摩擦力，求推动小车所需的功率。

7-14 偏心管接头如图所示，管内截面积为 A，管中流体的流速为 V，流体密度为 ρ，试求防止管接头转动所需施加的外力矩 M。

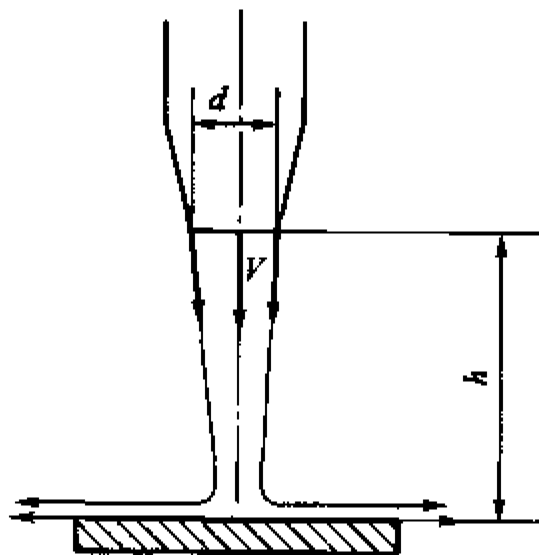


题 7-13 图

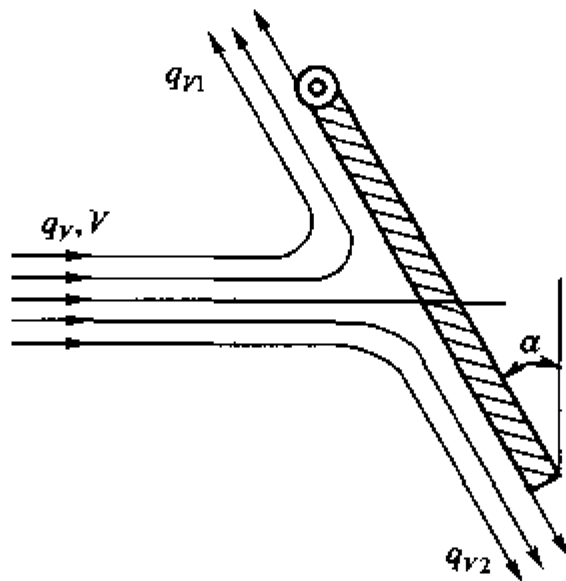


题 7-14 图

7-15 如图所示，水自铅垂方向的管嘴喷流而出射向下方的水平板面上。已知水的密度 $\rho=1\ 000$ kg/m^3，管嘴直径 $d=30$ mm，管嘴处水流速度 $V=15$ m/s，板面至管嘴的高度 $h=5$ m。假设射流冲击板面后沿板面向四周流去，不计板面上四周流水的重量，求此射流对板面的冲击力。



题 7-15 图

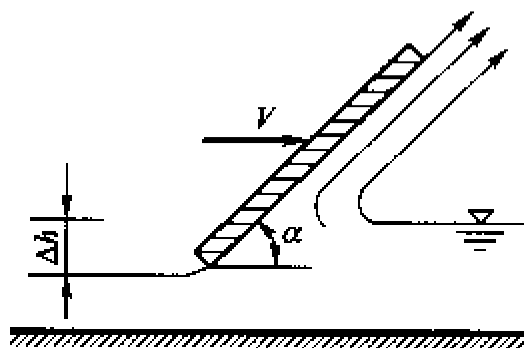


题 7-16 图

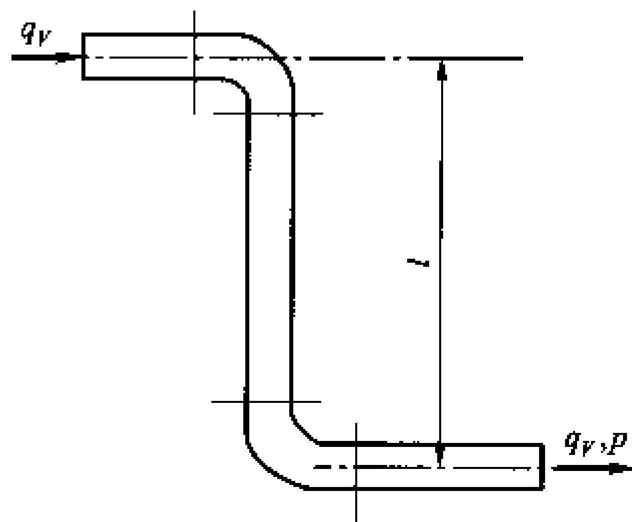
7-16 图示为一均匀厚度的平板，受水平射流冲击，冲击后使平板与铅垂方向偏离

$\alpha=30°$角，此射流作用在平板的形心处。已知射流流速 $V=10$ m/s，流量为 $q_V=50$ L/min，射流与铰链之垂直距离为 $h=15$ cm。不计流动损失，求：(1)分流流量 q_{V_1}、q_{V_2}；(2)射流对平板的作用力(取射流密度 $\rho=1\ 000$ kg/m^3)；(3)平板的质量。

7－17　图示一平板与水平面成 $\alpha=45°$角沿不动的水面滑行。已知平板前进速度 $V=10$ m/s，在平板后引起的水位降低 $\Delta h=10$ mm。忽略流动阻力和水的自重，求水对单位宽度平板的作用力。



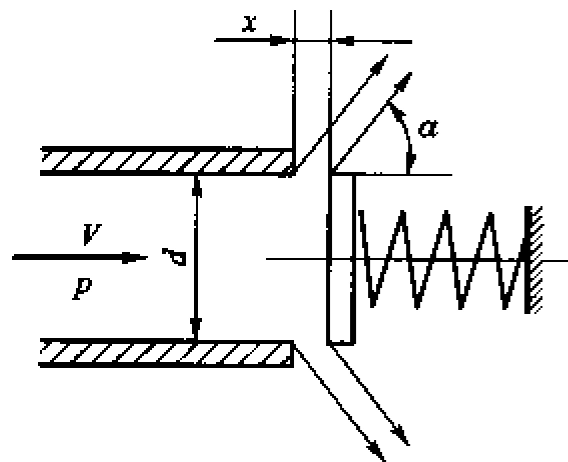
题 7－17 图



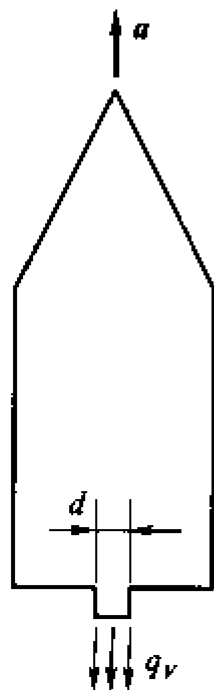
题 7－18 图

7－18　油在如图所示的管中流动。已知油的密度 $\rho=850$ kg/m^3，流量 $q_V=0.5$ m^3/s，管径 $d=25$ cm，两个弯头之间距离 $l=1$ m，下部弯头出口处压强 $p=1$ MPa。求油流对上部弯头的作用力矩大小和方向(不计损失)。

7－19　图示为一安全阀，其阀座直径 $d=25$ mm，当阀座处的压力 $p=4$ MPa 时，通过油的流量 $q_V=10$ L/s，油的密度 $\rho=900$ kg/m^3，此时阀的开度 $x=5$ mm。如开启阀的初始压力 $p_0=3$ MPa，阀的弹簧刚度 $K=20$ N/mm，忽略流动损失，试确定射流方向角 α。



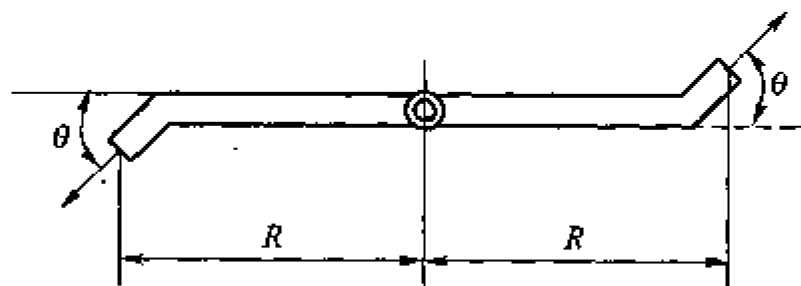
题 7－19 图



题 7－20 图

7 - 20 有一质量为1.5 kg的火箭，由其末端内径 $d = 10$ mm的喷嘴喷出气体。已知气体流量为 $q_V = 8 \times 10^{-2}$ m/s，密度 $\rho = 0.103$ kg/m^3 求这个火箭铅直向上发射之后的加速度。

7 - 21 图示一洒水装置的旋转半径 $R = 200$ mm，喷嘴直径 $d = 8$ mm，喷射方向角 $\theta = 45°$，两个喷嘴的流量均为 $q_V = 0.28$ L/s。若已知摩擦阻力矩 $M = 0.2$ N·m，求转速 n。若在喷水时不让其旋转，应施加多大的力矩。



题7 - 21图

第8章

流动相似原理基础

我们已经得出了理想和粘性流体运动的微分方程式，对于一些可以用理想流体处理的工程问题，及对于像圆管、平行平板间等有限的几种层流流动，可以得到精确求解的方法。

对于大多数粘性流体流动的工程问题，由于流体流动内在结构的复杂性，难以用微分方程加以描述，或者即使能够建立微分方程式，却由于起始条件和边界条件不能用数学方法给定，目前还无法求得其精确解。

流体力学的很多基本规律都是在某些简化的前提条件下得到的，求解具体问题时，只能根据具体情况，作出一些假设和推断，保留主要项，忽略次要项，求得问题的近似解。但是，这些前提假设，理论分析的运动情况以及由此求得的解是否合理，只能依靠试验验证。最初，人们用直接试验的方法，解决了一些用数学方法难以解决的流动问题，但结果只能应用于与试验条件相同的流动现象，有很大的局限性。

随着工业的发展，热能动力装置单机容量已达60—100万千瓦，船舶已达50万吨以上，飞机已成为空中公共汽车。这些涉及流体动力的整机和部件，不少设计方法都依据于试验获得，但又无法用实物直接进行试验研究。对一些正欲建造的大型新设备，设计理论本身就是个需要探索的问题，不可能对大型实物提供试验研究。试验总是在人为的某些条件下进行的，通过试验掌握流动规律，得到一些解决问题的经验公式或设计方法，然后将特定条件下的试验结果推广到其它相类似的流动过程或设计中去。

所有这些，都需要采用以**相似原理**为基础的模型试验方法。在流动相似原理的基础上，按一定原则把实物原型缩小或放大，选取合适的流动介质，制成模型试验装置。根据试验测定的参数，整理试验数据，得出模型试验的流体流动规律，然后依据相似原理，将这些结果推广到与试验模型相似的各种实际设备上去。为此必须解决：

(1) 如何根据实物确定试验模型？怎样选择流动介质？

（2）试验过程中需要测量哪些物理量，怎样整理试验数据才能正确反映实际工程的情况，才能得到流动的规律性？

（3）怎样将模型试验的观察、测量和整理结果还原至实物，并进行应用推广？

上述各项需要在不同工作条件的模型与实物之间能够相互换算，这种换算比例关系的基础，就是流体的力学相似。

相似原理与模型试验研究方法不仅广泛应用于流体力学，而且广泛地应用于传热、燃烧过程机理等的研究中。

§8－1 流动力学相似条件

只有在几何相似的基础上，才能实现两个流动现象的力学相似。因此，两个流动现象的力学相似，必须满足下面三个条件：

1. 几何相似

模型液流与实物液流有相似的边界条件，一切对应的特征尺寸成同一比值，且对应角相等。

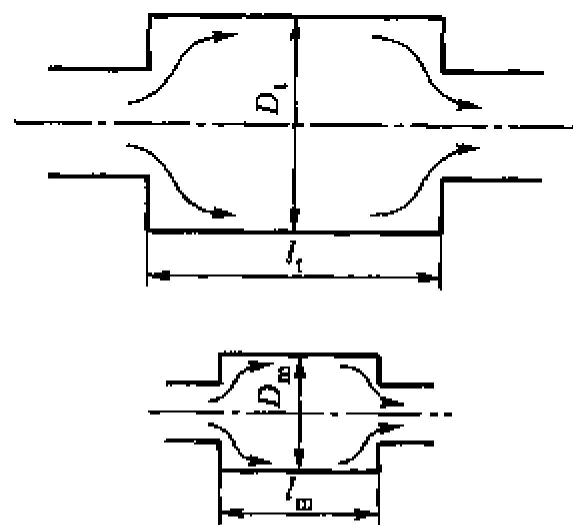


图 8－1

图 8－1 给出了两个液流图形，实物液流用脚标 t 表示，模型用脚标 m 表示，若两个液流几何相似，对应的几何长度为

$$\frac{l_t}{l_m} = \frac{D_t}{D_m} = C_l \qquad (8-1)$$

两个液流几何相似时，对应的面积和体积应满足

$$C_A = \frac{A_t}{A_m} = \frac{l_t^2}{l_m^2} = C_l^2 \qquad (8-2)$$

$$C_V = \frac{V_t}{V_m} = \frac{l_t^3}{l_m^3} = C_l^3 \qquad (8-3)$$

式中 C_l 是相似比例常数，只有满足上述条件，液流才能几何相似。

2. 运动相似

满足几何相似的两个液流中，若在对应瞬时，所有对应点上的速度方向一致，大小成同一比例，则两个液流运动相似。

要满足上述条件，两个液流中各对应点流动状态参数变化的时间间隔应具有同一比例常数，即

$$\frac{t_{t1}}{t_{m1}}=\frac{t_{t2}}{t_{m2}}=\frac{t_{t3}}{t_{m3}}=C_t \tag{8-4}$$

运动相似液流中对应点处的速度和加速度满足

$$C_v=\frac{v_{t1}}{v_{m1}}=\frac{v_{t2}}{v_{m2}}=\frac{v_t}{v_m}=\frac{l_t/t_t}{l_m/t_m}=\frac{C_l}{C_t} \tag{8-5}$$

$$C_a=\frac{a_{t1}}{a_{m1}}=\frac{a_{t2}}{a_{m2}}=\frac{a_t}{a_m}=\frac{C_l}{C_t^2} \tag{8-6}$$

显然，两个运动相似的液流中，同一瞬时对应的流线应当相似，对恒定流动，对应流体质点的运动轨迹几何相似，且通过对应迹线的时间成同一比例。

3. 动力相似

两个运动相似的液流中，在对应瞬时，对应点上受相同性质力的作用，力的方向相同，且各对应的同名力成同一比例，则两个液流**动力相似**。

若一个液流中某流体质点上只受重力和离心力作用，另一液流对应点上也必须只受重力和离心力的作用，且对应流体质点上所受的重力之比应等于离心力之比。因此，动力相似有

$$C_F=\frac{F_{t1}}{F_{m1}}=\frac{F_{t2}}{F_{m2}}=\frac{F_t}{F_m} \tag{8-7}$$

又由牛顿定律

$$C_F=\frac{F_t}{F_m}=\frac{M_t a_t}{M_m a_m}=\frac{\rho_t V_t a_t}{\rho_m V_m a_m}=C_\rho C_l^2 C_v^2$$

即

$$\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2}=1$$

有

$$\frac{F_t}{\rho_t l_t^2 v_t^2}=\frac{F_m}{\rho_m l_m^2 v_m^2}=Ne \tag{8-8}$$

这一无因次数称为**牛顿数**，是判别液流是否动力相似的无因次数或牛顿判据，牛顿数相等是两个流动力学相似的必要条件。

由上述相似条件得到，几何相似是运动相似的必要条件，运动相似是动力相似的必要条件，且当两流动对应点处的流体质点上作用着同名力，各同名力间有同一比例，并存在相似的起始和边界条件时，称该两流动力学相似。

§8-2 粘性流体流动的力学相似准数

任何相似的现象都是属于同一种类的现象，在两个力学相似流动的对应点处，流体运动的所有物理量遵循同一微分方程式，各量间的比值，彼此相互约束。应该从粘性流体流动的微分方程出发，寻求流体流动的一般**相似判据**。

设有实物和模型两个力学相似的不可压缩粘性流体流动，对于实物流动，通过给定点的任意流体质点有运动方程

$$\left.\begin{aligned}
&f_{xt}-\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial p_t}{\partial x_t}+\nu_t\nabla^2 v_{xt}\\
&\quad=\frac{\partial v_{xt}}{\partial t_t}+v_{xt}\frac{\partial v_{xt}}{\partial x_t}+v_{yt}\frac{\partial v_{xt}}{\partial y_t}+v_{zt}\frac{\partial v_{xt}}{\partial z_t}\\
&f_{yt}-\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial p_t}{\partial y_t}+\nu_t\nabla^2 v_{yt}\\
&\quad=\frac{\partial v_{yt}}{\partial t_t}+v_{xt}\frac{\partial v_{yt}}{\partial x_t}+v_{yt}\frac{\partial v_{yt}}{\partial y_t}+v_{zt}\frac{\partial v_{yt}}{\partial z_t}\\
&f_{zt}-\frac{1}{\rho_t}\frac{\partial p_t}{\partial z_t}+\nu_t\nabla^2 v_{zt}\\
&\quad=\frac{\partial v_{zt}}{\partial t_t}+v_{xt}\frac{\partial v_{zt}}{\partial x_t}+v_{yt}\frac{\partial v_{zt}}{\partial y_t}+v_{zt}\frac{\partial v_{zt}}{\partial z_t}
\end{aligned}\right\}\qquad(8-9)$$

对于模型流动，通过对应点的任意流体质点有运动方程

$$\left.\begin{aligned}
&f_{xm}-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial x_m}+\nu_m\nabla^2 v_{xm}\\
&\quad=\frac{\partial v_{xm}}{\partial t_m}+v_{xm}\frac{\partial v_{xm}}{\partial x_m}+v_{ym}\frac{\partial v_{xm}}{\partial y_m}+v_{zm}\frac{\partial v_{xm}}{\partial z_m}\\
&f_{ym}-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial y_m}+\nu_m\nabla^2 v_{ym}\\
&\quad=\frac{\partial v_{ym}}{\partial t_m}+v_{xm}\frac{\partial v_{ym}}{\partial x_m}+v_{ym}\frac{\partial v_{ym}}{\partial y_m}+v_{zm}\frac{\partial v_{ym}}{\partial z_m}\\
&f_{zm}-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial z_m}+\nu_m\nabla^2 v_{zm}\\
&\quad=\frac{\partial v_{zm}}{\partial t_m}+v_{xm}\frac{\partial v_{zm}}{\partial x_m}+v_{ym}\frac{\partial v_{zm}}{\partial y_m}+v_{zm}\frac{\partial v_{zm}}{\partial z_m}
\end{aligned}\right\}\qquad(8-10)$$

由于两个流动几何相似和运动相似，根据相似条件有

$$x_t=C_l x_m;\quad y_t=C_l y_m;\quad z_t=C_l z_m,\quad t_t=C_t t_m$$

$$v_{xt}=\frac{C_l}{C_t}v_{xm}=C_v v_{xm};\quad v_{yt}=\frac{C_l}{C_t}v_{ym}=C_v v_{ym};$$

$$v_{zt}=\frac{C_l}{C_t}v_{zm}=C_v v_{zm}$$

即有

$$v_t=C_v v_m$$

对于力学相似的两个液流，对应点处的同名力

$$p_t=C_p p_m$$

$$f_{xt}=C_F f_{xm}\quad f_{yt}=C_F f_{ym}\quad f_{zt}=C_F f_{zm}$$

同时，在所讨论的力学相似的流动中，流体的密度和粘性系数在对应点处都满足下述关系

$$\rho_t=C_\rho \rho_m;\quad \nu_t=C_\nu \nu_m$$

上述，我们引入了两个流动各物理量的相似常数 C_l，C_v，C_t，C_p，C_ρ，C_F 和 C_ν 等，这些常数与所选取的坐标和时间无关，在流动的物理量变化过程中，在对应瞬时的对应点上应予满足。这些常数决定于所研究流动的起始条件、边界条件及这些流动中流体的力学性质。

显然，由于两个相似流动的各物理量必须满足同一运动微分方程，因此各对应量的比值互相制约，相似倍数不能任意选取。

将各物理量的相似常数代入实物流动的运动方程中，得到

$$\begin{aligned}&C_F f_{xm}-\frac{C_p}{C_\rho C_l}\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial x_m}+\frac{C_\nu C_v}{C_l^2}\nu_m\ \nabla^2\ v_{xm}\\&=\frac{C_v}{C_t}\frac{\partial v_{xm}}{\partial t_m}+\frac{C_v^2}{C_l}\left(v_{xm}\frac{\partial v_{xm}}{\partial x_m}+v_{ym}\frac{\partial v_{xm}}{\partial y_m}+v_{zm}\frac{\partial v_{xm}}{\partial z_m}\right)\end{aligned}\tag{8-11}$$

这样处理后，方程中的参数变成了模型流动中的参数，与模型流动微分方程的各项参数只是系数不同。由流体动力相似得到：两个力学相似流动中，对应点上各同名力的比值相等，于是

$$C_F=\frac{C_p}{C_\rho C_l}=\frac{C_\nu C_v}{C_l^2}=\frac{C_v}{C_t}=\frac{C_v^2}{C_l}\tag{8-12}$$

上述各项分别表示两个力学相似的实物流动与模型流动中，各对应点上作用在单位质量流体上的质量力之比、压强之比、粘性力之比和惯性力之比。若将上式各项除以 C_v^2/C_l，有

$$\frac{C_F C_l}{C_v^2}=\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}=\frac{C_\nu}{C_l C_v}=\frac{C_l}{C_t C_v}=1\tag{8-13}$$

由此，求得粘性不可压缩流体流动的相似准数，即

(1) $\dfrac{C_v C_t}{C_l}=1$

得
$$\frac{v_t t_t}{l_t}=\frac{v_m t_m}{l_m}=\frac{vt}{l}=St \tag{8-14}$$

St（不变数）——**斯特劳哈尔（Strouhal）数**

若两液流相应的斯特劳哈尔数相等，则液流对非恒定流动惯性力而言是力学相似的。对非恒定的周期运动，反映其周期性相似。对恒定流动，不必考虑 St 数。

（2）$\frac{C_l C_v}{C_\nu}=1$

得
$$\frac{v_t l_t}{\nu_t}=\frac{v_m l_m}{\nu_m}=\frac{vl}{\nu}=Re \tag{8-15}$$

Re（不变数）——**雷诺数**，它表征液流中惯性力和粘滞力之比。

若两液流对应点上的雷诺数相等，则液流对粘性力而言是力学相似的。因此，很容易理解，不论何种液体，在几何相似的大小不同的圆管中流动，它们的临界雷诺数都相等，其原因是对粘滞力而言处于流动力学相似状态。当 Re 很大时，流动进入紊流阻力平方区，这时惯性力起主导作用，粘性力可以忽略不计，力学相似已不再要求雷诺数相等，因此，Re 数不必考虑。

（3）$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}=1$

得
$$\frac{p_t}{\rho_t v_t^2}=\frac{p_m}{\rho_m v_m^2}=\frac{p}{\rho v^2}=Eu \tag{8-16}$$

Eu（不变数）——**欧拉数**，它表征液流中压强与惯性力之比。

因为流体中的压强或压差往往决定于其它参数，而并不是流体固有的物理性质，所以欧拉数不是独立的相似准数，而可以是其它相似准数的函数，即它不是相似条件而是相似的结果，因此，只要主要的相似准则数得到满足，欧拉数就一定相等。

（4）$\frac{C_v^2}{C_F C_l}=1$

得
$$\frac{v_t^2}{F_t l_t}=\frac{v_m^2}{F_m l_m}=\frac{v^2}{Fl}=Fr \tag{8-17}$$

Fr（不变数）——**弗劳德（Froude）数**

若流体所受的质量力只有重力，$F_t=F_m=g$，则

$$Fr=\frac{v^2}{gl}$$

Fr 相等，表示了流动现象的重力作用相似，它反映了重力对流体的作用。

另外，对可压缩流体的流动，声速为

$$c^2=\frac{\partial p}{\partial \rho}$$

对模型和实物流动中，流体质点上的相似比例常数为

$$C_c^2=\frac{C_t^2}{C_m^2}=\frac{\partial p_t/\partial \rho_t}{\partial p_m/\partial \rho_m}=\frac{C_p}{C_\rho}$$

又因为

$$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}=\frac{C_c^2}{C_v^2}=1$$

得

$$\frac{v_t}{C_t}=\frac{v_m}{C_m}=\frac{v}{C}=Ma \tag{8-18}$$

Ma（不变数）称为**马赫（Mach）数**

因为 $c^2=\frac{\partial p}{\partial \rho}$，所以声速 c 实质上为流体单位密度变化所需要的压强变化，即反映了流体的压缩性，因此马赫数反映流体的压缩性大小，Ma 数相等就是压缩性相似。

如果粘性不可压缩流体的两个流动力学相似，那么，满足边界条件和起始条件相似的 St，Eu，Re 和 Fr 应当相等，这就是相似准则，称 St，Re，Eu 和 Fr 为相似准数。两个流动的相似准数相同，表示了对应点处单位质量流体上作用的力多边形几何相似。

利用同样的方法，可以建立粘性不可压流体时均紊流的相似准数。

§8－3　决定性相似准数

上述得到的相似准数，是任意两个力学相似的流动应当满足的条件。在实际的液流中，液体上总有重力、粘滞力、压力和惯性力等同时作用。但是，由试验和分析知道，在流体流动的力学现象中，通常只有一到二种力起着主要作用，决定力学现象的本质，另一些力则属于次要地位，因而在任何流动现象中，都存在着决定现象本质的主要作用力。

由于实际流动的复杂性，要同时满足四个相似准数十分困难，且有些相似准数要同时满足也是不可能的，因此，在流体力学的相似理论中，一般采用近似的力学相似，即只需求得主要作用力的力学相似，其它对流动现象不起主要作用的力则忽略不计。

两个力学相似的流动，由起始和边界条件所给定的物理量组成的相似准数，称为决定性相似准数，这些相似准数决定流动的性质，如 Re，Fr 等，Eu 因不是独立的相似准数，所以它不是决定性相似准数。在近似模化试验中，通常选择对流动起主导作用的决定性相似准数，而忽略影响较小的决定性相似准

数。实际上，工程实际中起主导作用的决定性相似准数通常较少超过两个，只要保证所研究流动的主要方面相似，通常就能够满足实际问题所要求的精度。

实践证明，两个流动一般很难实现同时满足 Re 和 Fr 准则数相等。

若两种不同流体的流动力学相似，满足 Re 相等

即
$$\frac{v_t l_t}{\nu_t}=\frac{v_m l_m}{\nu_m}$$

有
$$\frac{v_t}{v_m}=\frac{1}{C_l}\frac{\nu_t}{\nu_m}$$

若同时满足 Fr 相等，并令 $g_t=g_m$，则
$$\frac{l_t}{v_t^2}=\frac{l_m}{v_m^2}$$

有
$$\frac{v_t}{v_m}=\sqrt{C_l}$$

于是
$$C_l^{3/2}=\frac{\nu_t}{\nu_m}$$

若实物尺寸为 10 m，现以 $l=1$ m 的模型进行试验，$C_l=10$，则
$$\nu_m=\frac{\nu_t}{31.6}$$

如果实物试验的工作介质为水，必须选用粘性比水小 31.6 倍的流体作模型试验。在工程实际中，很难找到粘度相差这样大的两种流体，为此，必须增大模型尺寸，但这又失去了模型试验的优点。

显然，决定性相似准则数的判断选择十分重要，选择不当，设计的模型试验甚至会得到与实际完全不同的结果，所以必须在对实际流动充分观察和分析的基础上，选取决定性相似准则数。所选取的相似准则数越少，实施中越容易满足。若描述流动所需的单个力愈多，在设计动力相似系统时，独立的选择就愈少。

上述四个相似准则数中，Eu 通常不是独立的，它是其它相似准则数的函数
$$Eu=f(Re,St,Fr)$$

从上述可见，当同时满足两个相似准则设计试验时，模型中流体介质的选择要受模型尺寸选择的限制。当选用更多的相似准则时，将因为流体的物理量间互相制约而难以进行模型设计。因此，通常都选用决定性相似准则进行近似的模型设计和试验。

在恒定有压流动情况下，不可压缩粘性流体通常还具有“自模性”和“稳定性”两种特性，在这两个特性下的模化条件还可进一步简化。

(1) 自模性(或自模化)

对于有压流动，起决定性作用的是 Re 准则，而 Fr 准则通常可以忽略。流动有层流状态、过渡状态和紊流状态三种，它由临界雷诺数 Re_c 决定。当试验的 Re 在小于 Re_c（称为第一临界值）范围内时，流动处于层流状态，这时模型与实物管路中的断面上的流速分布彼此相似，不再与 Re 有关，我们称这种现象为"自模性"。当 $Re > Re_c$ 时，流动转变为紊流状态。在最初，随 Re 增加，流动的紊乱程度和断面上的流速分布变化较大，随 Re 继续增大，这种变化逐渐减小；当 Re 大于某一值（第二临界值）时，紊乱程度和流速分布已不再随 Re 的增加而变化。在以后的 Re 范围内，管道中的流速分布彼此相似，且不再与 Re 有关，这时流动又处于自模化状态。一般将 Re 小于第一临界值的范围叫第一模化区，而将 Re 大于第二临界值的范围叫第二模化区。当实物原型与模型都处于同一种自模化区内时，模型试验的 Re 可不必与原型中的 Re 相等。显然，这对模型设计和试验带来很大方便。实践证明，设备的通道形状愈复杂，通道内被其它物体填充的程度越大，就愈早进入第二自模化区。实际上第二自模化区就是阻力平方区，沿程损失因数已不再随 Re 变化，Eu 也不再变化，因此，试验中若发现 Eu 不再随 Re 变化时，就说明流动已进入第二自模化区。

（2）稳定性

粘性流体在管道中流动时，不管入口处速度分布如何，必须经一定的入口段长度后，流速分布才固定下来，粘性流体流动的这种特性称为稳定性。由于稳定性的存在，模化时，只要在模型入口前有一段几何相似的稳定段，就能保证进口速度分布的相似。同样，出口速度分布的相似，也只要保证出口通道几何相似就可以了。

§8-4 量纲分析方法

流动的各种物理现象常受到各种因素的影响，对于简单的现象可以通过简化，建立运动微分方程，求得精确解。而对大量复杂的流动现象，理论分析本身就比较困难，由于流动边界条件的复杂性，往往难以用数学形式准确表达和求解，因此，必须结合试验，才能使理论分析深入进行。但是如果没有正确的理论指导，不知需要测定哪些物理量和应该如何整理试验数据，那么，虽然能获取大量数据，却无法找出影响现象本质的因素，使试验带有盲目性。通过量纲分析，能将影响物理现象的各种变量合理组合，将有量纲的量变成无量纲积，由于无量纲积的数量少于原来有量纲变量的数量，可以使问题简化。

自然界的物理力学现象所建立的方程，不管采用那一种单位制，都必须满

足方程两边量纲的齐次性。通过量纲分析，能将无量纲积进行组合，求得一个含有待定系数的通式，待定系数的函数关系指示了试验的方向，从复杂的试验数据分析得出普遍规律，通过试验来确定待定系数。

任何物理量都是有单位的，但是量纲与单位不同。例如长度的单位可以是m，cm或mm，但它的量纲都是L；时间的单位可以是mix或s，但它的量纲都是T；速度的单位可以是m/min，或cm/s，但它的量纲都是LT^{-1}，即所有这些不同的单位，都可以由某些不能用其它量纲导出的基本量纲组成。在不同的单位制中，有不同的基本量纲。国际单位制中的基本量纲中：长度为L，时间为T，质量为M，温度为Θ。任一物理量Q的量纲表示为$\dim Q$。

利用量纲分析确定物理力学过程的函数关系时，可按下面的步骤进行。

（1）列出所有与该物理现象有关的变量。它取决于我们对现象过程的了解、观察和分析，和对现象物理本质的了解程度。对现象有重要影响的变量不可丢掉，但可以略去一些次要变量。

（2）将这些变量的量纲用基本量纲L，T，M表示出来；

（3）将变量组成某种由基本量纲表示的量纲一致的函数关系(通常为各变量指数乘积关系)；

（4）将各量的量纲代入上面的指数乘积关系；

（5）利用关系式量纲的齐次性，对各基本量纲的指数列出代数方程，联立求解方程，将解得的指数代人函数中，得到函数的具体形式；

（6）试验确定所引入的无量纲常数。

下面介绍量纲分析方法中广泛应用的**π定理**(E.Buckingham定理)。

设有一个未知函数关系

$$N=f(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k) \tag{8-19}$$

在N和$(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_k)$共$k+1$个物理量中，可能有常数，有变数，有些量可以有量纲，另一些可能无量纲。但是，这样的函数关系式与所选用的单位制无关，不同单位制只是数值不同，函数关系式不变。

为此，在所有这些变量中，首先确定出三个物理量n_1，n_2，n_3为基本变量，作为基本量纲的代表，因此要求其在量纲上是独立的，其余$(k+1-3)$个物理量的量纲都可以表示为这三个基本物理量量纲的指数形式。

根据物理方程两边量纲的齐次性，可以确定指数x，y，z和x_i，y_i，z_i。这样，就可以将原来函数关系式中$(k+1-3)$个物理量变为无量纲的量，这些无量纲量与原来的变量之间相差无量纲数π和π_i，即

$$N=\pi n_1^x n_2^y n_3^z \tag{8-20}$$

$$n_i=\pi_i n_1^{x_i} n_2^{y_i} n_3^{z_i} \tag{8-21}$$

或
$$\pi = \frac{N}{n_1^x n_2^y n_3^z} \tag{8-22}$$
$$\pi_i = \frac{n_i}{n_1^{x_i} n_2^{y_i} n_3^{z_i}} \tag{8-23}$$

π 及 π_i 是 N 和 n_i 以 n_1，n_2，n_3 为基本量纲下的数值，于是，在新的基本量纲下，原来的函数关系式变为

$$\frac{N}{n_1^x n_2^y n_3^z} = f\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{n_4}{n_1^{x_4} n_2^{y_4} n_3^{z_4}} \cdots \frac{n_k}{n_1^{x_k} n_2^{y_k} n_3^{z_k}}\right)$$

即
$$\pi = f(1,1,1,\pi_4 \cdots \pi_k) \tag{8-24}$$

π 和 π_i 为无量纲数，因此式右边也必定为无量纲数，故式中右边的指数可以由分子与分母的量纲相等原则确定。

这就是 π 定理。经过上述变换，将原来 $k+1$ 个带有量纲的物理量 N 和 n_i 间的函数关系式，变成 $(k+1-3)$ 个无量纲数 π 和 π_i 之间的关系式。

利用 π 定理，能够指导人们从大量的试验数据中分析得出普遍规律的途径，指出试验的正确方向，从而有目的地指导试验工作的进行。一定要在大量试验的基础上，了解影响某物理量的主次因素，否则将不可能利用量纲分析得出正确的结果。

对于一些较复杂的流动现象，当只靠数学分析无法求解，或者暂时还难以找到确切的方程加以描述时，π 定理提供了利用量纲分析结合试验研究的解决方法，π 定理和前面得到的相似准则数是模型试验研究的理论基础。

现举例说明 π 定理的应用。

有一直径为 d 的圆球，在粘性系数为 μ，密度为 ρ 的液体中以等速度 v 下降，试求圆球受到的阻力 F_f。

显然，阻力 F_f 与 d，μ，ρ，v 等因素间的函数关系，可以写为

$$F_f = f(v,\rho,\mu,d)$$

首先应该将上面的函数关系写成无量纲关系式。

讨论的问题中独立变量有 v，ρ，μ 和 d 共四个，即 $k=4$。选用 M，L，T 为基本量纲。

所有各个变量的量纲都可以用基本量纲加以表示：

$$\dim F_f = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}^2},\ \dim v = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}},\ \dim d = \mathrm{L},\ \dim \rho = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3},\ \dim \mu = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}}。$$

并且选择 ρ，v，d 为三个基本变量，则其余 $(k+1-3)=2$ 个变量 F_f 和 μ 的量纲可以表示为三个基本物理量量纲的指数形式，即

$$F_f = \pi \rho^x v^y d^z$$
$$\mu = \pi_1 \rho^{x_1} v^{y_1} d^{z_1}$$

由此可以列出两个无量纲数 π 和 π_1，把各个量的量纲代入，得无量纲数 π 为

$$\pi=\frac{F_f}{\rho^x v^y d^z}$$

故 $$\dim \pi=\frac{ML}{T^2}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{-x}\left(\frac{L}{T}\right)^{-y}(L)^{-z}=M^0L^0T^0$$

由等式两边量纲相等的原则，可列出指数的方程为

$$M:\ -x+1=0$$

$$T:\ y-2=0$$

$$L:\ 3x-y-z+1=0$$

解上面三个代数方程组得：$x=1$，$y=2$，$z=2$。于是得到

$$\pi=\frac{F_f}{\rho v^2 d^2}$$

同样对于 π_1 有

$$\pi_1=\frac{\mu}{\rho^{x_1} v^{y_1} d^{z_1}}$$

故 $$\dim \pi_1=\frac{M}{LT}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{-x_1}\left(\frac{L}{T}\right)^{-y_1}(L)^{-z_1}=M^0L^0T^0$$

可列出指数的方程为

$$M:\ -x_1+1=0$$

$$T:\ y_1-1=0$$

$$L:\ 3x_1-y_1-z_1=0$$

解上面代数方程组得：$x_1=1$，$y_1=1$，$z_1=1$

所以 $$\pi_1=\frac{\mu}{\rho v d}=\frac{\nu}{vd}=\frac{1}{Re}$$

于是，原来的函数关系式变为

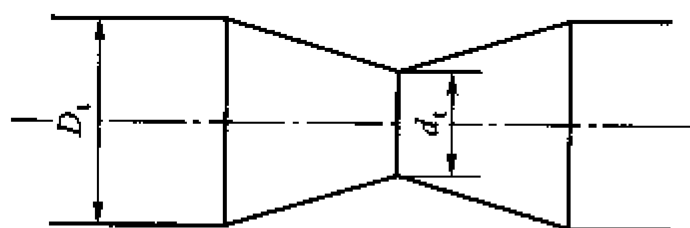
$$\frac{F_f}{\rho v^2 d^2}=f\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{Re}\right)=f\left(\frac{1}{Re}\right)$$

这样，就能够按上面的关系式进行试验。显然，经过应用量纲分析的 π 定理得到的关系式，简化并指明了试验的方向。本来为了确定所要求的阻力 F_f 与四个变量 ρ，v，μ，d 的关系，必须分别在四个变量中逐次将三个量在不变的情况下，用改变另一个量的不同值进行试验测定，如先将 ρ，μ，d 为一定值，变化不同的 v 进行一组试验测定，然后将 ρ，μ，v 为一定值，变化不同的 d 进行试验测定，这样，若对每个变量给出 10 个值进行试验，总共就需要作 10^4 次的试验测定，工作量十分浩大。但是，当采用量纲分析的 π 定理后，原来五个量之间的关系就简化为上面的无量纲关系式，试验中只要改变 10 个 Re 值

测定对应的$\frac{F_f}{\rho v^2 d^2}$值就可以了。实际上要使 Re 变化，只需要 ρ，μ，d 保持不变的情况下，改变圆球下降速度 v 就可以完成试验测定，从而大大简化了试验方法，缩短了试验时间，量纲分析的方法显示了明显的优越性。

例　　题

例 8-1　欲用一文丘里流量计测量的空气($\nu = 1.57 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$)流量为 $q_{V_t} = 2.78\ \mathrm{m^3/s}$，该流量计的尺寸为 $D_t = 450\ \mathrm{mm}$，$d_t = 225\ \mathrm{mm}$，现设计模型文丘里流量计用 $t_m = 10$ ℃的水作试验，测得流量 $q_{V_m} = 0.102\,8\ \mathrm{m^3/s}$，这时水与空气的流动动力相似。试确定文丘里流量计模型的尺寸。



例 8-1 图

解　影响这一流动的主要作用力是粘性阻力，因此，为使所设计的模型和实物中的流动力学相似，决定性相似准数是雷诺数，即应有

$$Re = \frac{v_t d_t}{\nu_t} = \frac{v_m d_m}{\nu_m}$$

或

$$\frac{q_{V_t}}{\nu_t d_t} = \frac{q_{V_m}}{\nu_m d_m}$$

查表得 10 ℃水的运动粘度 $\nu_m = 1.31 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，所以模型尺寸为

$$d_m = d_t \frac{\nu_t}{\nu_m} \frac{q_{V_m}}{q_{V_t}} \approx 99.7\ \mathrm{mm}$$

相似的模型和实物对应线性尺寸成同一比例，即

$$C_l = \frac{D_t}{D_m} = \frac{d_t}{d_m}$$

故

$$D_m = \frac{D_t d_m}{d_t} \approx 199.4\ \mathrm{mm}$$

例 8-2　600 ℃的烟气以速度 $v_t = 8\ \mathrm{m/s}$ 在热风炉中流动，通过热风炉产生的压降为 120 Pa，现在建立模型用 10 ℃的水进行研究，模型与实物之比为 1:10，试问

(1) 为了保证流动相似，水在模型中的运动速度应为多少?

(2) 模型中压降为多少?

600 ℃烟气的密度 $\rho_t = 0.4\ \text{kg/m}^3$，运动粘性系数为 $\nu_t = 0.9\ \text{cm}^2/\text{s}$。

解 影响这一流动的主要作用力是粘滞阻力和压降，所以其决定性相似准数是雷诺数，欧拉数则应自动满足。

(1) 由两个流动雷诺数相等

得
$$Re = \frac{v_t d_t}{\nu_t} = \frac{v_m d_m}{\nu_m}$$

查表得到 10 ℃水的运动粘度 $\nu_m = 0.013\ 1\ \text{cm}^2/\text{s}$，从而得模型中水的流速为

$$v_m = v_t \frac{\nu_m}{\nu_t}\frac{d_t}{d_m} = 1.16\ \text{m/s}$$

(2) 两个流动中的压降必须满足欧拉数相等，即

$$Eu = \frac{\Delta p_t}{\rho_t v_t^2} = \frac{\Delta p_m}{\rho_m v_m^2}$$

$$\Delta p_m = \Delta p_t \frac{\rho_m}{\rho_t}\cdot\frac{v_m^2}{v_t^2} = 6\ 307.5\ \text{Pa}$$

习　题

8-1 速度 v，长度 l，重力加速度 g 的无量纲集合是：(a) $\frac{lv}{g}$；(b) $\frac{v}{gl}$；(c) $\frac{l}{gv}$；(d) $\frac{v^2}{gl}$。

8-2 速度 v，密度 ρ，压强 p 的无量纲集合是：(a) $\frac{\rho p}{v}$；(b) $\frac{\rho v}{p}$；(c) $\frac{pv^2}{\rho}$；(d) $\frac{p}{\rho v^2}$

8-3 速度 v，长度 l，时间 t 的无量纲集合是：(a) $\frac{v}{lt}$；(b) $\frac{t}{vl}$；(c) $\frac{l}{vt^2}$；(d) $\frac{l}{vt}$

8-4 压强差 Δp，密度 ρ，长度 l，流量 q 的无量纲集合是：(a) $\frac{\rho q}{\Delta p l^2}$；(b) $\frac{\rho l}{\Delta p q^2}$；(c) $\frac{\Delta p l q}{\rho}$；(d) $\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}\frac{q}{l^2}$

8-5 雷诺数的物理意义表示：(a) 粘滞力与重力之比；(b) 重力与惯性力之比；(c) 惯性力与粘滞力之比；(d) 压力与粘滞力之比。

8-6 试阐述几何相似、运动相似、动力相似的定义，并举例说明之。

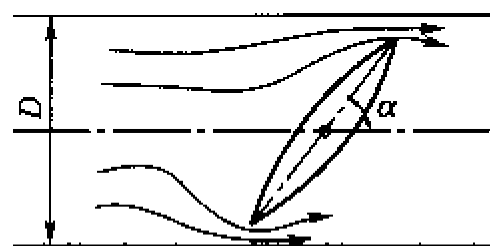
8-7 何为量纲分析法？它对于进行模型试验有何作用？

8-8 在研究流体力学的一般问题中，要考虑哪几个相似准数？为什么？并分别说明每个准数的物理意义。

8-9 一个圆球放在流速为 1.6 m/s 的水中，受的阻力为 4.4 N。另一个直径为其两倍的圆球置于一风洞中，求在动力相似条件下风速的大小及球所受的阻力。已知 $\nu_{ai}/\nu_w = 13$，$\rho_{ai} = 1.28\ \text{kg/m}^3$。

8－10　需测定飞行器上所用流线型杆子的阻力，杆子厚度为 30 mm，飞行器速度为 150 km/h。当用杆子模型在水槽中测定其粘性阻力时，已知水流流速为 2 m/s。问模型厚度应为若干？（$\nu_{ai}/\nu_w = 13$）。

8－11　为了得到水管中蝶阀的特性曲线，利用空气来进行模型试验。模型蝶阀直径 $D_m = 250$ mm，当 $\alpha = 30°$，空气（$\rho = 1.25\ kg/m^3$）流量 $q_{V_m} = 1.6\ m^3/s$ 时，试验测得如下数据：模型中压强降 $\Delta p_m = 275$ mm 水柱；气流作用在阀门上的力是 $P_m = 137$ N；绕阀门旋转轴气流的作用力矩是 $M_m = 2.94$ N·m。设试验在自模区进行，且实际蝶阀 $D_t = 2.5$ m，水流量 $q_{V_t} = 8\ m^3/s$，α 角相同。试确定实物中的压强降、作用力及作用力矩。



题 8－11 图

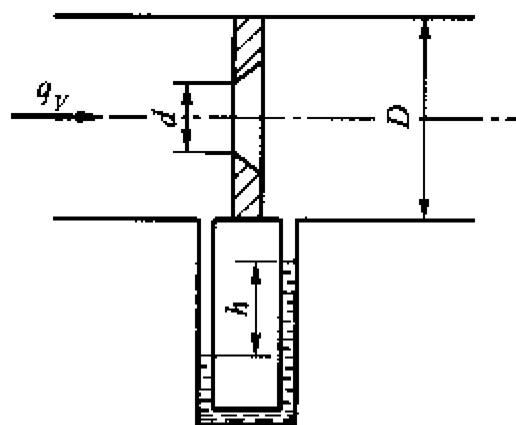
8－12　在深水中进行火箭的模拟试验，模型的大小与实物之比为 1/1.5，若火箭在空气中的速度为 500 km/h，问欲测定其粘性阻力，模型在水中的试验速度为若干（$\nu_{ai}/\nu_w = 13$）？

8－13　用水校验测量空气流量的孔板，孔板直径 $d = 100$ mm，管道直径 $D = 200$ mm，由试验得孔板流量系数固定不变时的最小流量为 $q_{V_{min}} = 1.6 \times 10^{-3}\ m^3/s$，水银压差计读数为 $h = 45$ mm。试确定：

(1) 当孔板用来测定空气流量时，最小流量是多少？

(2) 相应流量下水银压差计读数为多少？

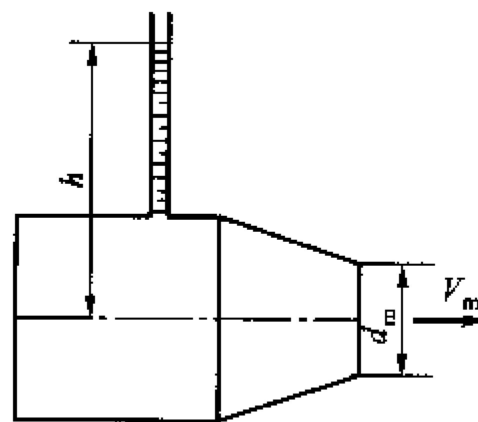
设水与空气都在 20 ℃，这时 $\nu_{ai} = 1.5 \times 10^{-5}\ m^2/s$，$\nu_w = 1.003 \times 10^{-6}\ m^2/s$，$\rho_{ai} = 1.2\ kg/m^3$，$\rho_w = 998.2\ kg/m^3$。$\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3\ kg/m^3$。



题 8－13 图

8－14　实船的速度为 37 km/h，欲在水池中测定它的兴波阻力，问船模在水池中的拖曳速度为多少？设船模尺寸是实船的 1/30。如测得船模阻力为 10 N，则实船阻力为多少？

8－15　用水试验如图所示的管嘴，模型管嘴直径 $d_m = 30$ mm，当 $h = 50$ m 时，得流量 $q_{V_m} = 18 \times 10^{-3}\ m^3/s$，出口射流的平均流速 $V_m = 30$ m/s，为保证管嘴流量 $q_V = 0.1\ m^3/s$ 及出口射流的平均流速 $V = 60$ m/s，问原型管嘴直径及水头 h 应为多少？已知试验在阻力平方区（自模化区）。



题 8－15 图

8－16　如果一个球通过流体时的运动阻力 F_R 是流体的密度 ρ，粘性 μ，球径 r 及速度 v 的函数。用量纲分析法证明阻力 F_R 可由下式给出

$$F_R = \frac{\mu^2}{\rho} f\left(\frac{\rho v r}{\mu}\right)$$

同时，已知在很低的速度下，阻力 F_R 与速度 v 成正比，即 $F_R=\kappa\mu rv$，这里 κ 是无量纲数。若有相对密度为2.5的细小微粒均匀地悬浮在深3.3 m静止的水中，把微粒当作直径为0.002 cm的球体，求需要多长时间水才能澄清？取 $\kappa=6\pi$，$\mu=0.001\,3$ kg/m·s。

8-17 假定气体中的声速 c 依赖于气体的密度 ρ、压强 p 和动力粘度 μ，试应用量纲分析法求出声速 c 的函数关系。

8-18 流体流动的压强损失 Δp 决定于流速 v，密度 ρ 和一些线性尺寸 s，s_1，s_2，重力 g，粘度 μ 和体积弹性模量 K。试求它的函数式。

8-19 有一直径为 d、密度为 ρ 的圆球在充满密度为 ρ_1，粘度为 μ_1 的无限空间中沉降。试用量纲分析法来确定其沉降速度 $v=f(d,g,\rho,\rho_1,\mu_1)$ 的关系式。

8-20 试用量纲分析法验证通过薄壁小孔的气体流量 q_m 等于

$$q_m=d^2\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}f\left(\frac{\mu}{d\sqrt{\Delta p\cdot\rho}}\right)$$

式中：d 为小孔直径，Δp 为小孔两端压差，ρ 为气体密度，μ 为气体的动力粘度。

第9章

流体运动阻力与损失

本章研究的中心问题是总流伯努利方程中**水头损失** h_w 项。将从流动的物理、力学本质说明 h_w 产生的原因，并研究不同流动状态下和不同阻力类型的水头损失计算方法。

如前所述，水头损失(或称能量损失)是由于流体的粘性引起的，它实质是流体流动过程中克服流体内部微元或液层间摩擦阻力所作的功。这部分能量不可逆地变为热，这种转变的结果使流体沿流程机械能不再守恒。由于能量损失研究的复杂性，除对于损失问题推导其普遍规律而外，历来的研究者进行了大量的实验研究，用实验结果补充、完善工程计算中所必须的计算公式，弥补理论研究的不足。在这一章中还将重点介绍某些基本的实验及其结果，作为工程计算的参考和依据。

§9-1　流动阻力的两种类型

在图9-1所示的实验装置中，当实际的粘性流体以一定速度自管中流出时，可绘出图示能头线。由图中可以看出，按能头线的变化规律，阻力可以分为两种类型。

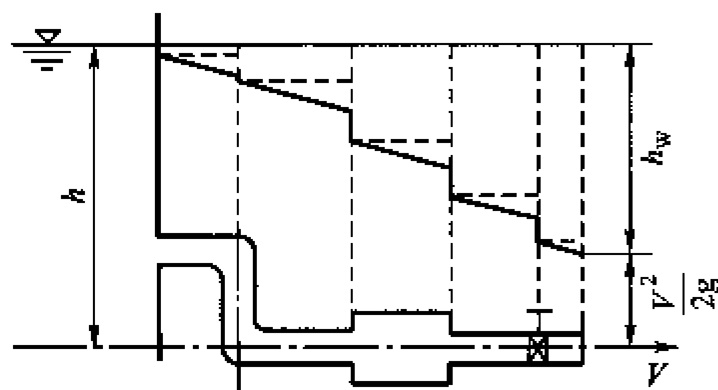


图　9-1

1. 沿程阻力

流体沿流动路程所受到的阻碍称为沿程阻力。沿程阻力的影响使图中能头线倾斜。

这种阻力来源于沿流程各流体微元或流体层之间以及流体与固体壁之间的摩擦力。对于不同的**流动状态**将有不同的分析和计算方法，以后我们将给予具体讨论。

由沿程阻力所引起的能量损失称为**沿程损失**。由图9-1可以看出，沿程损失沿流程均匀分布，其大小与流体的流程长度成正比。

单位重力流体的沿程损失，通常以 h_f 标记。

2. 局部阻力

局部阻力指流体流经各种局部障碍（如阀门、弯头、变断面管等）时，由于水流变形、方向变化、速度重新分布，质点间进行剧烈动量交换而产生的阻力。由图9-1可以看出，当流体流经管断面突然扩大、突然缩小、阀门、弯管等处时，由于受到局部阻力的影响，能头线在这些局部地区发生突然变化。

由局部阻力所引起的能量损失称为局部损失。单位重力流体的局部损失以符号 h_ζ 来标记。

显然，局部损失是由于各种阻碍破坏了流体的正常流动所引起的，其大小必然取决于各种阻碍的类型，特点是集中在一段较短的流程上。在通常的计算中，为简化起见，看作集中在流程的一点上。

3. 总能量损失

流体在实际装置中流动时，不可避免地将出现沿程和局部两种类型的能量损失。在实际流体总流伯努利方程中，h_W 项应包括单位重力流体在所取两断面间的所有能量损失。即

$$h_W = \sum h_f + \sum h_\zeta \tag{9-1}$$

由此可见，掌握沿程损失和局部损失的规律和计算方法，对于研究流体力学问题，尤其对于工程问题的计算是十分必要的。

§9-2 粘性流体的两种运动状态

在不同的边界条件下，粘性流体质点的运动会出现两种不同的运动状态，一种是所有流体质点作定向有规则的运动；另一种是作无规则、不定向的混杂

运动。可想而知，在同样条件下，这两种运动状态所受到的阻力是不会相同的。因此，在讨论能量损失的计算之前，必须对流动状态进行研究并加以区别。

1. 雷诺实验

1883年英国物理学家雷诺用实验证明了两种流态的存在，确定了流态的判别方法及其与能量损失的关系。

图9-2所示为雷诺实验装置。在尺寸足够大的水箱1中装有保证水位恒定的溢流板7，实验用玻璃管2与水箱连接。为避免进口扰动，将玻璃管插入水箱并将入口管端做成圆滑喇叭口形状，玻璃管另一端装有阀门3，用以调节管中水的流速，流出的流量由量桶4来测定。水箱上方装有颜色水瓶5，其中装有与水重度相近的有色液体，引出的细管对准玻璃管中心，颜色水流量由小阀门6控制。

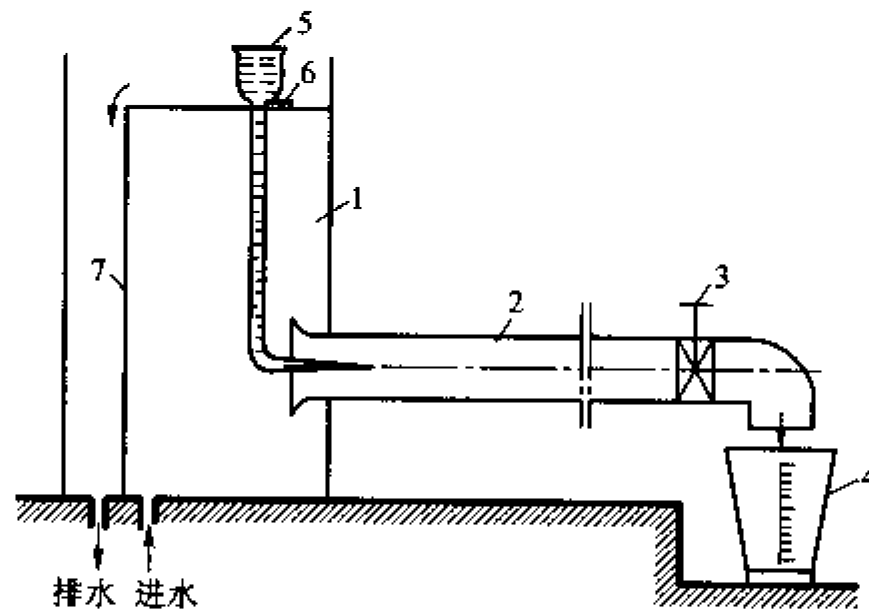


图 9-2

实验分为以下四个过程：

(1) 阀门3微开，水以低速流过玻璃管2，打开阀门6，有色液体流入玻璃管，观察到的颜色水线为稳定的细直线，如图9-3a所示。这种现象表明，颜色水不与周围的水相混杂，做沿轴线的直线流动。它说明管中的流体质点无横向运动，只是沿着管轴线在各自的流层中作各层间无相互混杂的直线流动，这种运动状态称为层流。

(2) 缓慢开大阀门3，增加管内的水流速度，可以看到，在一定的范围内仍保持层流运动状态。当速度增加到某一数值时，颜色水线出现波纹，而且局部地方出现中断现象，如图9-3b所示。可以看出，这时管中水的质点出现了横向运动，管内水层之间出现了不稳定的振荡现象。

（3）继续开大阀门3增加流速；或者同时用某种干扰来振动玻璃管，颜色水线迅速加大波动和断裂，随后颜色水完全掺混到水流中去，如图9－3c所示。这说明管内流体质点完全处于无规则紊流状态，这种流动称为“紊流”或“湍流”。阀门3继续开大，管中水流将一直处于这种状态。

（4）逐渐关闭阀门3时，管中流体又从紊流状态逐渐转变为层流状态。

雷诺实验说明，当流速不同时，流体质点会出现两种不同的运动状态。当流速小于某一值时，流体质点作定向而不相互混杂的层状流动，即层流运动。而当流速大于某一数值时，流体质点在向前运动的同时，出现了无规则的横向脉动运动，即紊流运动，介于两者之间的较小范围叫做过渡状态。

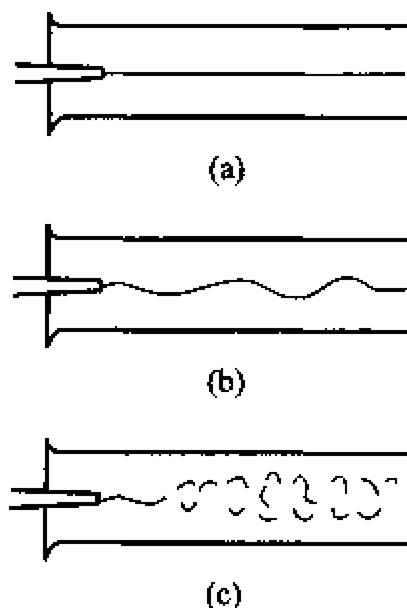


图 9－3

2. 流态的判别

上述实验说明，当流速增大时，流动状态由层流转变为紊流是在某一定流速时发生的，这个流速我们称为上临界速度，以符号 V'_{cr} 标记。而当流速减小到某一流速时，流动状态又由紊流转变为层流，这个速度称为下临界速度，记为 V_{cr}，由实验测得 $V'_{cr} > V_{cr}$。

由此可知，流动状态可以按管中速度值分为以下三种情况：

（1）当 $V > V'_{cr}$ 时，管中流动为紊流状态；

（2）当 $V < V_{cr}$ 时，管中流动为层流状态；

（3）当 $V_{cr} < V < V'_{cr}$ 时，管中液流既可能是紊流状态也可能是层流状态，在这个范围内流动处于不稳定的过渡状态。

对临界速度的大量实验研究总结出这样的规律：临界速度的大小取决于过流断面的几何尺寸（对于圆管为直径 d）和所研究流体的粘度 ν。其规律为：ν 增加，V_{cr} 增加，ν 减小，V_{cr} 减小；d 增加，V_{cr} 减小，d 减小，V_{cr} 增加。

这个结论可以从直观的物理概念来理解。流体的粘性越大，流体质点彼此牵制和约束的力越大，流动过程的摩擦阻力也越大，流体质点紊动更加困难。因此，自层流变化为紊流所需的临界速度必然增大，反之亦然。另外，管壁是限制流动的外边界，在同样流速下，过流断面越大，即管径越大，速度梯度越小，因此对流体的粘性作用越小，流体质点运动容易紊乱，使临界速度减小，而管径越小，对流体的粘性作用就越大，临界速度必然增高。

根据上述和量纲分析，人们发现，临界速度是 d，μ，ρ 的函数，即

$$V_{cr} = f(d, \mu, \rho)$$

根据物理方程两边量纲的齐次性条件，总有

$$V_{cr} = Re_{cr}\frac{\mu}{\rho d}$$

所以

$$Re_{cr} = \frac{V_{cr}d}{\nu}$$

Re 为一无单位因数，由雷诺首先得到，称为雷诺数。

对应于上、下临界速度有

$$Re'_{cr} = \frac{V'_{cr}d}{\nu} \qquad \text{上临界雷诺数}$$

$$Re_{cr} = \frac{V_{cr}d}{\nu} \qquad \text{下临界雷诺数}$$

对于任一平均速度有

$$Re = \frac{Vd}{\nu}$$

这样，对用平均速度 V 与临界速度 V'_{cr} 和 V_{cr} 相比较来判断流态，转为以相应的雷诺数 Re'_{cr} 和 Re_{cr} 与 Re 的比较决定流动状态。即

$Re < Re_{cr}$　流动为层流；

$Re_{cr} < Re < Re'_{cr}$　流动为不稳定的过渡状态；

$Re > Re'_{cr}$　流动为紊流状态。

由此可见，雷诺数的引入，使我们对流态的判别大大简化。大量的实验和理论分析得出这样的结论，对于过流断面几何相似的流动，不论选用何种液体，也不论过流断面的几何尺寸大小如何变化，其临界雷诺数 Re'_{cr} 和 Re_{cr} 始终保持为一个常数，实质上，这就是上一章对力学相似流动导出的相似准数。因此，对于几何相似的液流，可以用对各种尺寸的过流断面和各种不同流体计算对应于不同速度下的雷诺数，与临界雷诺数相比较，由此判定其流动状态。

对圆管所进行的大量实验得出经验数值为

$$Re_{cr} = \frac{V_{cr}d}{\nu} = 2\,320$$

$$Re'_{cr} = \frac{V'_{cr}d}{\nu} = 13\,800$$

由于过渡区流动的复杂性，人们在进行损失计算时，通常按紊流来处理。

因为上临界雷诺数值很不稳定，因此按不同的实验条件得出的数值差异很大。例如对管壁十分光滑，且消除外界扰动的条件下，实验得到 $Re'_{cr} = 5 \times 10^4$，因而上临界雷诺数在工程计算中意义不大。一般为使计算结果安全起见，在工程实际中我们以下临界雷诺数作为层流和紊流的流态判别准则。即

$$Re < Re_{cr} \quad 按层流计算$$

$$Re > Re_{cr} \quad 按紊流计算$$

上述研究我们采用圆管作为对象，以直径 d 来表示其断面的大小，但所得的结论，对于任意形状过流断面均适用。其雷诺数计算仍采用类似公式

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

其中，L 为过流断面的某一线性尺寸。当然，在流态判别中，对于待判别的流动，必须选用适当的线性尺寸来计算雷诺数。对于矩形、长方形等断面，常以当量直径 d_e 进行计算。

3. 损失与平均流速的关系

在雷诺实验装置的玻璃管上，距离为 l 处开两个测压小孔，安装两根测压管，对两个测压管所在断面列能量方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_f$$

由于管路水平放置，故 $z_1 = z_2$；试验管为等径直管，故

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$$

因此

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

即，测压管测得之压差为 l 长管段内的水头损失。不断改变管中的流速可得到一系列相应的水头损失。整理实验结果，得到如图 9-4 所示的关系曲线。

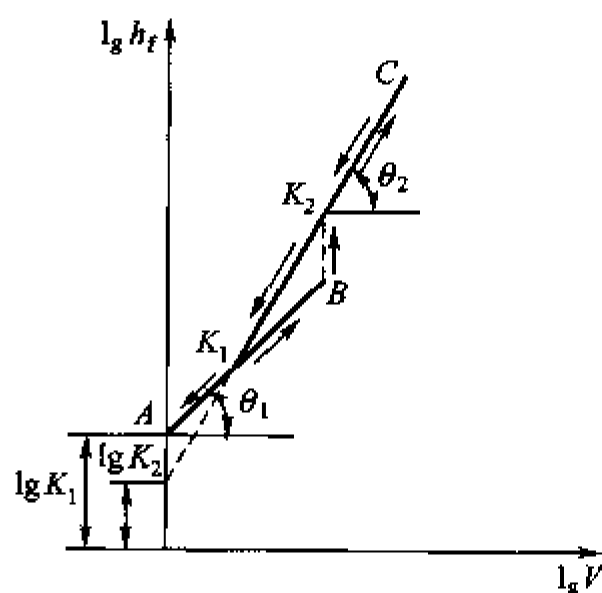


图 9-4

由实验曲线可以看出，当管中流速逐渐增大时，水头损失增加。其变化规律为：层流时为与横轴成 θ_1 角的一条直线；紊流时为与横轴成 θ_2 角的另一直线(实验曲线采用对数坐标)。当流速增加时，流态由层流变为紊流，实验点按 ABK_2C 变化。当流速减小，流态由紊流转变为层流时，实验点按 CK_2K_1A 变化。在 K_1K_2 范围内为过渡区域。

由实验曲线测得

对于层流区
$$\lg h_f = \lg K_1 + \tan\theta_1 \lg V$$

即 $$h_f = K_1 V^{\tan \theta_1}$$
其中 θ_1 实测为 45°，因此

$$h_f = K_1 V$$

该式说明，当流动处于层流状态时，沿程水头损失与平均速度的一次方成正比。

对于紊流区 $$\lg h_f = \lg K_2 + \tan \theta_2 \lg V$$

即 $$h_f = K_2 V^{\tan \theta_2}$$

θ_2 实测为 60°12′～63°26′，因此

$$\tan \theta_2 = 1.75 \sim 2$$

$$h_f = K_2 V^{1.75 \sim 2} \tag{9-2}$$

可以看出，当流动处于紊流状态时，沿程水头损失与平均速度的 1.75～2 次方成正比。

从以上分析可以看出，流动状态不同，流动的损失与速度之间的关系有很大差别。因此，在计算任何一个具体的液流损失时，必须首先判别其流态，然后由所确定的流态按不同的规律进行计算。

上面的实验结果指出，在流动阻力和损失的计算中，必须按层流和紊流分别加以研究，找出各自不同的速度分布规律和损失计算方法。

§ 9－3 圆管中的层流运动

层流运动是流体质点的一种简单的运动形式，作层流运动的流体内部摩擦切应力严格遵从牛顿内摩擦定律。所以，层流运动中速度分布、流量、损失等参数都可以从理论上用严密的数学方法推得，结果为准确的数学表达式。而层流运动的研究又为紊流规律的探讨提供了方向。

图9－5 为水平放置的等径圆管，某种不可压缩流体在管内作恒定的层流流动。取直角坐标系如图所示，y 轴与管轴重合。列出沿 y 轴方向的 N－S 方程

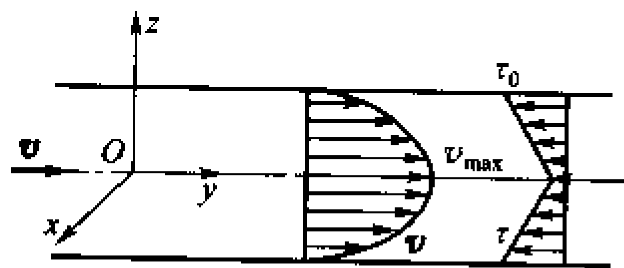


图 9－5

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$
$$= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z$$

因为流体质点作只有轴向流动而无横向流动的层流运动，所以由所选取的坐标系知

$$v_x = v_z = 0 \quad v_y = v$$

因质量力只有重力，而且对于有压管路重力可以忽略，所以

$$f_x = 0 \qquad f_y = 0 \qquad f_z = 0$$

所研究的流动为恒定流动，因此

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

对于不可压缩流体，其连续性微分方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

可以得出

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

将上述条件代入 N－S 方程可得

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

由第二、第三方程可见，压力与 x，z 坐标无关，因此

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

由于忽略了重力的影响，流体在等径管中作轴对称流动，因此速度仅是半径 r 的函数，而且沿 y 轴方向不变。所以，选用柱坐标 r，θ，y，将更便于方程的积分，在柱坐标系中

$$x^2 + z^2 = r^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad z = r\sin\theta$$

对前二式分别求导得

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(r\cos\theta)=\cos\theta\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-r\sin\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$=\cos^2\theta-r\sin\theta\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=1$$

得

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

又

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}=-\frac{\sin\theta}{r}\frac{1}{\cos\theta}$$

所以

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$=\left[\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}(-\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}(-\sin\theta)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\frac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\sin^2\theta\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}$$

因此

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

代入简化的 N-S 方程第一式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}$$

由于 v 仅是 r 的函数，而 p 仅是 y 的函数，因此可将方程写为

$$\frac{d^2 v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy}$$

若设管长 l 上的压降为 Δp，则

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{\Delta p}{l}$$

式中"-"号表明压强增量 dp 沿管中流动方向为负值。代入方程得

$$\frac{d^2 v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}=-\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

积分可得
$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p r^2}{l\ 2} + C_1$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{l}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

积分得
$$v = -\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2 + C_1\ln r + C_2$$

由管轴 $r=0$ 处，流速 v 为有限值，可得 $C_1=0$

管壁 $r=r_0$ 处，$v=0$，得 $C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu l}r_0$

最后得
$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2 - r^2) \tag{9-3}$$

式(9-3)即为流体沿等径圆管作恒定层流运动时的速度分布规律。可以看出，各点速度与所在半径 r 成抛物线关系(如图 9-5 所示)，称为**抛物线速度分布规律**。

显然，最大流速在管轴线上，即 $r=0$ 时，有
$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu l}r_0^2 \tag{9-4}$$

为计算流量，在图 9-6 所示过流断面上半径 r 处取宽度为 $\mathrm{d}r$ 的微元环形面积。通过该面积的流量为
$$\mathrm{d}q_V = v\mathrm{d}A = 2\pi r v\mathrm{d}r$$

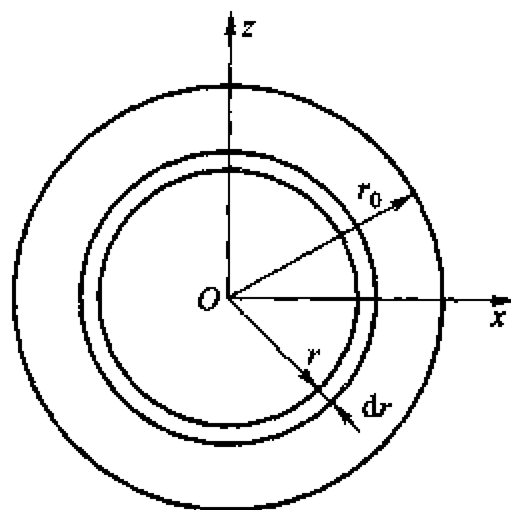


图 9-6

由此可得通过整个过流断面流量
$$q_V = \int \mathrm{d}q_V = \int_0^{r_0} 2\pi r v\,\mathrm{d}r$$
$$= \int_0^{r_0}\left[2\pi r\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2 - r^2)\right]\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi\Delta p}{2\mu l}\int_0^{r_0}[(r_0^2 - r^2)r]\mathrm{d}r$$

积分得
$$q_V = \frac{\pi\Delta p}{8\mu l}r^4 \tag{9-5}$$

或
$$q_V = \frac{\pi d^4}{128\mu l}\Delta p \tag{9-6}$$

该式为圆管层流时广泛采用的流量计算公式，通常称为**哈根-泊肃叶(Hagen-Poiseuille)公式**。此式说明，作层流运动时，圆管中的流量与管径的四次方成正比。可见管径对流量的影响很大，人们常把直径很小的短管作为节流措施其道理就在于此。

由式(9-5)及断面平均流速定义可求得流体作恒定层流时的平均流速为

$$V=\frac{q_V}{A}=\frac{q_V}{\pi r_0^2}=\frac{\pi r_0^4}{8\mu l}\frac{\Delta p}{\pi r_0^2}$$

即

$$V=\frac{r_0^2}{8\mu l}\Delta p \tag{9-7}$$

比较式(9-7)和(9-4)可得

$$V=\frac{1}{2}v_{\max} \tag{9-8}$$

即，断面平均流速为管轴上最大流速的一半。

由式(9-3)和(9-7)可计算在圆管层流时动量修正因数和动能修正因数为

$$\alpha_0=\frac{\int_A v^2 \mathrm{d}A}{V^2 A}=\frac{\int_0^{r_0}\left[\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)\right]^2 2\pi r \mathrm{d}r}{\left[\frac{\Delta p}{8\mu l}r_0^2\right]^2\pi r_0^2}$$

$$=\frac{4}{3}\approx 1.33$$

$$\alpha=\frac{\int_A v^3 \mathrm{d}A}{V^3 A}=\frac{\int_0^{r_0}\left[\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)\right]^3 2\pi r \mathrm{d}r}{\left[\frac{\Delta p}{8\mu l}r_2^2\right]^3\pi r_0^2}\approx 2$$

由牛顿内摩擦定律可得流体中的应力分布规律为

$$\tau=-\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)\right]$$

$$=\frac{\Delta p}{2l}r$$

式中“-”号是因为 $\mathrm{d}r$ 为正时，$\mathrm{d}v$ 为负值，为使 τ 为正值而引入的。

在管壁 $r=r_0$ 处切应力有最大值 τ_0

$$\tau_0=\frac{\Delta p}{2l}r_0$$

二式相比得

$$\frac{\tau}{\tau_0}=\frac{r}{r_0}$$

或

$$\tau=\frac{r}{r_0}\tau_0 \tag{9-9}$$

式(9-9)表明，流体中切应力沿半径方向成线性规律分布(如图9-5所示)。

下面计算流体的沿程能量损失。由式(9-7)得

$$\Delta p=\frac{8\mu l}{r_0^2}V$$

对水平放置圆管中的均匀层流运动，可以很容易得到其水头损失为

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{8\mu l V}{\rho g r_0^2} = \frac{32\mu l V}{\rho g d^2} \tag{9-10}$$

将式(9－10)作以下变换

$$h_f = \frac{64\mu}{\rho V d}\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

令

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

则

$$h_f = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} \tag{9-11}$$

式(9－11)即为能量损失计算公式，称为达西(Darcy)公式。λ 为**沿程损失因数**，大小取决于雷诺数 Re。可以看出，因数 λ 的确定是沿程损失计算的关键。

由式(9－10)可以看出，在层流运动中，损失与速度的一次方成比例，此结论与雷诺实验的结果相一致。

当损失用压差表示时，可以写为

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d}\frac{\rho V^2}{2} = \lambda_p \frac{\rho V^2}{2}$$

式中 $\lambda_p = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}$ 称为压力损失因数。

最后必须说明，我们这里讨论的只是充分发展了的层流运动，对于考虑管入口影响的未充分发展的层流运动，以后予以讨论。

§9－4　间隙中的层流运动

本节讨论液体在微小缝隙中的流动，研究液体在间隙中流动时流速的分布、流量计算和损失计算等。

间隙流动的主要特征为：流动状态为层流，对于较短的间隙进口起始段效应影响较大，在实际工程计算中必须加以修正。

在间隙流动的研究中，我们假设：

(1) 研究对象为不可压缩流体，即 $\rho = \text{const}$；

(2) 一般情况下，流体质点的运动惯性力和质量力均忽略不计；

(3) 流体的粘度认为是不变的(当然，因间隙中压强和温度的变化较大，实际上流体的粘度是有一定变化的，这种变化对计算结果的影响可在专门的讨论中查阅)；

(4) 因间隙高度很小，可以近似地看作一维流动，即流体质点沿壁面作平行流动，沿高度方向速度分量为零。

下面重点讨论平板间隙流动和圆柱环形间隙流动。

1. 平行平板间隙流动

平行平板间隙流动是实际工程中经常遇到的问题，如齿轮泵齿顶与泵壳间的流动，静压导轨缝隙中的流动等。

现在研究图 9－7 所示两壁面间的液体流动，假设流动为充分发展了的层流运动，认为板宽 b 和长度 L 远大于高度 h，所以可将流动看作为一维平面流动。选取直角坐标系如图所示。

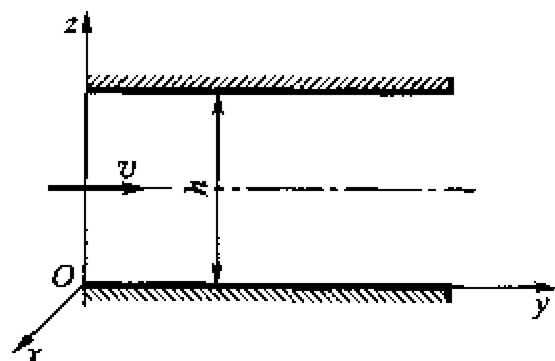


图 9－7

按流动特点简化 N－S 方程：

对均速流动，质量力只有重力，所以

$$f_x = 0;\ f_y = 0;\ f_z = -g$$

对于恒定流动

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

由平行于 y 轴的平行流动得知

$$v_z = v_x = 0; \qquad v_y = v$$

于是由不可压缩流体连续性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

得

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0$$

说明沿 y 轴 $v_y = v$ 为定值。

按板宽 b 远大于 h 的假设，有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

由上述分析可知，v 仅为 z 的函数。将上述分析代入 N－S 方程可得

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
-g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\}$$

对于微小间隙均匀层流运动，质量力 g 可以忽略，故压强 p 仅为 y 的函数，

即

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

由前面分析有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}$$

则第一方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

将该式积分两次，并注意到对于均匀层流其压强降$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$为常数，可得

$$v=\frac{1}{2\mu}z^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+Az+B \tag{9-12}$$

该式为平行平板间隙流动中速度分布的通用表达式，其中积分常数 A，B 须按具体流动的边界条件确定。

下面分三种情况讨论：

(1) 固定平板间隙流动

这种情况下，上下平板均固定不动，流体在缝隙两端压差作用下运动，故又称为**压差流动**。

由边界条件

$$z=0 \qquad v=0$$

$$z=h \qquad v=0$$

得积分常数

$$B=0,\ A=-\frac{h}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

代入式(9-12)得

$$v=\frac{1}{2\mu}z\,(z-h)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \tag{9-13}$$

因此流量

$$q_V=\int_0^h vb\,\mathrm{d}z=\int_0^h\frac{b}{2\mu}z\,(z-h)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}z$$

$$q_V=-\frac{bh^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \tag{9-14}$$

对于均匀层流

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p_2-p_1}{L}=-\frac{\Delta p}{L}$$

式中 p_2，p_1 为缝隙出、入口的压强。

代入式(9-13)和(9-14)得

$$v=\frac{\Delta p}{2\mu L}z\,(h-z) \tag{9-15}$$

$$q_V = \frac{bh^3}{12\mu L}\Delta p \tag{9-16}$$

由式(9-15)可以看出，在压差间隙流动中，速度分布呈**抛物线规律**(见图9-8)。最大速度位于间隙中间，即 $z=\frac{h}{2}$处，此时

$$v_{\max} = \frac{h^2}{8\mu L}\Delta p$$

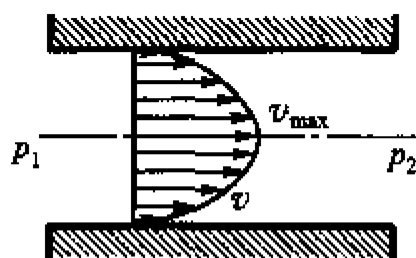


图 9-8

当应用式(9-16)于短通道的进口起始段时，其值须加以修正，即

$$q_V = \frac{1}{C_e}\frac{bh^3}{12\mu L}\Delta p$$

其中，C_e 为修正因数。

(2) 剪切流动

当图9-7中缝隙两端压强相等，而下板(或上板)以速度 V_0 向右(或向左)运动时，缝隙中的液体仍将作平行流动，称为剪切流动。
此时边界条件为

$$z=0\ 时，\ v=V_0$$
$$z=h\ 时，\ v=0$$

由式(9-12)定出积分常数为

$$A=-\frac{V_0}{h} \qquad B=V_0$$

代入式(9-12)得

$$v=\left(1-\frac{z}{h}\right)V_0 \tag{9-17}$$

于是流量

$$q_V=\int_0^h vb\,\mathrm{d}z=\int_0^h\left(1-\frac{z}{h}\right)V_0 b\,\mathrm{d}z$$

得

$$q_V=\frac{bh}{2}V_0 \tag{9-18}$$

由式(9-17)可以看出，剪切流动中速度沿 z 方向呈线性分布(见图9-9)。

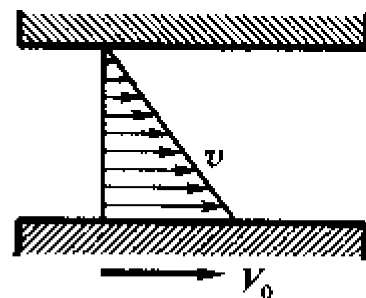


图 9-9

(3) 压差、剪切共同作用下的间隙流动

在图9-7中，若 $p_1\neq p_2$，而且其中一板固定，另一板以 V_0 运动，此时间隙中液体的流动是在剪切和压差共同作用下形成的。

不难想象，在这种运动中，流速分布与流量计算应为纯压差流动和纯剪切流动的叠加。其结果为

$$v=\frac{\Delta p}{2\mu L}z\,(h-z)\pm\left(1-\frac{z}{h}\right)V_0 \tag{9-19}$$

$$q_V = \frac{bh^3}{12\mu L}\Delta p \pm \frac{bh}{2}V_0 \qquad (9-20)$$

式中之正、负号依压差与板运动的相对方向而定。

2. 圆柱环形间隙流动

现在讨论在两个圆柱面所形成的缝隙中流体沿轴线方向的流动规律。按二圆柱面是否同心将其分为**同心圆柱环形间隙流动**和**偏心圆柱环形间隙流动**。

在实际工程中，这种流动形式非常普遍，如圆柱滑阀阀芯与阀孔间隙中的流动，各种活塞与缸体间的泄漏流动等。

(1) 同心圆柱环形间隙流动

图 9-10 所示为一同心圆柱环形间隙，其间隙高度 h 与直径 d 相比为一微小量，液体在间隙中沿轴向流动。这种情况可以简单地按板宽为 $b=\pi d$ 的平行平板间隙流动来处理，即将圆柱环形间隙展成为平行平板间隙。

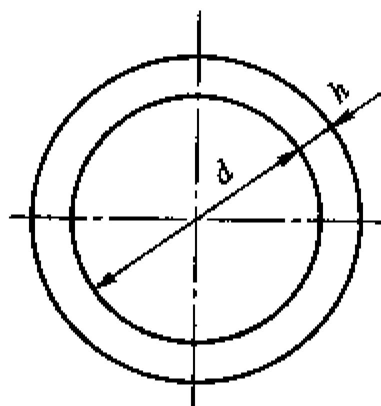


图 9-10

按式(9-20)可得同心圆柱环形间隙流动的流量公式为

$$q_V = \frac{\pi dh^3}{12\mu L}\Delta p \pm \frac{\pi dh}{2}V_0 \qquad (9-21)$$

其中，V_0 为内柱或外孔壁沿轴线移动的速度，正、负号的意义与平板间隙流动相同。

若 $V_0=0$，即内柱和外孔壁均固定不动，则为纯压差流动，其流量为

$$q_V = \frac{\pi dh^3}{12\mu L}\Delta p \qquad (9-22)$$

若间隙高度 h 与直径 d 相比不是一微小量，其流速分布和流量计算公式须另行推导，读者可查阅有关资料。

(2) 偏心圆柱环形间隙流动

在实际工作中，在各种力的影响下，圆柱环形间隙大都处于偏心工作状态，因此，必须考虑由于内柱与外孔的相对偏心所引起的流量变化。

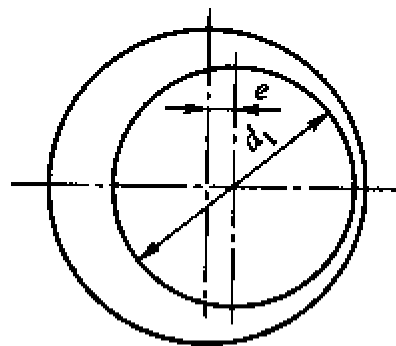


图 9-11

如图 9-11 所示，当偏心量为 e 时流量计算公式为(此处推导从略)

$$q_V = \frac{\Delta p h_0^3 \pi d_1}{12\mu L}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right) \pm \frac{V_0 h_0}{2}\pi d_1 \qquad (9-23)$$

式中 h_0——同心时的间隙高度；

$\varepsilon=\frac{e}{h_0}$——相对偏心率；

d_1——内圆柱直径。

当内柱、外孔均固定不动，即 $V_0=0$ 时流量为

$$q_V=\frac{\Delta p h_0^3\pi d_1}{12\mu L}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right) \qquad (9-24)$$

比较式(9-22)和(9-24)可以看出，偏心的存在使通过圆柱环形间隙的流量增大，其比值为

$$\frac{q_{V_e}}{q_{V_r}}=1+\frac{3}{2}\varepsilon^2$$

§9-5 圆管中的紊流运动

流体在作**紊流**运动时，质点的运动杂乱无章，相互混杂，流体的运动参数如流速、压强等均随时间不停地变化，因此，紊流运动实质是一种非恒定流动，运动参数的变化，称为脉动现象。脉动现象使流体紊流的研究与层流有着根本的区别，层流研究中所采用的严密的数学推导，无法在紊流中应用。紊流的研究只能借助于一些半经验理论和实验，即在一定的假设前提下进行实验，分析实验结果，参照层流运动，得出半经验的规律。

本节中，将引进新的数学物理模型，在实验研究的基础上，得出工程计算中适用的紊流流动的基本关系式和能量损失的计算方法。

1. 时间平均流速

图 9-12 为紊流流动流场中某空间点 M 上的速度随时间的变化曲线。可以看出，尽管速度的大小随时间不停的变化，但空间任意点上的速度始终围绕某一“平均”值波动，人们根据这一实测结果采用了运动参数的时间平均值作为研究对象，从而使紊流运动的研究找到了切实可行的办法。

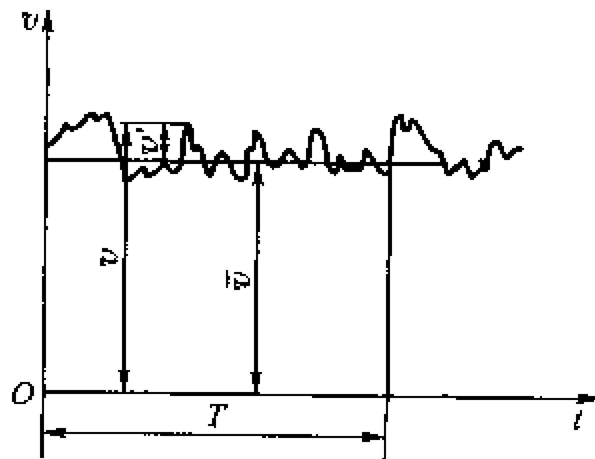


图 9-12

由图 9-12 可以看出，若紊流中某点的时间平均速度为 $\bar{v}$，则该点某瞬时的速度可以表示为

$$v=\bar{v}+v' \qquad (9-25)$$

其中 v' 为时间平均速度 $\bar{v}$ 与真实瞬时速度

的差值，称为**脉动速度**。

在紊流状态下，流体质点将在基本流动方向不变的情况下作杂乱无章的脉动运动，其脉动速度 v' 有正、有负(如图 9-12 所示)，所以在一定的时间间隔内，脉动速度的平均值必然为零，即

$$\sum v' = 0$$

由图 9-12 也可以将时间平均流速定义为：在一定的时间 T 内，以真实流速流过空间某一微小过流断面 dA 的流体体积，等于以不随时间改变的平均流速在同一时间间隔 T 内流过同一微小过流断面 dA 的流体体积，即

$$\bar{v}T\mathrm{d}A = \int_0^T v\mathrm{d}A\mathrm{d}t$$

消去 $\mathrm{d}A$ 得

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v\mathrm{d}t \tag{9-26}$$

式(9-26)的物理含义为，时间平均流速的引入是以 T，$\bar{v}$ 为边的矩形面积代替了真实速度 v 在 T 内的积分。

同样道理，可以引入其他运动参数的时间平均值，如**时间平均压强**为

$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t$$

$$p = \bar{p} + p'$$

这里，我们引进了紊流研究中的几个重要概念：

(1) **瞬时速度** v，**瞬时压强** p，表示在某时刻紊流流场中某点速度、压强的真实值；

(2) 时间平均速度 $\bar{v}$，时间平均压强 $\bar{p}$，表示在一定的时间段内，紊流流场中某空间点上速度、压强的时间平均值。但要注意，在过流断面上不同点有不同的时间平均值；

(3) 脉动速度 v'，**脉动压强** p'，表示在某一空间点上速度、压强的真实值与时间平均值的差值；

(4) 断面平均流速 V，表示过流断面上所有点的时间平均流速(层流时即为真实流速)对断面的平均值，断面上所有各点具有相同的 V 值。

运动参数时间平均值的引入使研究工作大为简化了，所讨论的对象由真实的脉动运动参数变为时间平均运动参数，亦即以紊流运动的时间平均运动参数代替了紊流真实流动的运动参数场，建立了以时间平均运动参数描述的“模型场”。

实际上，以真实运动参数去研究紊流运动将是十分复杂的。在实际工程计算中，每个流体质点的实际运动情况，尤其是脉动状态并无实际意义，而所需要求解的速度、压强分布、能量损失计算等均指其时间平均值。一般用测速

计、压强计等量测仪表所测得的也只能是时间平均值。

在以下紊流运动的研究中，所有概念都将以时间平均值来定义。例如，紊流流场中流线定义为在时间平均速度场中所做的曲线，在给定瞬时位于该曲线上的所有流体质点的时间平均速度向量都与曲线相切。紊流运动的分类也以时间平均值的概念来划分，当紊流流场中每一空间点上的运动参数时间平均值，例如时间平均速度、时间平均压强等不随时间变化时，称为恒定紊流运动，或称为准恒定流动。而当流场中每一空间点上的运动参数时间平均值随时间变化时，称为非恒定紊流。

由此可见，由于我们以时间平均参数代替了真实的运动参数，就使得前面所引用的基本概念和运动分类以及前面推得的恒定流动基本方程，如能量方程、动量方程等均适用于紊流流动，从而使紊流运动的研究大大简化了。

应该指出，时间平均化的概念只是人为的一种研究模型，其目的仅在于使研究过程和方法简化。当研究另一类涉及紊流物理本质的问题时，就必须考虑到流体质点相互混杂的影响，否则将出现很大的误差。例如，在研究紊流流动能量损失时就不能应用牛顿内摩擦定律，必须考虑到流体质点紊动、混杂的影响。

2. 紊流流动中的动量交换和附加切应力

在紊流运动中，流体质点的速度大小和方向都在不停地变化，在流体质点沿流动方向向前运动的同时，还存在着向各个方向的脉动，使某一层中的流体质点将脉动速度分量带人另一层。显然，这种脉动的结果将产生对流动的附加阻力，这种阻力的确定是紊流运动研究的一个重要内容。

现在以圆管中的准恒定紊流流动为对象，应用动量交换理论，研究附加应力产生的原因和紊流运动中流速分布、阻力计算等问题。

图 9-13 所示为水平放置的等径直圆管，流体在管内作恒定紊流运动。取管轴为 x 轴，半径方向为 y 轴。在图示 M 点处，取微元面积 dA_1 垂直于 x 方向，它位于微元环形截面上；取微元面积 dA_2 垂直于 y 轴，它位于 M 点所在的圆柱面上。

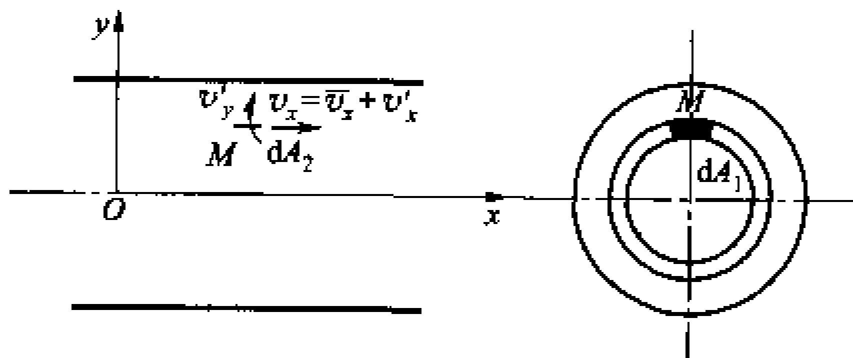


图 9-13

当忽略流体重力时，流动对称于 x 轴。因此，在 x 方向和 y 方向的实际速度为

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x$$
$$v_y = v'_y$$

即在 x 方向有时间平均速度 $\bar{v}_x$，同时也有脉动速度 v'_x；而在 y 方向其时间平均速度 $\bar{v}_y = 0$，只存在脉动速度 v'_y。

首先计算通过 $\mathrm{d}A_1$ 的动量。$\mathrm{d}t$ 时间通过 $\mathrm{d}A_1$ 的流体质量为 $\rho v_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t$。在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过 $\mathrm{d}A_1$ 传递的动量为 $\rho v_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t$，由 $v_x = \bar{v}_x + v'_x$ 得

$$\rho v_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = \rho(\bar{v}_x + v'_x)^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = \rho \bar{v}_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t + 2\rho \bar{v}_x v'_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t + \rho v'^2_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t$$

将此式中的各项在时间 T 内取时间平均值得

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho v_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \rho \bar{v}_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T 2\rho \bar{v}_x v'_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \rho v'^2_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t$$

我们的讨论限于不可压缩流体准恒定流动，所以

$$\rho = \mathrm{const} \qquad \bar{v}_x = \mathrm{const}$$

由此，上式各项为

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho v_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = \rho \mathrm{d}A_1 \frac{1}{T}\int_0^T v_x^2 \mathrm{d}t = \rho \bar{v}_x^2 \mathrm{d}A_1$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho \bar{v}_x^2 \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = \rho \mathrm{d}A_1 \bar{v}_x^2 \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t = \rho \bar{v}_x^2 \mathrm{d}A_1$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2\rho \bar{v}_x v'_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = 2\rho \bar{v}_x \mathrm{d}A_1 \int_0^T v'_x \mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho v'^2_x \mathrm{d}A_1 \mathrm{d}t = \rho \mathrm{d}A_1 \frac{1}{T}\int_0^T v'^2_x \mathrm{d}t = \rho(\bar{v}'^2_x)\mathrm{d}A_1$$

这里，$\bar{v}'^2_x$ 是纵向脉动速度平方的时均值，应注意与 $\bar{v}'_x$，即脉动速度时均值的区别，前者不为零。

将上述关系代回原方程得

$$\rho(\bar{v}_x^2)\mathrm{d}A_1 = \rho(\bar{v}_x)^2 \mathrm{d}A_1 + \rho(\bar{v}'^2_x)\mathrm{d}A_1$$

消去 $\mathrm{d}A_1$ 得

$$\rho(\bar{v}_x^2) = \rho(\overline{v_x})^2 + \rho(\bar{v}'^2_x) \tag{9-27}$$

式(9-27)各项的含义为：$\rho(\bar{v}_x^2)$表示在单位时间内，通过垂直于 x 轴的单位面积以真实速度传递的动量。$\rho(\overline{v_x})^2$ 表示在同一时间，通过同一面积以时间平均速度传递的动量。$\rho(\bar{v}'^2_x)$表示在同一时间内，通过同一面积以脉动速度传递的动量。由动量定理可知，通过 $\mathrm{d}A_1$ 的动量传递必然是一定作用力引

起的结果，因此，式(9-27)中各项表示单位面积上的作用力，即应力，应力方向为 x 轴方向。所以式(9-27)可以表示为

真实应力的时均值=时均运动引起的正应力+纵向脉动引起的附加正应力

当流体在等径直管中作紊流运动时，若以时间平均速度描述其速度场，则速度方向总是平行于 x 轴。对各过流断面而言，速度分布相同，所以，沿流程各处附加的正应力均相同，即

$$\frac{\partial[\rho(\bar{v}'^2_x)]}{\partial x}=0$$

该式表明，在圆管紊流中，附加紊流正应力不引起能量损失，所以，在计算中不予考虑。

下面计算通过 dA_2 的动量交换。由前面的分析可知，在紊流运动中，在管的径向存在脉动速度 v'_y。因此，在 M 点的附近也有流体质点在 y 方向的脉动，必然引起流体质量交换，具有不同速度的质量间的交换，将产生动量交换。

设 M 点处径向脉动速度为 v'_y，在 dt 时间内通过 dA_2 脉动出去的流体质量为 $\rho v'_y dA_2 dt$。原来这部分流体具有轴向速度 $v_x=\overline{v_x}+v'_x$，因此，因脉动通过 dA_2 传递过去的在 x 方向的动量为

$$\rho v'_y dA_2 dt v_x=\rho v'_y dA_2 dt\,\overline{v_x}+\rho v'_y dA_2 dt v'_x$$

将该式在 T 时间内进行时均计算，可以得到在单位时间内通过 dA_2 传递的在 x 方向的动量

$$\frac{1}{T}\int_0^T \rho v'_y dA_2 dt v_x=\frac{1}{T}\int_0^T \rho\,\overline{v_x}v'_y dA_2 dt+\frac{1}{T}\int_0^T \rho v'_x v'_y dA_2 dt$$

式中各项为

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \rho v'_y dA_2 dt v_x&=\rho dA_2\frac{1}{T}\int_0^T v'_y v_x dt\\&=\rho(\overline{v'_y v_x})dA_2\\\frac{1}{T}\int_0^T \rho\,\overline{v_x}v'_y dA_2 dt&=\rho\,\overline{v_x}dA_2\int_0^T v'_y dt=0\\\frac{1}{T}\int_0^T \rho v'_x v'_y dA_2 dt&=\rho dA_2\frac{1}{T}\int_0^T v'_x v'_y dt\\&=\rho(\overline{v'_x v'_y})dA_2\end{aligned}$$

将各项代入原方程得

$$\rho(\overline{v'_y v_x})=\rho(\overline{v'_x v'_y}) \tag{9-28}$$

式(9-28)说明，当流体在圆管中作紊流运动时，在单位时间内，通过圆柱面上单位面积所传递的沿 x 方向的动量为 $\rho(\overline{v'_x v'_y})$。因此，该单位面积上必

将受到沿 x 方向的作用力，其大小等于 $\rho(\overline{v'_x v'_y})$，因这个力作用在圆柱面上而且沿轴线方向故称为切应力。又因为这个切应力是由于流体质点的横向脉动产生的，所以又称附加切应力，记为 τ'，即

$$\tau' = \rho(\overline{v'_x v'_y})$$

附加切应力的产生似乎与流体粘性的产生原因相类同，都是分子的动量交换，但两者有着本质的区别，前者是流体微元脉动的结果，而后者是流体分子无规则运动碰撞造成的。

综合以前的分析可以看出，在紊流流动的任一过流断面上，切应力 τ 应为粘性摩擦切应力与附加切应力之和，即

$$\tau = \mu\frac{d\bar{v}_x}{dy} + \tau'$$

或

$$\tau = \mu\frac{d\overline{v_x}}{dy} + \rho(\overline{v'_x v'_y}) \tag{9-29}$$

在圆管层流运动的研究中，由切应力表达式可以直接用数学方法推导出速度分布规律。由此启发我们，在紊流流动中，若能找出式(9-29)中 $\rho(\overline{v'_x v'_y})$ 与 $\overline{v_x}$ 和 y 之间的函数关系，则紊流流动中的应力分布也就可以确定了。

由于紊流运动的复杂性，完全从严密的数学推导求得问题的解决是不可能的。历来的研究者从不同的角度引用一定的假设，基本上使问题得到了解决。现在介绍其中的一种方法——**普朗特混合长理论**。

3. 普朗特（Prandtl）混合长理论

普朗特混合长理论主要用来解决紊流运动中附加切应力 τ' 和时间平均流速 $\overline{v_x}$ 间的关系，实质是确定脉动速度 v'_x、v'_y 的大小。

图9-14曲线表示沿径向时间平均流速 $\overline{v_x}$ 的分布，其中坐标轴 x 选取在管壁上，y 轴沿管直径方向。

普朗特认为，流体质点在 y 方向脉动的结果，由一个流体层跃入另一层，脉动过程经过一段不与其他流体质点相碰撞的距离 l，以它原来的动量和新位置周围的质点混合，完成**动量交换**，l 称为**混合长度**或自由行程。

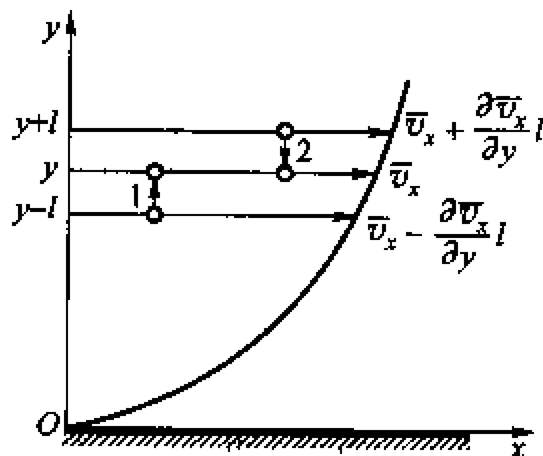


图 9-14

在这个基础上普朗特提出两个假设：

(1) 流体质点的纵向脉动速度 v'_x 等于两层流体时均速度的差值，即 $v'_x = \frac{d\overline{v_x}}{dy}l$。即当流体质点从 $(y+l)$ 层脉动到 y 层上时，相当

于在 y 层上引起了大小为$\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}l$ 的纵向脉动。

(2) 横向脉动速度 v'_y 与纵向脉动速度 v'_x 成正比。即 v'_y 与 v'_x 的数值大小为同一数量级。

第二个假设可以用图 9-15 所示流体质点的脉动模型来说明。设有两个流体质点 1、2 分别自 $y-l$ 层和 $y+l$ 层同时跃入 y 层。由第一个假设可知，质点 1 的时均速度比 y 层的流体质点慢 $v'_{x_1}=\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}l$，而质点 2 的时均速度比 y 层的流体质点快 $v'_{x_2}=\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}l$。若如图 9-15 a 所示质点 2 位于质点 1 的前方，则两质点在 y 层上将以速度$(v'_{x_1}+v'_{x_2})$彼此分开，在 y 层上产生空隙致使 y 层两侧相邻位置上的流体质点向 y 层脉动，填补质点 1，2 分开后留下的空隙，其脉动速度为 v'_y。若质点 1 位于质点 2 之前如图 9-15 b 所示，则两质点将以速度 $v'_{x_1}+v'_{x_2}$ 靠近，致使 y 层上 1，2 两点间的流体质点被排挤到 y 层两侧，其脉动速度也为 v'_y，可以看出，质点的横向脉动是由纵向脉动引起的，其数值大小必定彼此相关，即二者数量级相同。可表示为

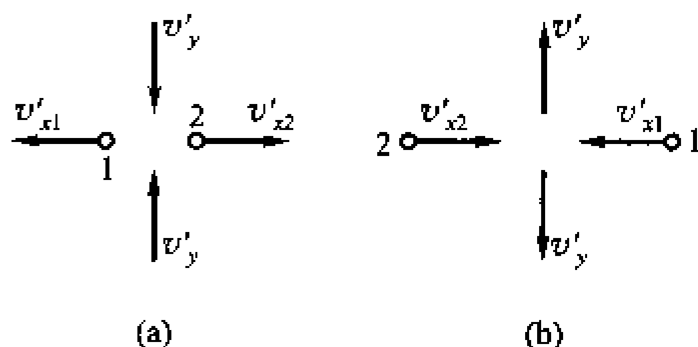


图 9-15

$$v'_y=Cv'_x=C\left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}_x}{\mathrm{d}y}l\right)$$

由普朗特混合长理论确定了 v'_x，v'_y 与时均速度的关系，故附加切应力 τ' 可以确定为

$$\tau'=\rho\,(\overline{v'_xv'_y})=\rho\,\frac{1}{T}\int_0^T v'_xv'_y\mathrm{d}t$$

$$=\rho\,\frac{1}{T}\int_0^T c\left(\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}\right)^2 l^2\mathrm{d}t=\rho cl^2\left(\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

考虑到相邻两层附加切应力的方向不同，并把比例系数 c 并入尚未确定的混合长度 l 中得到附加切应力为

$$\tau'=\rho l^2\left|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y} \tag{9-30}$$

代入式(9-29)得

$$\tau=\mu\,\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}+\rho l^2\left|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y} \tag{9-31}$$

由式(9-30)可以看出，紊流附加切应力的作用方向始终使速度分布更趋

于均匀。

由式(9-31)可以看出，在整个紊流过流断面上切应力可以有三种情况，在靠近边壁的层流区域中，由于粘性作用显著，流体质点的脉动几乎不存在，因此 $\tau=\mu\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}$，即只有粘性摩擦力；在紊流中心部分，流体质点脉动剧烈，粘性摩擦切应力与紊流附加切应力相比很小，可以忽略，其切应力为 $\tau=\rho l^2\left|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}$；在紊流中心区与边壁层流区之间的过渡区域内，粘性切应力和紊流附加切应力相比，二者数量级相同，均不可以忽略，其切应力为

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}+\rho l^2\left|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}\right|\frac{\mathrm{d}\overline{v_x}}{\mathrm{d}y}$$

4. 圆管内紊流流动的速度分布、粘性底层、水力光滑管和水力粗糙管

(1) 紊流结构分析

由前面的分析知道，流体在管内作层流运动时，过流断面上的速度按抛物线规律分布。

流体在圆管中作紊流运动时，速度分布不同于层流，这是因为紊流运动中流体质点的横向脉动使速度分布趋于均匀。显然，雷诺数越大，流体质点相互混杂的越剧烈，其速度分布越趋于均匀。图9-16给出了由实验资料得到的紊流过流断面的流速分布。



图 9-16

由图9-16可以看出，过流断面上的流速分布大致可分为三个区域，在靠近管壁处有一薄层流体，受管壁的影响，在流体粘性作用下流速急剧下降，在管壁处速度降为零。显然，在这个小范围内，沿径向存在较大的速度梯度，这一层流体称为粘性底层，或称为近壁层流层。

由于紊流脉动动量交换的结果，离边壁不远处到中心的绝大部分区域流速分布比较均匀，这部分流体处于紊流运动状态，称为紊流核心区。

在紊流核心区与粘性底层之间存在着范围很小的过渡区域。

粘性底层的厚度取决于流体运动速度的大小。流速越高，其质点混杂的能力越强，粘性底层越薄，反之越厚。由分析、推导和实验得到厚度 δ 与雷诺数 Re 的关系为

$$\delta=32.8\frac{d}{Re\sqrt{\lambda}} \tag{9-32}$$

式中 d——管道直径

λ——紊流运动沿程损失因数

由式(9-32)可以看出，粘性底层的厚度是很薄的，通常大约只有几分之一毫米。

尽管粘性底层的厚度很小，但它对紊流流动的影响却是很大的，尤其是在沿程损失计算中更为明显。

通常管壁表面粗糙凸出的平均高度叫做管壁的绝对**粗糙度**，记为 Δ，把绝对粗糙度 Δ 与管径 d 的比值 Δ/d 称为相对粗糙度，记为 $\overline{\Delta}$，常用管壁的 Δ 值列于表 9-1。

表 9-1　常用管的绝对粗糙度

管壁情况	Δ/mm	管壁情况	Δ/mm
干净　铜管、铅管	0.0015—0.01	污秽的金属管	0.75—0.90
新无缝钢管	0.04—0.17	干净玻璃管	0.0015—0.01
使用一年后的钢管	0.12	橡皮软管	0.01—0.03
普通钢管	0.19	水管道	0.25—1.25
精制镀锌钢管	0.25	纯水泥表面	0.25—1.25
普通镀锌钢管	0.39	混凝土槽	0.80—9.0
普通新铸铁管	0.25—0.42	刨平木板制成的木槽	0.25—2.0
旧的锈钢管	0.60		

按 Δ 和 δ 的大小，将管道分为两种类型：

(a) 当 $\delta > \Delta$ 时，如图 9-17a 所示，管壁的粗糙突出部分完全淹没在粘性底层中。此时，粘性底层以外的紊流区域完全不受管壁粗糙度的影响，流体就好像在理想的完全光滑管中流动，这种情况的管内紊流流动称为“**水力光滑管**”或简称为“光滑管”。

(b) 当 $\delta < \Delta$ 时，如图 9-17b 所示，管壁的粗糙突起有一部分或大部分

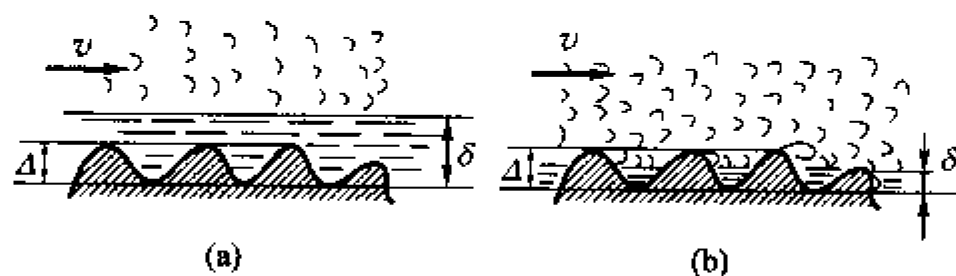


图　9-17

暴露在紊流区内。此时，紊流区中的流体流过管壁粗糙突出部分时将会引起旋涡，造成附加的能量损失，即管壁粗糙度对紊流流动产生影响，这种情况的管内紊流流动称为“**水力粗糙管**”或简称为“粗糙管”。

由前面的分析及式(9-32)可以看出，粘性底层的厚度 δ 是雷诺数 Re 的函

数，因此，紊流流动究竟属于光滑管还是粗糙管取决于 Δ 和 Re 数的大小。对同一绝对粗糙度 Δ 的管道，在小于某一雷诺数时其粘性底层厚度 δ 大于绝对粗糙度 Δ，属于"光滑管"；而当 Re 增加时，δ 必然减小，当 δ 减至小于 Δ 时，就属于"粗糙管"了。

(2) 圆管内紊流的速度分布

现在讨论圆管紊流过流断面上的速度分布规律。

由切应力分布规律式(9－31)和紊流速度分布结构可以看出，在粘性底层中，紊流附加切应力可以忽略，只有粘性切应力，即式(9－31)右端只存在第一项。在紊流核心区内，切应力主要是附加切应力，即式(9－31)右端只存在第二项。只在极小的过渡区中二者数量级相同均须考虑。但由于此区范围甚小，通常并入紊流区。

由此，我们的分析集中在紊流核心区，其切应力为

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\,\overline{v}_x}{\mathrm{d}y} \right)^2 \tag{9-33}$$

可以看出，由于混合长度 l 不确定，所以无法从该式直接求得速度分布规律，必须引进一定的假设。

由式(9－33)可得

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{v}_x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \tag{9-34}$$

其中$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$具有速度的量纲，记为$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \overline{v}_{\text{cut}}$，称为剪切速度。可见，为由微分方程解得$\overline{v}_x$，必须首先给出 l 和 τ。为此，引入如下假设：对于光滑管壁，按实验所得结果可以假设 $l = \kappa y$，其中 κ 为常数；同时假设 τ 与 y 无关，并设管壁处的切应力为 τ_0。实验证明，这个假设对于平板是正确的，对于圆管有一定的误差，可以用实验予以校正。

由假设可知，在积分式(9－34)时，$\overline{v}_{\text{cut}}$可作常数处理。积分可得

$$\overline{v}_x = \overline{v}_{\text{cut}} \left(\frac{1}{\kappa} \ln y + C \right) \tag{9-35}$$

积分常数 C 由边界条件确定。显然，若取 $y = 0$ 则 $v_x = -\infty$，实际上 $y = 0$ 处$\overline{v}_x = 0$，因此这是不合理的。其原因在于，当 y 趋近于 0 时，流动已进入粘性底层内，紊流区的微分方程(9－34)不适用，因此，其边界条件应从粘性底层边界处选取。为使问题简化，我们忽略过渡区，假定流动从粘性底层直接转入紊流核心，在粘性底层外边界处，流速等于紊流核心区在该点的速度，而在极薄的粘性底层中，速度可以看作是直线分布规律，即

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{v}_x}{\mathrm{d}y} = \frac{\overline{v}_x}{y}$$

在粘性底层中 $$\tau_0 = \mu\frac{\mathrm{d}\bar{v}_x}{\mathrm{d}y} = \mu\frac{\bar{v}_x}{y}$$

由此式得 $$\bar{v}_x = \frac{\tau_0}{\mu}y = \frac{\tau_0 y}{\rho\nu} = \bar{v}_{cut}^2\frac{y}{\nu}$$

或 $$\frac{\bar{v}_x}{v_{cut}} = \frac{\bar{v}_{cut}y}{\nu}$$

该式为粘性底层中的流速分布规律。若粘性底层厚度为 δ，则在其边界上的表达式为

$$\frac{\bar{v}_{x\delta}}{\bar{v}_{cut}} = \frac{\bar{v}_{cut}\delta}{\nu} \tag{a}$$

由紊流核心速度表达式(9-35)可知，在 $y=\delta$ 处速度为

$$\frac{\bar{v}_{x\delta}}{\bar{v}_{cut}} = \frac{1}{\kappa}\ln\delta + C \tag{b}$$

引入粘性底层的雷诺数 $Re = \frac{\bar{v}_{x\delta}\delta}{\nu}$，由(a)式可得

$$\frac{\bar{v}_{x\delta}}{\bar{v}_{cut}} = \frac{\bar{v}_{x\delta}\delta}{\nu}\cdot\frac{\bar{v}_{cut}}{\bar{v}_{x\delta}} = Re\frac{\bar{v}_{cut}}{\bar{v}_{x\delta}}$$

因此 $$\frac{\bar{v}_{x\delta}}{v_{cut}} = \sqrt{Re}$$

代入(b)式得常数 C 为

$$\begin{aligned} C &= \frac{\bar{v}_{x\delta}}{\bar{v}_{cut}} - \frac{1}{\kappa}\ln\delta = \sqrt{Re} - \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\bar{v}_{x\delta}\nu}{\bar{v}_{cut}^2} \\ &= \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\bar{v}_{cut}}{\nu} + \sqrt{Re} - \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\bar{v}_{x\delta}}{v_{cut}} \\ &= \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\bar{v}_{cut}}{\nu} + \sqrt{Re} - \frac{1}{\kappa}\ln\sqrt{Re} \end{aligned}$$

代入式(9-35)得

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{cut}} = \frac{1}{\kappa}\ln y + \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\bar{v}_{cut}}{\nu} + \sqrt{Re} - \frac{1}{\kappa}\ln\sqrt{Re}$$

令 $$C_1 = \sqrt{Re} - \frac{1}{\kappa}\ln\sqrt{Re}$$

整理得 $$\frac{\bar{v}_x}{v_{cut}} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{\bar{v}_{cut}y}{\nu} + C_1$$

引入 $B = \kappa C_1$

最后得 $$\frac{v_x}{\bar{v}_{cut}} = \frac{1}{\kappa}\left(\ln\frac{\bar{v}_{cut}y}{\nu} + B\right) \tag{9-36}$$

该式即为圆管内紊流流动的速度分布规律，所引入的常数 C_1、κ 由实验确

定。

由式(9－36)可以看出，圆管紊流运动中过流断面上流速分布为对数规律。尼古拉兹对水力光滑管紊流流动进行大量实验得出

$$C_1=5.5,\ \kappa=0.40$$

代入式(9－36)，得

$$\frac{\overline{v}_x}{\overline{v}_{cut}}=2.5\ln\frac{\overline{v}_{cut}y}{\nu}+5.5 \tag{9-37}$$

式(9－36)和(9－37)所表示的圆管紊流速度分布与实验结果十分符合，除粘性底层外可近似用于整个过流断面。

人们由实验总结出紊流速度分布的另一个较为简单的规律——指数规律，其表达式为

$$\frac{\overline{v}_x}{v_{cut}}=8.7\left(\frac{\overline{v}_{cut}y}{\nu}\right)^n \tag{9-38}$$

实验得知随 Re 的增加 n 的变化范围在$\frac{1}{6}\sim\frac{1}{10}$之间。当 $Re=1.1\times10^5$ 时，$n=\frac{1}{7}$，称为 7 分之一次方指数律，由卡门(Von Karman)推得。于是

$$\frac{\overline{v}_x}{v_{cut}}=8.7\left(\frac{\overline{v}_{cut}y}{\nu}\right)^{1/7}$$

由式(9－36)和(9－38)可以看出，无论紊流速度分布为对数规律还是指数规律，其结果都表示流速分布趋于均匀，这是因为在紊流状态下，液体质点间相互剧烈混杂的结果，质点间发生大量的动量交换，使过流断面上各点的时均流速趋于平均化。由计算和实验测量可以得出，层流断面平均流速为最大速度的一半，即 $V=0.5\ v_{max}$；对于紊流，断面平均速度为最大速度的 0.82 倍，即 $V=0.82\ v_{max}$。

表 9－2 列出由实验测得的 n，V/v_{max}和 Re 之间的关系。此表为紊流研究提供了一定的方便，只要测得管轴上的最大流速，便可由该表求出平均流速和流量。

表 9－2　n，V/v_{max}——Re 关系

Re	4.0×10^3	2.3×10^4	1.1×10^5	1.1×10^6	2.0×10^6	3.2×10^6
n	1/6.0	1/6.6	1/7.0	1/8.8	1/10	1/10
V/v_{max}	0.791	0.808	0.817	0.849	0.865	0.865

§9－6　圆管内均匀紊流的沿程损失

本节采用量纲分析方法来确定圆管内均匀紊流的沿程损失计算表达式。

由大量实验可知，作紊流运动的流体沿程损失的大小与断面平均流速 V，流体密度 ρ，动力粘度 μ 及管路直径 d，长度 l，绝对粗糙度 Δ 有关，其函数关系可表示为

$$\rho g h_f = \Delta p = f(V,\rho,\mu,d,l,\Delta) \tag{9-39}$$

采用幂次表示为

$$\rho g h_f = \kappa V^a \rho^b d^c l^e \mu^f \Delta^g$$

选用法定单位制的基本量纲 L，M，T，则 $\rho g h_f$ 的量纲为

$$\sim M/L^3 \cdot L/T^2 \cdot L = L^{-1}MT^{-2}$$

代入幂次表达式得

$$L^{-1}MT^{-2} = \kappa\ (LT^{-1})^a(ML^{-3})^b(L)^c(L)^e(L^{-1}MT^{-1})^f(L)^g$$

$$= \kappa\ (L)^{a-3b+c+e-f+g}(M)^{b+f}(T)^{-a-f}$$

由量纲齐次性原则得

对 L　　$-1 = a-3b+c+e-f+g$

对 M　　$1 = b+f$

对 T　　$-2 = -a-f$

上面三个方程包含六个未知数，为求得最终表达式，令其中 e，f，g 为待定值可以解得

$$a = 2-f$$

$$b = 1-f$$

$$c = -(e+f+g)$$

代入幂次方程并整理得

$$\rho g h_f = \kappa V^{2-f}\rho^{1-f}d^{-(e+f+g)}l^e\mu^f\Delta^g$$

$$= \kappa\left(\frac{\mu}{V\rho d}\right)^f\left(\frac{\Delta}{d}\right)^g\left(\frac{l}{d}\right)^e\rho V^2$$

$$= \kappa\left(\frac{1}{Re}\right)^f\left(\frac{\Delta}{d}\right)^g\left(\frac{l}{d}\right)^e\rho V^2$$

参照圆管层流沿程能量损失计算公式

$$h_f = \lambda\ \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

令

$$\lambda = 2\kappa\left(\frac{1}{Re}\right)^{f}\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{g}$$

称为沿程损失因数。

由实验确定 $e=1$，最后得

$$h_{f} = \lambda\ \frac{l}{d}\frac{V^{2}}{2g} \tag{9-40}$$

该式为圆管内均匀紊流的沿程能量损失计算公式。

式(9-40)就其形式来看与圆管层流流动能量损失计算公式相同，其区别仅在于沿程能量损失因数 λ 的确定。由前面的分析可以看出，对于层流运动，λ 仅为雷诺数的函数，即

$$\lambda = f(Re)$$

对于紊流运动，λ 为雷诺数 Re 和相对粗糙度 $\bar{\Delta}=\frac{\Delta}{d}$ 的函数，即

$$\lambda = f(Re,\bar{\Delta})$$

由上面的分析可以看出，对于圆管紊流流动，因数 λ 不能由严密的数学推导得出，必须借助于实验予以确定。

下面简单介绍借助于实验推导水力光滑管、紊流粗糙管及其过渡区的计算损失因数 λ 值半经验公式的基本方法。

在作紊流运动的等径直圆管中取长为 l 的管段如图 9-18 所示，设其直径为 d，管壁处切应力为 τ_0，两端压强分别为 p_1，p_2。由所受轴向力平衡

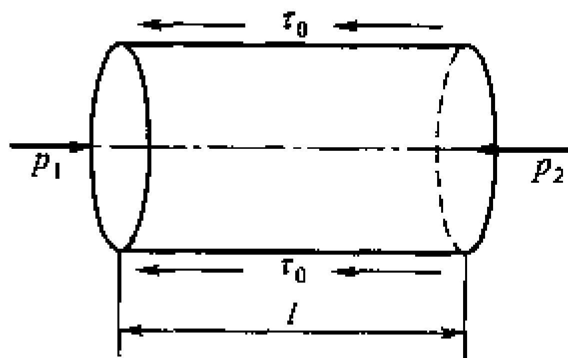


图 9-18

$$(p_1-p_2)\frac{\pi d^2}{4} = \tau_0 \pi d l$$

得

$$\tau_0 = \frac{(p_1-p_2)d}{4l} = \frac{d}{4l}\Delta p$$

又由式(9-40)

$$\Delta p = \rho g h_f = \lambda\ \frac{l}{d}\frac{\rho V^2}{2}$$

联立上述二式得

$$V^2 = \frac{\tau_0}{\rho}\frac{8}{\lambda}$$

由于

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \bar{v}_{cut}^{2}$$

最后得
$$\frac{V}{\overline{v}_{\text{cut}}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}}\text{或}\overline{v}_{\text{cut}}=V\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}} \tag{9-41}$$

我们的目的是要找出平均速度 V 与损失因数 λ 之间的关系。为此，首先借助于式(9-37)建立 V 与$\overline{v}_{\text{cut}}$之间的关系。

由简单的对数换底计算，可将式(9-37)改写为

$$\frac{\overline{v}_x}{\overline{v}_{\text{cut}}}=5.75\lg\left(\frac{\overline{v}_{\text{cut}}y}{\nu}\right)+5.5$$

选取图 9-19 所示坐标，式(9-37)可表示为

$$\frac{\overline{v}_x}{\overline{v}_{\text{cut}}}=5.75\lg\left[\frac{\overline{v}_{\text{cut}}(r_0-r)}{\nu}\right]+5.5$$

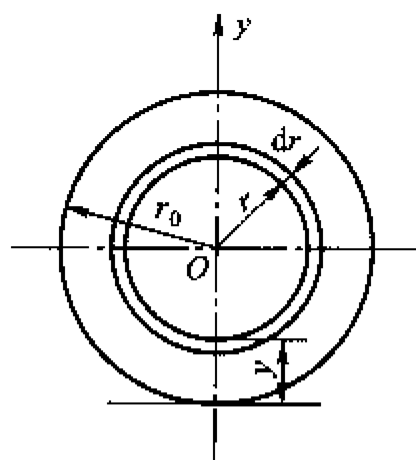


图　9-19

由$\overline{v}_x$ 可求得过 r_0 圆面积的总流量为

$$\begin{aligned}q_V&=\int_0^{r_0}\overline{v}_x2\pi r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{r_0}\overline{v}_{\text{cut}}2\pi r\left\{5.75\lg\left[\frac{\overline{v}_{\text{cut}}(r_0-r)}{\nu}\right]+5.5\right\}\mathrm{d}r\\&=\pi r_0^2\,\overline{v}_{\text{cut}}\left[5.75\lg\left(\frac{\overline{v}_{\text{cut}}r_0}{\nu}\right)+1.75\right]\end{aligned}$$

由此可得断面平均流速为

$$V=\frac{q_V}{\pi r_0^2}=\overline{v}_{\text{cut}}\left[5.75\lg\left(\frac{\overline{v}_{\text{cut}}r_0}{\nu}\right)+1.75\right] \tag{9-42}$$

式(9-37)与式(9-42)相减得

$$\frac{\overline{v}_x-V}{\overline{v}_{\text{cut}}}=5.75\lg\left(\frac{y}{r_0}\right)+3.75$$

将式(9-41)代入得

$$\frac{\overline{v}_x-V}{V\sqrt{\lambda}}=2.031\lg\left(\frac{y}{r_0}\right)+1.33$$

该式为速度$\overline{v}_x$ 由平均速度 V 和损失因数 λ 表达的分布规律。该式与实验结果略有出入，由实验修正可得

$$\frac{\overline{v}_x-V}{V\sqrt{\lambda}}=2.151\lg\left(\frac{y}{r_0}\right)+1.43 \tag{9-43}$$

显然，使 $y=r_0$，即可得到中心处的最大速度为

$$\frac{\overline{v}_{x\max}}{V}=1.43\sqrt{\lambda}+1$$

为求得 λ 与 V 的直接关系可将式(9-41)代入式(9-42)

$$V=V\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\left[5.75\lg\left(\frac{Vr_0\sqrt{\lambda}}{\nu\sqrt{8}}\right)+1.75\right]$$

整理得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2.023\ \lg\left(\frac{VD}{\nu}\sqrt{\lambda}\right)-0.91$$

其中

$$\frac{VD}{\nu}=Re$$

各项因数由实验加以修正，最后得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\ \lg\left(Re\sqrt{\lambda}\right)-0.8 \tag{9-44}$$

该式即为适用于紊流水力光滑管的 λ—V 关系式，称为**卡门-普朗特方程**。

对于紊流粗糙管(指阻力平方区)由实验得到半经验速度分布为

$$\frac{\overline{v}_x}{\overline{v}_{cut}}=5.75\ \lg\left(\frac{y}{\Delta}\right)+8.5$$

用与上述相同的推演过程并借助于实验修正可得 λ 值计算公式为

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\ \lg\left(\frac{r_0}{\Delta}\right)+1.74$$

或

$$\lambda=\frac{1}{\left(2\ \lg\frac{r_0}{\Delta}+1.74\right)^2}=\frac{1}{\left(2\ \lg\frac{d}{2\Delta}+1.74\right)^2} \tag{9-45}$$

式(9-45)通常称为尼古拉兹公式。

由式(9-44)和式(9-45)可以看出对于紊流光滑管区，损失因数 λ 取决于雷诺数 Re；而对于紊流粗糙管区，λ 仅取决于相对粗糙度 $\frac{\Delta}{r_0}$。可想而知，对于两者之间的过渡区，λ 将取决于 Re 和 $\frac{\Delta}{r_0}$，这些完全符合量纲分析的结果。对于过渡区 λ 的计算公式，科尔布鲁克(Colebrook)和怀特(F. M. White)在尼古拉兹实验的基础上，针对商用管道，将光滑管和粗糙管的 λ 值计算式合并得到

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\ \lg\left(Re\sqrt{\lambda}\right)-0.80+2\ \lg\frac{3.7\ d}{\Delta}$$

$$=-2\ \lg\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}+\frac{\Delta}{3.7\ d}\right)$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1.74-2\ \lg\left(\frac{\Delta}{r_0}+\frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \tag{9-46}$$

该式已为实验所证实。显然，当 Re 值很大，即流动为粗糙管区时，式(9-46)中 $\frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}}\to 0$，即变为式(9-45)；而当 $\frac{\Delta}{r_0}$ 远小于 $\frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}}$ 时，式(9-46)又变为式

(9－44)。对于过渡区，两者都必须计及。

最后应指出，以上的讨论和所涉及的实验都是针对完全发展了的均匀紊流而言。在管道人口，即起始段中，由于包括了动量改变所引起的较大的壁面切应力等因素，其压强降低必高于均匀流动中的压强降低，因而实际测得的 λ 值将增大。

§9－7 沿程损失因数的实验研究

对于层流，我们已经用数学的推演方法找到了 λ 的准确表达式，并且已为实验所证实。而对于紊流，用量纲分析得到因数的函数关系，指出了实验方向。就紊流运动的复杂机理而言，λ 只能借助于实验以求得经验或半经验的公式。

现在来介绍确定 $\lambda = f(Re, \overline{\Delta})$ 的**尼古拉兹实验**(1933—1934)。从这个实验中可以看出管壁相对粗糙度 $\overline{\Delta}$ 和雷诺数 Re 对沿程损失因数的影响，并相应地介绍不同范围的 λ 值计算的**经验公式**。

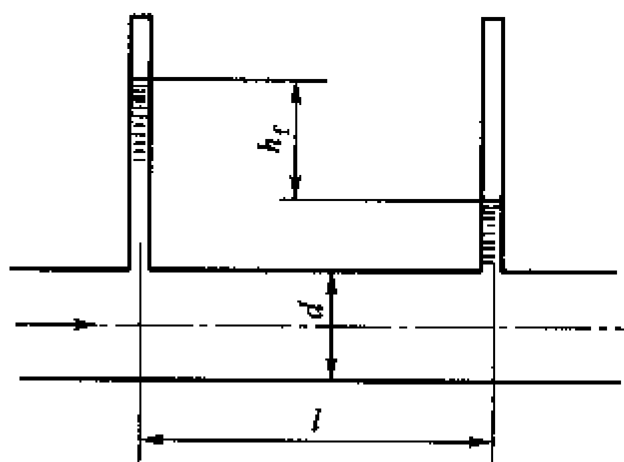


图 9－20

尼古拉兹实验的基本原理如图 9－20 所示，在水平放置的等径直管上，相距 l 处装两支测压管，测压管高度差是对于某一定相对粗糙度 $\overline{\Delta}$ 的管子，在某一流速 V 下，即为在某一定雷诺数下的沿程损失 h_f。由公式

$$h_f = \lambda \frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

即可求得相应的 λ 值

$$\lambda = \frac{h_f}{\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}}$$

用改变流量 q_V 的方法改变流速，可以得到在某一相对粗糙度 $\overline{\Delta}$ 下的 $\lambda = f(Re)$ 关系曲线。

为求得 $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$ 的关系，尼古拉兹在实验中采用人工方法，把不同直径的粒度均匀的砂子分别粘到不同的管壁上，得到所谓“人工粗糙管”，它

具有人为确定的相对粗糙度。在这个实验中，选用各种不同的$\frac{\Delta}{d}$值，最后得到$\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$的关系曲线，我们称为**尼古拉兹曲线**，如图 9－21 所示。

尼古拉兹实验中对人工相对粗糙度选用了六种数值，即

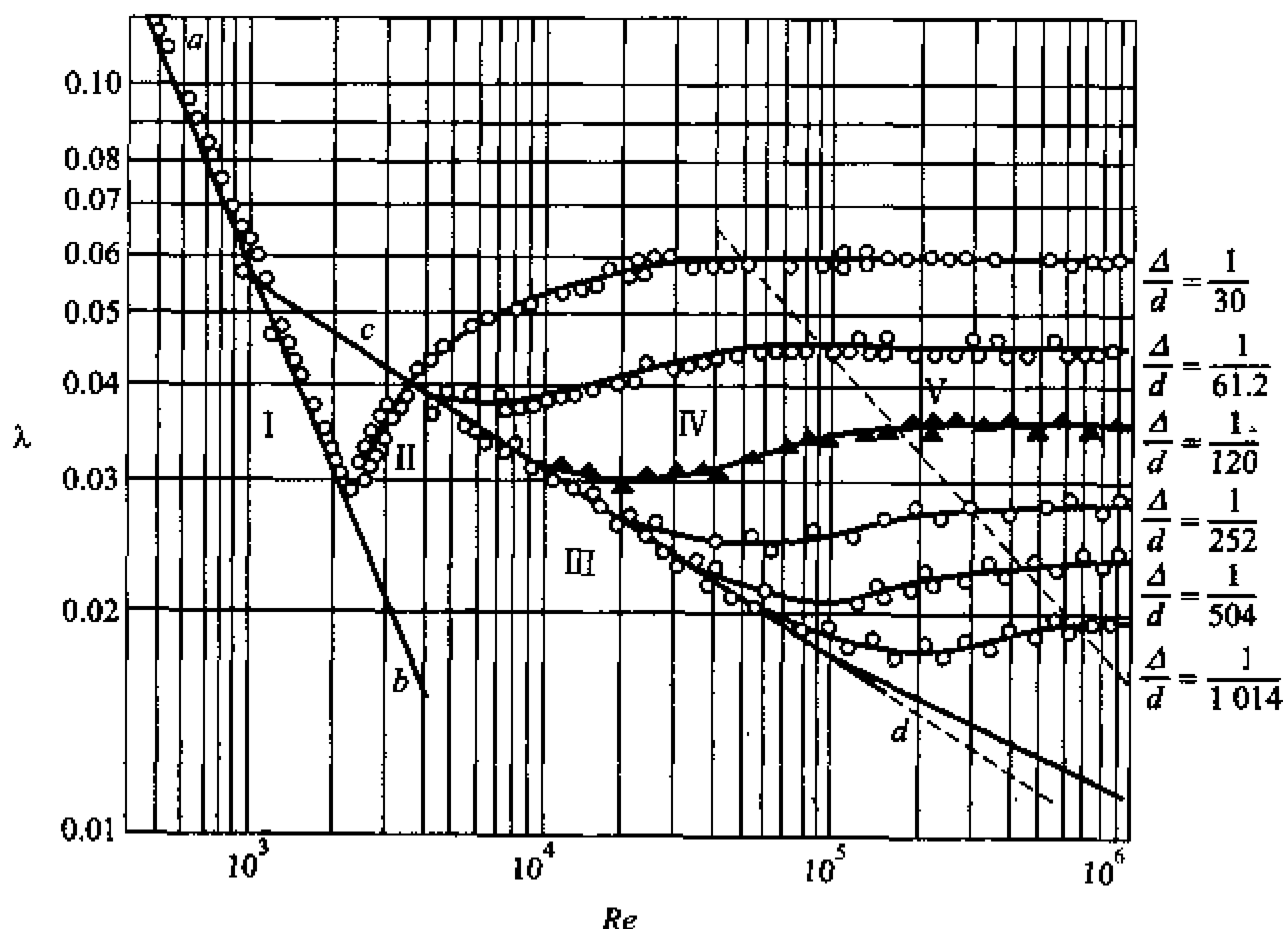


图 9－21

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d} = \frac{1}{30}, \frac{1}{61.2}, \frac{1}{120}, \frac{1}{252}, \frac{1}{504}, \frac{1}{1\,014}$$

雷诺数的实验范围选为

$$Re = 600 \sim 10^6$$

尼古拉兹将所得到的六条曲线画在同一对数坐标中，称为尼古拉兹曲线图。

从**尼古拉兹图**可以看出，沿程损失因数 λ、管壁相对粗糙度 $\bar{\Delta}$ 和流动雷诺数之间的关系是比较复杂的，不存在描述它的统一的数学表达式，下面分为五个区域分别讨论。

Ⅰ区，图中 ab 直线段。其雷诺数较小，大致范围在 $\lg Re < 3.36$，即 $Re < 2320$。在这一区域，六条实验曲线重合于一条直线。这个结果说明，在这一范围内损失因数 λ 与管壁相对粗糙度 $\bar{\Delta}$ 无关，只是雷诺数的函数，即 $\lambda = f(Re)$，数值关系为

$$\lambda=\frac{64}{Re}$$

可见，Ⅰ区内损失规律服从前面推得的层流流动规律，故称为**层流区**。这个结果本身也说明了在圆管层流的研究中所得到的结论是正确的。

Ⅱ区，这个区域的范围为 $3.36<\lg Re<3.6$，即 $2\ 320<Re<4\ 000$。在这一区内实验点开始分散，但由于该区域范围狭小，故通常看作为从层流向紊流过渡的不稳定区域，称为**过渡区**，通常在能量损失计算中按第Ⅲ区处理。

Ⅲ区，该区指直线 cd 所示的范围。可以看出，不同相对粗糙度的曲线，自 $Re=4\ 000$ 开始进入该区，而在该区存在的范围却各不相同。其趋势为：相对粗糙度越大的曲线越早离开该区。具体范围大小可由下面的经验公式确定

$$4\ 000<Re<80\frac{1}{\bar{\Delta}}$$

不同粗糙度的实验曲线在该区位于一条直线上，说明在该区域内损失只是雷诺数 Re 的函数，与管的相对粗糙度 $\bar{\Delta}$ 无关。该直线斜率为 $-\frac{1}{4}$，表明在该区 λ 与 Re 的四分之一次方成反比。

上述分析说明，位于该区的流动已为紊流状态，但管壁粗糙度为粘性底层所淹没，对紊流没有影响，故常称为紊流光滑管区，又称为1.75次方阻力区。

该区内常用的计算经验公式为

当 $Re<10^5$ 时
$$\lambda=\frac{0.316\ 4}{Re^{0.25}} \tag{9-47}$$

该式称为**布拉休斯**(H. Blasius)公式。

当 $Re>10^5$ 时，采用卡门－普朗特公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\left(Re\sqrt{\lambda}\right)-0.8$$

当 $10^5<Re<3\times10^6$ 时，采用**尼古拉兹公式**

$$\lambda=0.003\ 2+0.221\ Re^{-0.237}$$

Ⅳ区，随着雷诺数的增加，各不同相对粗糙度的实验曲线自 CD 曲线的不同位置开始离开，损失因数 λ 逐渐增大，当 Re 数增至图中虚线位置时，各实验曲线开始与 $\lg Re$ 轴平行。在 CD 曲线与虚线中间的区域为第Ⅳ区。该区范围对不同相对粗糙度的实验曲线是不同的，其划分范围为

$$80\frac{1}{\bar{\Delta}}<Re<4\ 160\left(\frac{1}{2\bar{\Delta}}\right)^{0.85}$$

由图可见，在该区内流动损失因数 λ 与雷诺数和相对粗糙度均有关系，即 $\lambda=f(Re,\bar{\Delta})$。此时管壁的粗糙突出已部分暴露在紊流区内，流动出现由水力光滑管发展为**紊流粗糙管**的趋势，该区称为**紊流过渡区**。

通常，λ 值在该区内可用**科尔布鲁克**公式计算

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7\ d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

V 区，雷诺数继续增大超过图示虚线位置，即

$$Re > 4\ 160\left(\frac{1}{2\ \bar{\Delta}}\right)^{0.85}$$

这时，沿程损失因数 λ 与雷诺数 Re 无关，只取决于相对粗糙度 $\bar{\Delta}$，即 $\lambda = f(\bar{\Delta})$。在该区内，能量损失与流速平方成正比，故该区称为紊流粗糙管区或阻力平方区。由相似理论可知，此区内粘性力自动相似，人们又称它为自动模拟区。

该区内 λ 的计算可按尼古拉兹经验公式进行

$$\lambda = \frac{1}{\left[1.74 + 2\lg\left(\frac{d}{2\ \Delta}\right)\right]^2}$$

或

$$\lambda = \frac{0.312}{d^{0.226}}\left(1 + \frac{0.684}{V}\right)^{0.226}$$

上面对尼古拉兹图的分析归纳为：

（1）当 $Re < 2\ 320$ 时，属于层流区；

（2）当 $2\ 320 < Re < 80\ \frac{1}{\bar{\Delta}}$ 时，属于紊流光滑管区，它包括过渡区在内；

（3）当 $80\ \frac{1}{\bar{\Delta}} < Re < 4\ 160\left(\frac{1}{2\ \bar{\Delta}}\right)^{0.85}$ 时，属于紊流粗糙管区；

（4）当 $Re > 4\ 160\left(\frac{1}{2\ \bar{\Delta}}\right)^{0.85}$ 时，属于紊流阻力平方区。

相对于各区在各种资料中都有若干 λ 值的计算公式，上面只举出其中的几个以供参考。

尼古拉兹图是尼古拉兹实验的实测结果，从中我们可以清楚地看出沿程损失因数 λ 随雷诺数 Re 和相对粗糙度 $\bar{\Delta}$ 的变化规律，同时，它可以作为流动损失计算的依据。

在尼古拉兹的实验中所用的粗糙管壁是用人工方法制成的。工程实际中所用的管道壁面粗糙度不可能如此均匀，这种管我们称为工业用管。要把尼古拉兹的实验结果直接应用于工业用管必须首先按能量损失相同的原则，用实验方法把工业用管换算为等价的人工粗糙管。表 9-1 中所给出的各种常用管 Δ 值即为其等价值。

对于实际的工业用管，为应用方便，其 $\lambda = f(Re, \Delta)$ 关系绘制成图 9-22 所示的曲线，称为**穆迪(L. F. Moody)曲线**。与尼古拉兹图相对比可以看出，

其Ⅰ、Ⅲ、Ⅴ区的变化规律相同。在离开光滑区以后，$\lambda \sim Re$ 曲线没有回升部分，而是 λ 值随着 Re 的增加而逐渐减小，一直到粗糙管区为止。

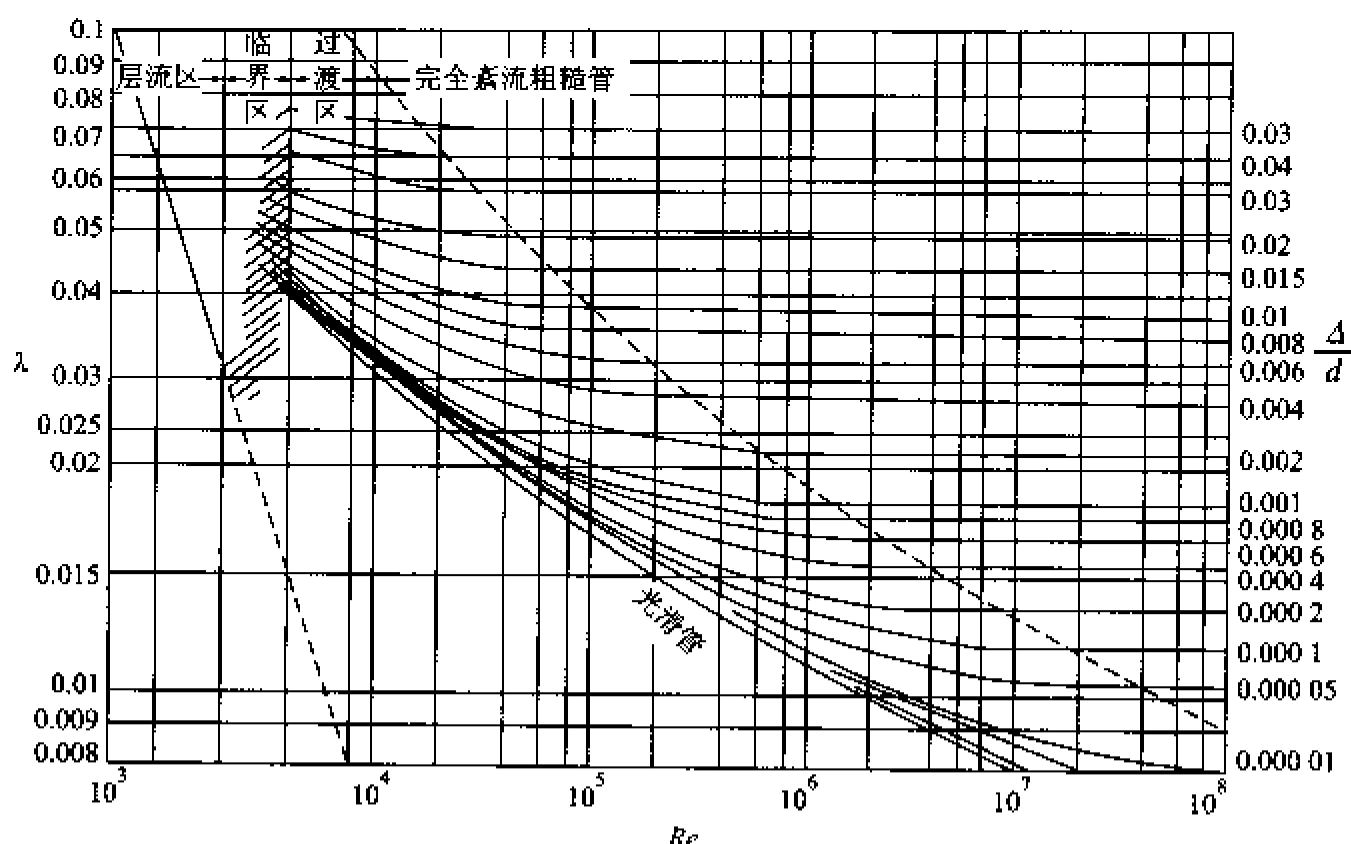


图　9－22

在工程设计计算中，求取沿程损失因数 λ 的方法通常可归纳为以下三种途径：

（1）图线法。按工程选用的管道，由表9－1查找其相对应的绝对粗糙度 Δ，按设计给定的 $\dfrac{\Delta}{d}$ 值和雷诺数 Re，在尼古拉兹曲线或穆迪曲线中查取。

（2）图表法。在工程应用的有关手册中，往往给出人们预制的 Δ，V，d，ν，Re，λ 等参数之间的关系图表，可按所指示的查找方法由设计数据查得。

（3）计算法。按本节所分析的方法，分区选用相应的公式计算。

§9－8　几种非圆形断面管中的流动

在实际工程，特别是热能工程和通风、除尘工程中，用来输送流体的管道并非全是采用圆形断面。按工程需要也常选用非圆形截面管，如同心环形断面、椭圆形断面、矩形断面等，如在输送烟气、空气的管道中大多采用矩形截面管。

当流体沿非圆形管道作均匀流动时，其沿程损失的计算公式和雷诺数计算形式与沿圆管流动时完全相同，只是其中圆管直径 d 用非圆断面的当量直径

d_e 代替，即

$$Re=\frac{Vd_e}{\nu}$$

$$h_f=\lambda\frac{L}{d_e}\frac{V^2}{2g}$$

上述公式在紊流光滑管范围内使用，席勒(Schile)和尼古拉兹用实验结果说明了它的正确性，压头损失 Δp，流量 q_V 都可以采用圆管的计算方法。

当截面形状越接近圆形时，用 d_e 计算的结果误差越小。反之，则越大。这是由于沿壁面切应力分布不均匀造成的。由图 9-23 所示矩形截面管内的等速线可以看出，管道角上的速度小于中心处的速度，因此造成切应力由中心向角部逐渐减小的趋势。所以，用当量直径 d_e 为参数进行计算时，矩形截面管的长边与短边相差不应太大，通常，其比值不应大于 8，否则将造成较大的误差。

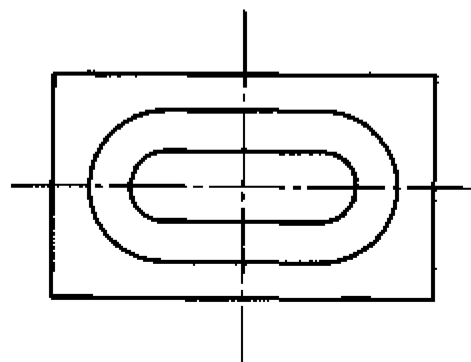


图 9-23

在紊流情况下非圆管道中的流动计算只能借助于实验来确定。在层流运动状态下，可以用类似于圆管层流的研究方法，借助于边界条件，采用数学推演得到。下面列出图 9-24 所示几种非圆形截面管道中层流运动的流速分布和流量计算公式。

(1) 圆环形断面(图 9-24a)

当量直径
$$d_e=\frac{4\left(\pi r_2^2-\pi r_1^2\right)}{2\pi r_1+2\pi r_2}=2\left(r_2-r_1\right)$$

流速分布规律

$$v=-\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(r^2-\frac{r_2^2-r_1^2}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\ln r-\frac{r_1^2\ln r_2-r_2^2\ln r_1}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\right)\tag{9-48}$$

流量计算公式

$$q_V=\frac{\pi\Delta p}{8\mu l}\left[r_2^4-r_1^4-\frac{\left(r_2^2-r_1^2\right)^2}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}\right]\tag{9-49}$$

其中 r_1，r_2——圆环形断面内、外半径；

l——管道长度；

Δp——压差。

(2) 椭圆形断面(图 9-24b)

当量直径 $$d_e = \frac{4\pi ab}{\pi[1.5(a+b)-\sqrt{ab}]} = \frac{4ab}{1.5(a+b)-\sqrt{ab}}$$

流速分布规律

$$v = \frac{\Delta p a^2 b^2}{2\mu l(a^2+b^2)}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right) \tag{9-50}$$

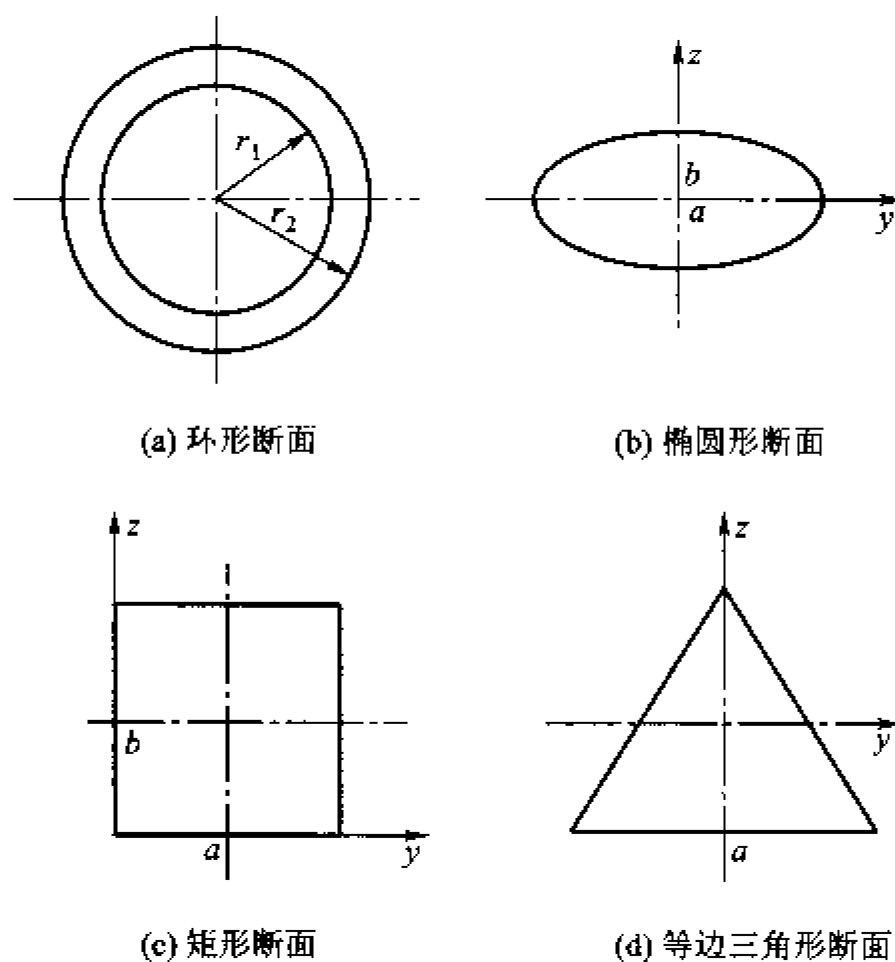
流量公式

$$q_V = \frac{\pi\Delta p}{4\mu l}\frac{a^3 b^3}{a^2+b^2} \tag{9-51}$$

其中 a——椭圆长半轴；

b——椭圆短半轴。

(3) 矩形断面(图 9-24c)



(a) 环形断面 (b) 椭圆形断面

(c) 矩形断面 (d) 等边三角形断面

图 9-24

当量直径 $$d_e = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

流速分布规律

$$v = -\frac{\Delta p}{2\mu l}y(y-a) + \sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi z}{a} + B_m \operatorname{sh}\frac{m\pi z}{a}\right) \tag{9-52}$$

其中

$$A_m = \frac{a^2 \Delta p}{\mu m^3 \pi^3 l} [\cos (m\pi) - 1]$$

$$B_m = -\frac{A_m \left[\mathrm{ch} \left(\frac{mb}{a} \pi \right) - 1 \right]}{\mathrm{sh} \left(\frac{mb}{a} \pi \right)}$$

流量公式

$$q_V = \frac{\Delta p}{24\mu l} ab (a^2 + b^2) - \frac{8\Delta p}{\pi^5 \mu l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \left[a^4 \mathrm{th} \left(\frac{2n-1}{2a} \pi b \right) + b^4 \mathrm{th} \left(\frac{2n-1}{2b} \pi a \right) \right] \tag{9-53}$$

其中 a——矩形长边；

b——矩形短边。

计算常采用下面近似公式

$$q_V = \frac{ab^3 \Delta p}{12\mu l} \left(1 - \frac{192 b}{\pi^5 a} \mathrm{th} \frac{\pi a}{2b} \right) \tag{9-54}$$

或者

$$q_V = f\left(\frac{a}{b} \right) \frac{a^2 b^2 \Delta p}{64\mu l} \tag{9-55}$$

式中 $f\left(\frac{a}{b} \right)$ 可由表 9-3 查得

表 9-3 $f\left(\frac{a}{b} \right) - \frac{a}{b}$ 关系

$\frac{a}{b}$	1.0	1.2	1.5	2	3	4	5	10
$f\left(\frac{a}{b} \right)$	2.25	2.2	2.08	1.83	1.4	1.12	0.93	0.5

(4) 等边三角形断面(图 9-24d)

当量直径

$$d_e = \frac{4 \frac{a}{2} \frac{a}{2} \tan 60°}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

流速分布规律

$$v = \frac{\sqrt{3} \Delta p}{6\mu a l} \left(z - \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \left(z + \sqrt{3} y - \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left(z - \sqrt{3} y - \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \tag{9-56}$$

流量公式

$$q_V = \frac{a^4 \Delta p}{185 \mu l}$$

下面我们以圆环形断面管为例，推导其层流流动时流速、流量表达式。取图 9－25 所示一段圆环形断面管，选柱坐标系 r，θ，x 如图示。

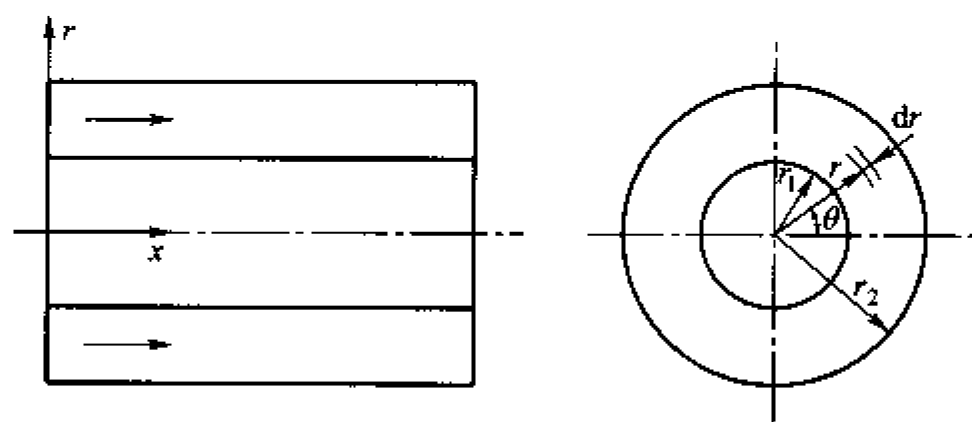


图　9－25

由于所研究的是沿 x 轴向的恒定层流流动，因此

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \quad v_r=0 \quad v_\theta=0 \quad v_x=v \quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

于是，柱坐标系的 N－S 方程式(7－12)，在不计质量力时变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial r}=0\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial \theta}=0\\[2mm] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=\nu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right)\end{cases}$$

由前两式可知，p 仅为 x 的函数，因此，$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，而 v 仅为 r 的函数，故 $\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$，则第三式变为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}\right)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\mu\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

可得

$$\mathrm{d}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{r}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}r$$

其中，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$与 r 无关，积分此式可得

$$r\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{r^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+C_1$$

$$\mathrm{d}v=\left(\frac{r}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{C_1}{r}\right)\mathrm{d}r$$

再次积分得

$$v=\frac{r^2}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+C_1\ln r+C_2$$

由边界条件定常数 C_1，C_2

$$r=r_1 \text{ 和 } r=r_2 \text{ 时 } v=0$$

代入

$$0=\frac{r_1^2}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+C_1\ln r_1+C_2$$

$$0=\frac{r_2^2}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+C_1\ln r_2+C_2$$

联立解得

$$C_1=\frac{-1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(r_2^2-r_1^2)$$

$$C_2=\frac{-1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{4\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(r_1^2\ln r_2-r_2^2\ln r_1)$$

代回原方程，注意到$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-\frac{\Delta p}{l}$

可得

$$v=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left(\frac{r_1^2\ln r_2-r_2^2\ln r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}+\frac{r_2^2-r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln r-r^2\right)$$

此式即为式(9-48)。

取微元环形面积，有

$$\mathrm{d}q_V=2\pi r\mathrm{d}rv$$

积分此式得流量

$$q_V=\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}q_V=\frac{2\pi\Delta p}{4\mu l}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{r_1^2\ln r_2-r_2^2\ln r_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}+\frac{r_2^2-r_1^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln r-r^2\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi\Delta p}{8\mu l}\left[r_2^4-r_1^4-\frac{(r_2^2-r_1^2)^2}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\right]$$

此式即为式(9-49)。

§9-9 局部阻力与损失计算

由阻力的分类知道，当流体流经各种局部障碍(例如转弯、断面突变和各种闸门)时，液流将发生突然变形，产生阻碍流体运动的力，这种力称为局部阻力。由此引起的能量损失，称为局部损失，通常以 h_ζ 表示单位重力流体的局部损失水头。

下面分别讨论局部阻力产生的原因、计算方法以及减小措施。

1. 局部阻力产生的原因

在上述局部地区，流动遇到流道形状、大小或方向突然改变等局部阻碍时，流体中将产生涡流、液流变形、速度重新分布的加速或减速以及流体质点间剧烈碰撞的动量交换，由此引起局部阻力。下面我们以**突然扩大**、**缩小**及转弯等为例作简单说明。

图 9-26 所示为管道突然扩大时，管内流动的实际状况。可以想象，当管断面突然扩大时，由于流体的惯性作用，流体质点的运动不可能依管壁形状而突然改变运动方向，即流线只能如图所示平缓、圆滑过渡。在流束扩大部分外表面和管壁之间存在着一部分不随主流向前流动的流体。由于这部分流体中靠近主流流束表面的流体质点在粘性作用下将沿主流流动方向运动，又由于主流区流束断面不断扩大使流速逐渐降低，压强沿流动方向增加，出现正向压强梯度，随不断扩大流速的减小，离扩大起始某一距离处，边壁处受粘性作用较大的液流动能已不足于克服压差和摩阻向前，却在前后压差作用下，使该区内流体出现沿管壁逆主流方向的运动趋势，两者共同作用的结果使这部分流体不停地、剧烈地在该区内作旋涡运动，因此，这个区域常称为旋涡区。由于粘性作用，流体作旋涡运动时将消耗流动的能量，产生能量损失。旋涡区中的流体质点不断地被主流带走，而同时，随流动扩大，主流区将不断有流体逆向流入该区，这一过程势必引起撞击和摩擦损失。另外，管壁断面扩大必然引起流束的扩张，由此势必产生径向速度分量，这个分量在流束扩大完了时在碰撞的过程中消失，完成速度的重新分布，显然，这个过程也将消耗流动的能量，引起能量损失。

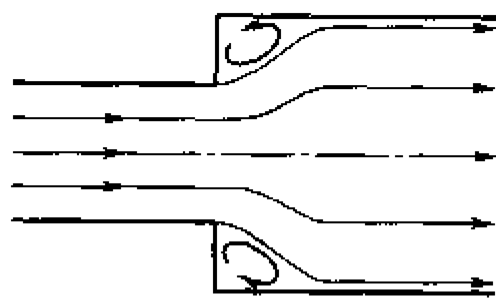


图 9-26

上述几种原因产生的能量损失集中在流体进入突然扩大管路的局部地区内，经过较短的距离以后，流动又重新稳定下来，流动所受的各种阻碍也将随

之消失。

图 9 - 27 所示为流体在突然收缩管道中的流动状态。由该图可以看出，流体在收缩部位邻近的下方将出现一个收缩的趋势，形成所谓“颈缩”现象。

显然，在这种流动情况下，将出现如图所示的两个旋涡区，上面对突然扩大流动状态的分析中的各种损失原因仍然存在于这种流动中，这是因为在收缩部分的“颈缩”及随后出现的扩大同样造成剧烈的流体质点转向、撞击和动量交换，由此引起能量损失。

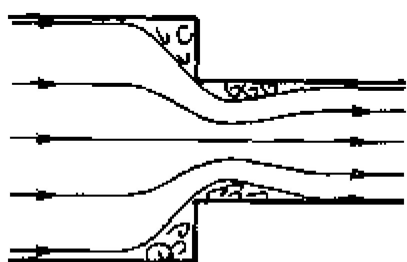


图 9 - 27

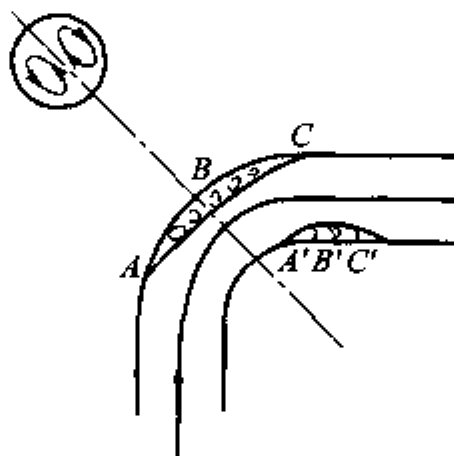


图 9 - 28

图 9 - 28 所示为流体流经弯管的流动状态。当流体进入弯管时，流线将发生弯曲，使流体质点受离心力作用压向外壁面，致使外侧压强升高，流速减小，大约在 B 点以后压强才逐渐降低直到弯管终止为止。与此对应的内侧将出现压强降低随后升高的现象。因此，在相应的 AB，$B'C'$ 区域都会因升压减速作用而出现主流脱离壁面形成旋涡区，造成旋涡损失。

流经弯管造成损失的另一个重要原因是二次流动。由于粘性作用使管壁附近的液流速度低于内部。速度之差将造成中心与外侧离心力的不同，其结果在离心力差值的作用下将流体质点压向外侧，形成如图所示的自中心向外侧的**二次流**。由上面分析 B，A' 的压差将使流体沿管壁向内侧流动而进一步促成二次流动。在径向平面内形成的这两个二次旋转运动与主流相结合便产生了双螺旋流动。这一流动的持续距离在紊流情况下将大于 100 倍管子直径，一般弯管损失的一半将由弯管后直管中的双螺旋流引起。显然，管子的弯曲半径小，内外压差将增大；管子直径大，二次流的范围会增大，其结果都将使局部能量损失增加。

图 9 - 29 所示为流经阀门的流动状态，不难看出，阀门对流动所造成损失的原因与上述几种情况类同。

由上述可见，尽管造成局部阻力的形式是各种各样的，但其产生阻力、形

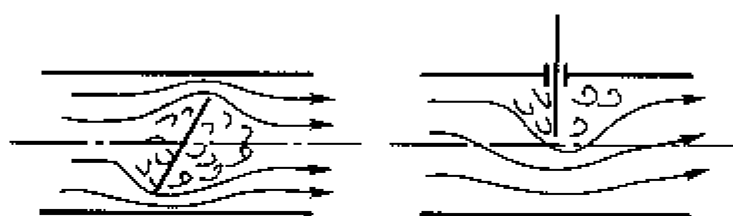


图 9-29

成能量损失的本质基本相同。由于各种局部装置和流道的变化情况不同，所引起的旋涡区大小以及速度重新分布不同，所产生的局部损失大小也不同。

2. 局部损失的计算

由上面的分析可以看出，局部阻力产生的原因是十分复杂的，因此，只有在极少数的情况下可以通过一定的假设由理论分析进行计算，而绝大多数情况下都要通过实验确定。

我们首先研究液流流过突然扩大管时的能量损失计算。这种局部损失是一种典型情况，是目前惟一可以由理论研究得出计算公式的一种局部损失。随后，根据局部损失本质相同这一特点，将得出的结论推广到其它局部损失的计算中去。

图 9-30 所示为一水平放置的突然扩大管路，管路面积分别为 A_1，A_2。取图示 1-1 和 2-2 两个过流断面，1-1 为管断面突然变化处，2-2 为流动扩大结束位置，这两个断面可看作为缓变流过流断面。设流动在 1-1 断面处流速为 V_1，压强为 p_1；在 2-2 断面处为 V_2，p_2。并设流动处于紊流阻力平方区，动能修正系数 $a=1$，由于两断面间的距离很短，沿程损失可以忽略。以轴线为基准对 1-1 和 2-2 断面列能量方程得

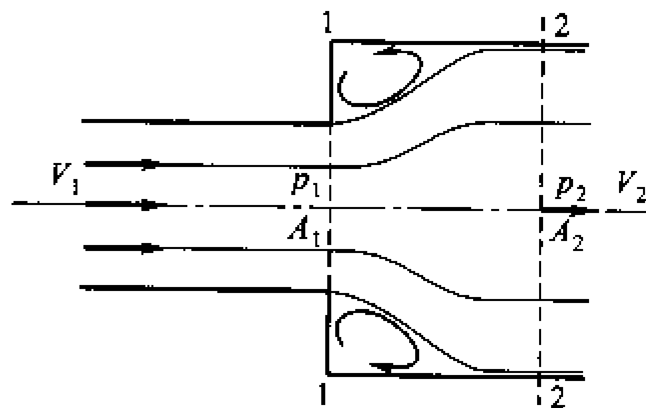


图 9-30

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+h_\zeta$$

由此得

$$h_\zeta=\frac{p_1-p_2}{\rho g}+\frac{V_1^2-V_2^2}{2g}$$

为求得 p_1-p_2，对两过流断面间的控制体列动量方程，取二断面的动量修正因数为 $\alpha_0=1$，得

$$p_1A_1-p_2A_2+p\,(A_2-A_1)=\rho q_V\,(V_2-V_1)$$

其中，$p(A_2-A_1)$为作用在涡流区流束凸肩上的压强，由实验证明，$p=p_1$。于是，上式可以写为

$$(p_1-p_2)A_2=\rho q_V(V_2-V_1)$$

或

$$p_1-p_2=\rho V_2(V_2-V_1)$$

代入能量损失表达式可得

$$h_\zeta=\frac{\rho V_2(V_2-V_1)}{\rho g}+\frac{V_1^2-V_2^2}{2g}$$

最后得

$$h_\zeta=\frac{(V_2-V_1)^2}{2g} \tag{9-57}$$

该式即为流经突然扩大圆形管路的局部水头损失计算公式，通常称为包达－卡诺(Boda－Canow)公式，式中的 V_1-V_2 为速度减小的数值，称为“损失流速”。式(9－57)说明，圆管中的流体流经突然扩大部位时其局部损失等于相应于损失流速的速度头。

为使计算进一步简化和求得其普遍形式，可用连续性方程将式(9－57)作进一步变换。

由

$$V_1A_1=V_2A_2$$

得

$$V_2=\frac{A_1}{A_2}V_1,\quad V_1=\frac{A_2}{A_1}V_2$$

代入式(9－57)得

$$h_\zeta=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\frac{V_1^2}{2g}=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2\frac{V_2^2}{2g}$$

令

$$\zeta_1=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{9-58}$$

$$\zeta_2=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2 \tag{9-59}$$

ζ_1，ζ_2 分别为按小，大截面流速计算损失的**局部损失因数**。

由此

$$h_\zeta=\zeta_1\frac{V_1^2}{2g}=\zeta_2\frac{V_2^2}{2g} \tag{9-60}$$

由式(9－58)、(9－59)和式(9－60)可以看出，局部损失因数与流动速度无关，它只取决于管道的几何形状和面积大小，一旦确定了 ζ_1 或 ζ_2 之后，只要求出某一速度就可以计算局部损失。但必须注意，所选的损失因数必须与所选的速度相对应，即若用 ζ_1 必须选用 V_1，而用 ζ_2 则必须选用 V_2。

上述推导中，假设过流断面上动量修正因数和动能修正因数均等于 1，说明在此断面上的流速分布应该是十分均匀的，通常只有在流动处于假定的阻力平方区时才接近于这种状态。上述计算公式的计算结果与实验结果很一致，说明当流体流过这种局部阻力区域时，由于所受扰动剧烈，确实已进入阻力平方区。通常，不仅在突然扩大情况下，而且在其它各种局部阻力中，损失因数大都是由其几何形状和尺寸所决定。

从对局部损失产生原因的分析可以看出，对于各种局部阻力，虽然边界条件各不相同，但产生的物理本质却大致相同。由此我们可以推论，对于一切局部阻力，水头损失的计算公式形式应该相同，即水头损失应等于局部损失因数与相应速度头的乘积

$$h_\zeta = \zeta \frac{V^2}{2g} \tag{9-61}$$

其中 ζ 仅取决于局部阻力的类型，与流动速度或雷诺数无关(阻力平方区)。由式(9－61)可知，对于局部损失的计算，取决于损失因数 ζ 的确定，对于绝大多数类型的局部阻力要借助于实验来测定。

3. 几种常用的局部阻力损失因数

实际工程中经常遇到的各种局部阻力的损失因数大都已经由实验测定，其数值和查取方法可以在各有关的手册中查取。在表 9－4 中仅介绍几种应用较普遍的局部阻力损失因数。所介绍的各损失因数值，如不加特别说明，都是对于通过阻力以后的速度水头给出的。

表 9－4　常用的局部损失因数

断面突然缩小

$$\zeta = 0.5\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$$

A_2/A_1	0.01	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
ζ	0.50	0.45	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00

A_1　A_2

逐渐扩大

$$\zeta = K\left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$$

θ	8°	10°	12°	15°	20°	25°
K	0.14	0.16	0.22	0.30	0.42	0.62

A_1　θ　A_2

续表

逐渐缩小

$$\zeta = K_1 K_2$$

θ	10°	20°	40°	60°	80°	100°	140°
K_1	0.40	0.25	0.20	0.20	0.30	0.40	0.60

A_2/A_1	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.0
K_2	0.41	0.40	0.38	0.36	0.34	0.30	0.27	0.20	0.16	0.10	0

文丘里管

d/D	0.30	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
ζ	19.0	5.3	3.06	1.9	1.15	0.69	0.42	0.26

管道入口

斜角入口

$$\zeta = 0.5 + 0.303\sin\alpha + 0.226\sin^2\alpha$$

直角入口

$$\zeta = 0.5$$

圆角入口

$$\zeta = 0.05 \sim 0.10$$

圆锥入口

θ \ ζ \ l/d	0.025	0.05	0.075	0.1	0.25	0.5
10	0.47	0.44	0.42	0.38	0.36	0.28
20	0.44	0.39	0.34	0.31	0.26	0.18
40	0.41	0.32	0.26	0.21	0.16	0.10
60	0.40	0.30	0.23	0.18	0.15	0.14
90	0.45	0.42	0.39	0.37	0.35	0.33

续表

管道出口

$$\zeta = 1$$

弯管 — 折角弯管

$$\zeta = 0.946\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2.05\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

弯管 — 圆角弯管

$$\zeta = \left[0.131 + 0.163\left(\frac{d}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{2\alpha}{\pi}$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时　$\zeta = 0.131 + 0.163\left(\frac{d}{R}\right)^{3.5}$

d/R	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ζ	0.13	0.14	0.15	0.16	0.18	0.21	0.24

d/R	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ζ	0.29	0.44	0.66	0.98	1.41	1.98

阀门 — 闸阀

开度%	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ζ	60	16	6.5	3.2	1.8	1.1	0.60	0.30	0.18	0.10

阀门 — 蝶阀

开度%	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ζ	200	65	26	16	8.3	4	1.8	0.85	0.48	0.3

阀门 — 截门

开度%	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ζ	85	24	12	7.5	5.7	4.8	4.4	4.1	4.0	3.9

续表

三通管	T形	对于等径管 分流时 $\zeta=2$ 合流时 $\zeta=3$	
	Y形	当夹角为90°时 分流时 $\zeta=1$ 合流时 $\zeta=2$	
斜角分岔		$\zeta=0.05$	
		$\zeta=0.5$	
		$\zeta=0.15$	
		$\zeta=1.0$	
		$\zeta=3.0$	

4. 减小局部损失的措施

在工程设计中，减少各种阻力是设计工作的一个重要内容，它直接涉及能源的消耗、浪费和合理使用。这里简单介绍减小局部损失的几种基本方法。当然，在实际的装置中，只能根据具体结构条件来确定减阻措施。

通常，在蒸汽和风输送管道的弯曲部分将产生较大的局部损失。可以在这里安装如图 9-31 所示的适当形状的隔流板(或称导流片)，这样既可以避免在管道弯曲的内外侧出现大范围的涡流区，也可以减小二次流的产生和影响范围。实验告诉我们，设安装导流片时直角弯头的局部损失因数为 $\zeta=1.1$，而装了月牙形导流片后其局部损失因数可降至 $\zeta=0.25$ 左右。

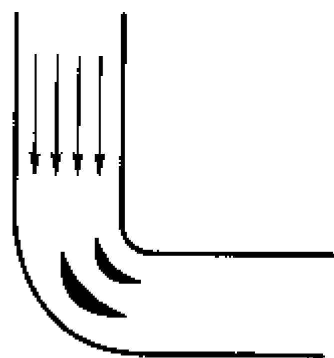


图 9-31

另外，在管路截面需要改变的位置，只要条件允许，应尽可能采用逐渐扩大或逐渐缩小来代替突然扩大和突然缩小。当我们按以下形式计算逐渐扩大能量损失时，

$$h=\varphi\frac{(V_1-V_2)^2}{2g}$$

由实验得到系数 φ 随扩散角 θ 变化曲线如图 9-32 所示，可以看出，当中心角 θ 为大约 6.5°时，φ 值最小。通常，只有当 $\theta>8°$时流动才有可能与壁面分离形成旋涡区，造成明显的能量损失。

当然，以渐变管代替突变管，必然要带来工艺、材料、设备空间等实际问题，须按不同情况具体对待。

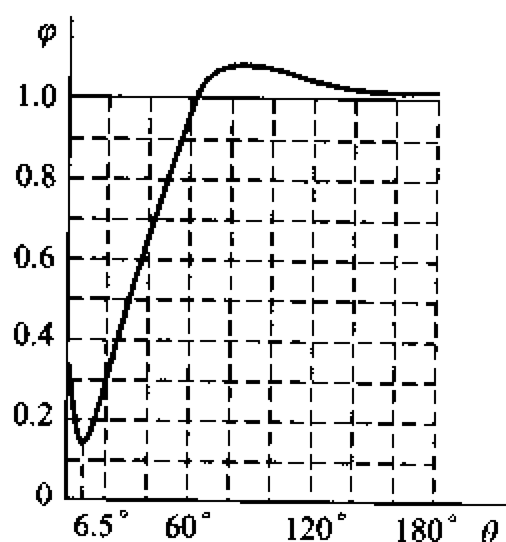


图 9-32

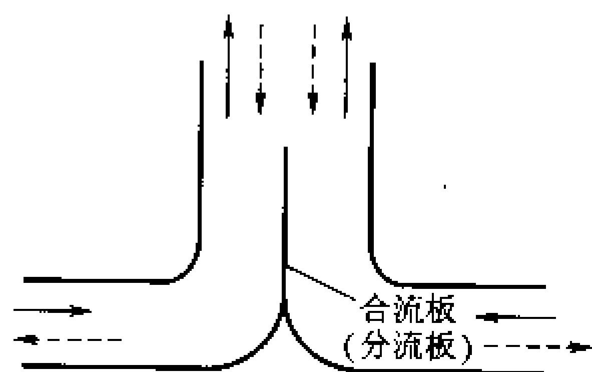


图 9-33

在常用的三通管中，适当地选装分流板或合流板(如图 9-33 所示)，也可以减小局部损失，其作用也在于减少流体质点的撞击损失和减小旋涡区的范围。

从上面分析的三种办法可以看出，减少局部损失措施的基本原则在于：尽量减小旋涡区、或防止旋涡区的形成及减少二次流动波及的范围，从而减小撞击损失和减少在速度重新分布时的动量交换。因此，在实际的设计中，可以按照这个原则采取必要的减阻措施。

§9-10 薄壁小孔口恒定自由出流

本节将利用前面讨论过的能量方程和损失计算的基本理论，推导液体流经容器壁面上**孔口**的流动计算公式。

图9-34为一个盛装液体的容器，在侧壁上开有一个直径为 d 的小孔，容器所装液体至孔口中心的深度为 H。

薄壁孔口是指当容器壁厚与所开孔口直径之比小于二分之一，即 $\delta/d<\frac{1}{2}$ 的情况。这时，由于壁较薄，其厚度对流动不产生显著影响，经过孔口的出流形成射流状态。这种孔口又称为锐缘孔口。

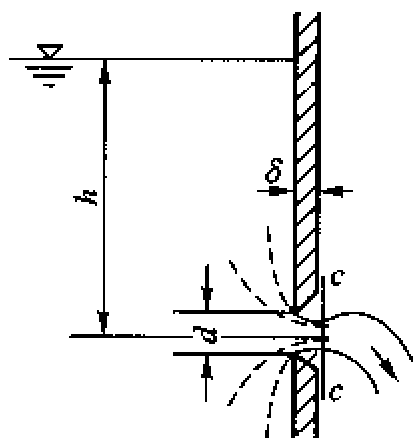


图 9-34

当水深 h 与孔径 d 之比大于10，即 $h/d>10$ 时，孔口断面上各点的参数可以看作是常数，即忽略孔口处流体势能的差别。此种孔口称为小孔口，否则称为大孔口，本节讨论仅限于小孔口的出流。

当液体自薄壁小孔口流出时，液体将由水箱内靠近孔口的四周流向孔口，由于液体流动的惯性，流线不能突然折转，因此出口后流动的射流过流断面将发生收缩(如图9-34所示)，收缩的最小断面 $c-c$ 将在离孔口大约 $d/2$ 处。在**收缩断面**处，因为流线接近于彼此平行，所以认为它是缓变流过流断面。

薄壁孔口出流出现收缩断面是它的重要特征，收缩程度通常用**断面收缩因数** ε 来表示。即

$$\varepsilon=\frac{A_c}{A} \qquad (9-62)$$

其中 A_c——收缩断面面积；

A——孔口面积。

由薄壁孔出流的形成可以看出，在这种流动过程中几乎没有沿程损失，所以我们的计算仅限于收缩时产生的局部损失。

通常，按出流下游的条件将其分为两种，当出流液体流入另一个充满液体的容器时，称为淹没出流；当液体自孔口直接流入大气时，称为自由出流。

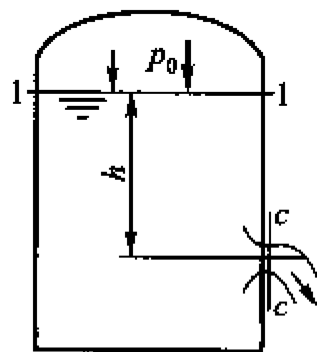


图 9-35

现在来讨论液体在不变的水头 h 作用下，自薄壁小

孔口作恒定自由出流的流动规律和计算方法。为使研究具有普遍意义，设水箱自由表面受有压强 p_0 的作用(如图 9-35 所示)。

以收缩断面 $c-c$ 的中心线为基准，对 $c-c$ 和箱内液面 1-1 列能量方程得

$$h+\frac{p_0}{\rho g}+\frac{\alpha_0 V_0^2}{2g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_c V_c^2}{2g}+h_\zeta$$

实验表明 $\alpha_0=\alpha_c=1$，因此

$$h+\frac{p_0}{\rho g}+\frac{V_0^2}{2g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{V_c^2}{2g}+h_\zeta$$

式中 $h_\zeta=\zeta_0\frac{V_c^2}{2g}$ 为流经薄壁小孔口时的能量损失，ζ_0 为出孔口流局部损失因数。

一般情况下设 $h_0=h+\frac{V_0^2}{2g}+\frac{p_0-p_a}{\rho g}$ 为出流作用水头。这样上式变为

$$h_0=\frac{V_c^2}{2g}+\zeta_0\frac{V_c^2}{2g}$$

即

$$h_0=\frac{V_c^2}{2g}(1+\zeta_0)$$

可得收缩断面流速

$$V_c=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}}\sqrt{2gh_0}$$

令

$$C_v=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_0}} \tag{9-63}$$

C_v 称为薄壁小孔口流速因数。

最后得

$$V_c=C_v\sqrt{2gh_0} \tag{9-64}$$

该式即为薄壁小孔口恒定自由出流的流速计算公式。

由式(9-64)可以求得出流流量为

$$q_V=V_cA_c=\epsilon C_vA\sqrt{2gh_0} \tag{9-65}$$

令 $C_0=C_v\varepsilon$

为薄壁小孔口**流量因数**，可得

$$q_V=C_0A\sqrt{2gh_0} \tag{9-66}$$

式(9-66)为薄壁小孔口恒定自由出流的流量计算公式。

一般情况下，容器顶部是敞开的，即 $p_0=p_a$，而且容器面积远大于孔口面积，可以认为 $V_0=0$。因此 $h_0=h$，上面的公式相应变为

$$V_c=C_v\sqrt{2gh} \tag{9-67}$$

$$q_v = C_0 A\sqrt{2gh} \tag{9-68}$$

由上面的讨论可以看出，对于薄壁小孔口出流计算，关键在于因数 ζ_0，ε，C_v，C_0 的确定。

首先分析收缩因数 ε。由定义知 $\varepsilon = A_c/A$，即为收缩最小断面与出流孔口面积的比，它直接代表孔口出流后液流的收缩程度。显然，当孔口处于容器壁不同位置时，收缩可能会出现不同的情况，即 ε 将不同，说明出流将受到容器壁的影响，这点已为实验所证实。

图 9-36 所示为位于壁面不同位置的 5 个孔，我们可以由直观的物理概念推知，这 5 个孔的出流受边壁的影响将是不同的。其中孔 1 离边壁较远，出流的收缩基本不受影响，这种收缩我们称为完善收缩。由实验得知，当孔口距边壁的尺寸大于在此方向孔口尺寸 3 倍时即可认为是完善收缩。图示其它 4 种情况的出流都将受到边壁的影响，因此我们称为不完善收缩，尤其是图中的 3，4，5 孔，由于紧靠边壁，在靠近侧面边壁处的出流将不发生收缩。

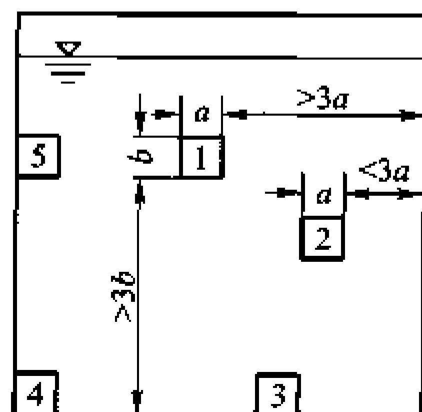


图 9-36

当孔口出流为完善收缩时，实验测得其断面收缩因数为 $\varepsilon = 0.62—0.64$。

当处于非完善收缩状态时，收缩因数可用下面的经验公式确定

$$\varepsilon = 0.63 + \left(\frac{A_0}{A}\right)^2$$

其中 A_0——孔口面积；

A——孔口所在壁面的面积(此公式多用于圆管道内隔板孔口，此时 A 为管道面积)。

流速因数 C_v 通常由实验测得，在完善收缩情况下

$$C_v = 0.97 - 0.98$$

根据流速因数，可由公式(9-63)求得小孔口损失因数为

$$\zeta_0 = \frac{1}{C_v^2} - 1 \approx 0.06$$

这里必须注意，ζ_0 是对出流收缩断面的平均流速而言。

按照 C_v 和 ε，可由式(9-65)算得在完善收缩时的流量因数

$$C_0 = C_v\varepsilon = 0.60 - 0.62$$

当流动处于不完善收缩时，流量因数可由下面的经验公式确定

$$C'_0 = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{C_0 A_0}{A}\right)^2}}$$

式中 C_0 为完善收缩时的流量因数。

综上所述，当液体经薄壁小孔口恒定自由出流时，对于完善收缩的情况，孔口的损失因数 ζ_0，流速因数 C_v，流量因数 C_0 以及断面收缩因数 ε 可以认为基本不变。

上面的讨论是对自由出流，即出流入大气的情况。对于如图 9-37 所示的淹没出流，可以用完全相同的分析，证明流量、流速计算公式全同于式(9-64)、(9-66)。而且，流量因数 C、流速因数 C_v 的数值也完全相同，不同点仅在于作用水头，对于自由出流为自由液面到孔口中心的液位高度；而对于淹没出流则指二水箱液面高之差 h。

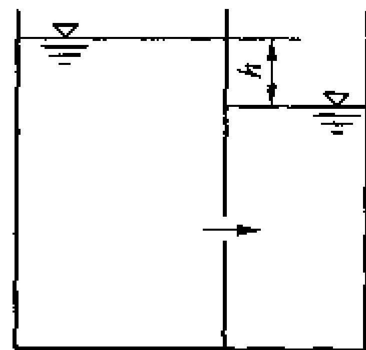


图 9-37

§9-11 圆柱外伸管嘴恒定自由出流

圆柱外伸管嘴是在上述的薄壁小孔口上安装一个长度为 $l=(3—4)d$ 的圆柱形短管(如图 9-38 所示)。相对于薄壁孔口而言，它也被称为厚壁孔口出流。

采用管嘴的主要目的在于增大流量。

管嘴中液体的流动情况与孔口出流有着明显的差别。当液体自容器进入管嘴时，由于惯性作用，首先液体发生收缩，然后在管嘴内扩大到充满管嘴流出(如图 9-38 所示)。由此可见，液体在管嘴出口处没有收缩现象，出口收缩因数 $\varepsilon=1$。而在管嘴内有一个收缩断面 $c-c$，液流在随后扩大时将出现旋涡区，常称这种收缩为内部收缩。

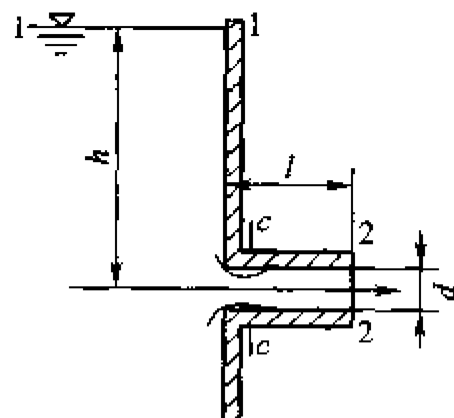


图 9-38

由上述分析可以看出，液体在管嘴内流动时，阻力将由孔口阻力、扩大和沿程阻力三部分组成，损失主要发生在收缩以后的部分。

下面，以上述分析为基础，研究和确定圆柱外伸管嘴出流的流速和流量计算公式。

在图 9-38 中，设水箱自由表面为大气压 p_a，自由表面到管嘴中心线的高度，即作用水头为 h，管嘴直径为 d，管嘴长度为 l。

以管嘴中心线为基准，对图示 1-1 和 2-2 断面列能量方程

$$h+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h_W$$

式中 h_W 表示液体流经管嘴时总的水头损失，可笼统地表示为

$$h_W = \sum\zeta \frac{V_2^2}{2g}$$

认为自由液面 1－1 为无限大，即认为 $V_1=0$，取 $\alpha_2=1$ 后，方程化为

$$h = \frac{V_2^2}{2g} + \sum\zeta \frac{V_2^2}{2g}$$

整理得

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\sum\zeta}}\sqrt{2gh}$$

取

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1+\sum\zeta}} \tag{9-69}$$

为流速因数，则

$$V_2 = C_v\ \sqrt{2gh} \tag{9-70}$$

液体自管末端流出时不产生收缩，故出流流量为

$$q_V = V_2 A = C_v A\ \sqrt{2gh}$$

或

$$q_V = C_n A\ \sqrt{2gh} \tag{9-71}$$

其中 A——管嘴截面积；

C_n——流量因数，对管嘴出流 $C_n = C_v$。

下面计算管嘴出流时的 C_v 和 C_n 值。由前面的分析知，在圆柱形外伸管嘴出流的情况下，损失由三部分组成，即损失因数也可看作由三部分组成

$$\sum\ \zeta = \zeta'_0 + \zeta_e + \lambda\ \frac{l}{d}$$

这里必须注意，上式中所有损失因数均是对出口流速而言。因此，上节中推得之 ζ_0 必须按水头损失相等的原则换算为 ζ'_0，即

$$\zeta_0 \frac{V_c^2}{2g} = \zeta'_0 \frac{V_2^2}{2g}$$

因此

$$\zeta'_0 = \zeta_0\left(\frac{V_c}{V_2}\right)^2 = \zeta_0\left(\frac{A}{A_c}\right) = \zeta_0\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

由上节分析知

$$\zeta_0 = 0.06;\ \varepsilon = 0.63$$

因此

$$\zeta'_0 = 0.06\left(\frac{1}{0.63}\right)^2 \approx 0.15$$

由突然扩大损失计算知，按扩大后的速度计算的损失因数为

$$\zeta_e = \left(\frac{A}{A_c} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{0.63}-1\right)^2\approx 0.34$$

对于扩大后的一段流动，取 $\lambda=0.02$，$l=3d$，则得

$$\lambda\frac{l}{d}=0.06$$

代入总损失因数表达式可得

$$\sum\zeta\approx 0.15+0.34+0.06\approx 0.55$$

结合实验测定，取 $\sum\zeta=0.5$

代入式(9-69)可得圆柱外伸管嘴的流速因数为

$$C_v=\frac{1}{\sqrt{1+\sum\zeta}}=\frac{1}{\sqrt{1+0.50}}\approx 0.82$$

即
$$C_n=C_v=0.82$$

比较公式(9-66)和(9-71)可以看出，在淹深和断面积相同的条件下，薄壁孔口和圆柱外伸管嘴的流量都仅取决于流量因数。由前面的分析知，对于薄壁孔 $C_0=0.61$，而对于管嘴 $C_n=0.82$，可见，管嘴的流量要大于薄壁孔口的出流量，其比值为

$$\frac{q_V}{q_{V_0}}=\frac{C_nA\sqrt{2gh}}{C_0A\sqrt{2gh}}=\frac{C_n}{C_0}=\frac{0.82}{0.61}\approx 1.34$$

既然管嘴中的损失要大于薄壁孔口，可是为什么在相同的条件下，通过管嘴的出流量反而加大了呢？下面我们从管嘴内部的流动特征进行分析。

在图9-38中，以管轴心线为基准，对1-1断面和管内收缩断面 $c-c$ 列能量方程

$$h+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_1V_1^2}{2g}=\frac{p_c}{\rho g}+\frac{\alpha_cV_c^2}{2g}+\zeta_0\frac{V_c^2}{2g}$$

取
$$V_1=0,\ \alpha_c=1$$

得
$$\frac{p_a-p_c}{\rho g}=(1+\zeta_0)\frac{V_c^2}{2g}-h$$

式中 $\frac{p_a-p_c}{\rho g}$ 为管内收缩断面的真空度，记为 h_v，即

$$h_v=(1+\zeta_0)\frac{V_c^2}{2g}-h$$

由于
$$V_c=\frac{q_V}{A_c}=\frac{A}{A_c}C_n\sqrt{2gh}=\frac{C_n}{\varepsilon}\sqrt{2gh}$$

代入上式

$$h_v=\left[(1+\zeta_0)\frac{C_n^2}{\varepsilon^2}-1\right]h$$

取各因数为

$$C_n = 0.82,\ \varepsilon = 0.63,\ \zeta_0 = 0.06$$

代入得

$$h_v = \left[(1+0.06)\left(\frac{0.82}{0.63}\right)^2 - 1\right]h$$
$$\approx 0.75h \tag{9-72}$$

由此可见，在管内流动的收缩断面上，产生一个大小取决于作用水头 h 的真空，其数值相对于 h 来看是一个较大的值，所以在管嘴出流的情况下，存在作用水头和由作用水头产生的这种真空所引起抽吸的共同作用，这种抽吸作用远大于管内各种阻力所造成的损失，因而与薄壁孔口出流相比较，加大了液体的出流量。

当然，管嘴出流流量的增加还要取决于管嘴的长度。如果管嘴太短，在管嘴起始处收缩的液流来不及扩大就已流出管外，或者此真空区已非常接近于管嘴出口端，都会使管嘴中的真空区无法建立，因而也就达不到增加流量的目的。另外，若管嘴太长，扩大后的沿程阻力损失势必增加，结果也将使流量减小。由大量的实验证明，使管嘴正常工作的长度 l 应等于直径的(3～4)倍。

在通常情况下，管内真空区的压强越低则抽吸作用越大，流量相应的就会越大。但是，这个真空度也是有一定限制的，它取决于出流液体的汽化压强。如果管中的真空值过大，使其压强低于或接近于液体的汽化压强，将使液体气化产生气体，从而破坏了液体流动的连续性。同时，外部空气在大气压强的作用下，会沿着管嘴内壁冲进管嘴，使管嘴内的液流脱离内壁，这时虽然有管嘴存在，可是出流将与薄壁孔口出流相仿，达不到增加流量的目的。对于水来说，为保证流动的连续性，防止接近汽化压强而允许的真空值不大于 7 米水柱。由此，按式(9－72)，为保证圆柱形外伸管嘴正常工作，作用水头不允许大于

$$h = \frac{7}{0.75} \approx 9\ (\text{米水柱})$$

上述是保证管嘴正常工作的必要条件，设计、选用时必须加以考虑。

在工程应用中，按具体的使用目的和要求不同，往往还采用图 9－39 所示其它几种形式的管嘴。就其流速、流量计算公式形式而言，对于各种出流形式都是一样的，所差的仅是流速因数 C_v 和流量因数 C_n 不同，这些因数的数值，当然将取决于各种管嘴的出流特性和管内的阻力情况。

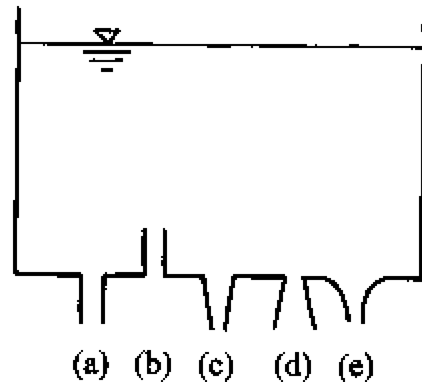


图 9－39

为选用方便起见，下面对图中所示的几种管嘴出流特性作简单介绍。

(a) 圆柱外伸管嘴。前面已作过详细讨论。

(b) 圆柱内伸管嘴。出流类似于(a)，其流动在入口处扰动较大，因此损失大于外伸管嘴。相应的流量因数、流速因数也较小，这种管嘴多用于外形需要平整、隐蔽的地方。

(c) 外伸收缩形管嘴。流动特点是在入口收缩后，不需要充分扩张，所以，其损失相应较小，因而流速因数和流量因数较大。这种管嘴多用于需要较大出流速度的地方(如消防水龙头喷嘴)。当然，由于相应的出口断面积较小，出流量并不大。

(d) 外伸扩张管嘴。流动特点是扩张损失较大，管内真空较高，流速因数和流量因数较小，管端出流速度较小，但因出口断面积大，因此流量较圆柱外伸管嘴增大。这种管嘴多用于低速，大流量的场合。

(e) 流线形外伸管嘴。显然，这种管嘴的损失最小，将具有最大的流量因数，因此出口动能最大。

为分析、比较和选用方便，在表 9－5 中列出了所讨论的薄壁孔口和各种管嘴的出流参数，选用时须注意，流速因数大的其出流速度必然大，但流量因数 C 的大小并不直接反映出流流量的大小，因为流量除与流量因数和作用水头有关外，还要取决于出口断面的面积。

表 9－5 各种管嘴参数

种 类	损失因数 ζ	收缩因数 ε	流速因数 C_v	流量因数 C_D 或 C_q
薄壁孔口	0.06	0.64	0.97	0.62
外伸管嘴	0.5	1	0.82	0.82
内伸管嘴	1	1	0.71	0.71
收缩管嘴 $\theta=13—14°$	0.09	0.98	0.96	0.95
扩张管嘴 $\theta=5—7°$	4	1	0.45	0.45
流线形管嘴	0.04	1	0.98	0.98

例 题

例 9－1 沿直径 $d=200$ mm，长 $l=3\ 000$ m 的无缝钢管($\Delta=0.2$ mm)输送密度 $\rho=900$ kg/m^3 的石油。已知流量 $q_V=27.8\times10^{-3}$ m^3/s，油的运动粘度在

冬季 $\nu_w=1.092\times10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$，夏季 $\nu_s=0.355\times10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$。试求沿程损失 h_f。

解 管中油的流速为

$$V=\frac{q_V}{\frac{\pi}{4}d^2}=0.885\ \mathrm{m/s}$$

（1）冬季

$$Re_w=\frac{Vd}{\nu_w}\approx 1\ 620<2\ 320$$

故流动处于层流状态。因此

$$\lambda_w=\frac{64}{Re_w}=\frac{64}{1\ 620}=0.039\ 5$$

$$h_{f_w}=\lambda_w\frac{lV^2}{d2g}=23.7\ \mathrm{m}\ 石油柱$$

（2）夏季

$$Re_s=\frac{Vd}{\nu_s}\approx 5\ 000>4\ 000$$

又

$$80\frac{1}{\Delta}=80\frac{d}{\Delta}=80\ 000$$

即

$$4\ 000<Re_s<80\frac{1}{\Delta}$$

所以流动处于紊流光滑管区。

在 $Re<10^5$ 时，可用布拉修斯公式

$$\lambda_s=\frac{0.316\ 4}{Re_s^{1/4}}=0.037\ 6$$

$$h_{f_s}=\lambda_s\frac{lV^2}{d\ 2g}$$

$$=22.5\ \mathrm{m}\ 石油柱$$

例 9-2 如图所示出水管路，$d_1=50$ mm，$d=70$ mm，水位高 $h=16$ m，节门损失因数 $\zeta=4.0$，水流入大气。若不计沿程损失，问流量 q_V 为多少？

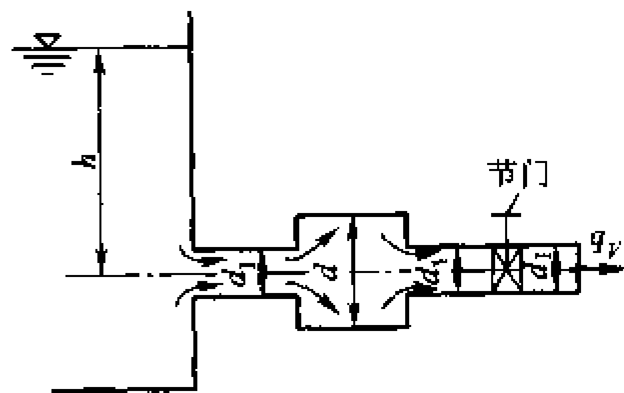
解 若忽略沿程损失，有

$$h=(1+\sum\zeta_i)\frac{V_1^2}{2g}$$

这里局部损失共有四处：

（1）入口损失 $\zeta_1=0.5$

（2）突扩损失 用突扩前速度 V_1，则



例 9-2 图

$$\zeta_2=\left(1-\frac{d_1^2}{d^2}\right)^2=0.24$$

(3) 突缩损失　$\zeta_3=0.5\left(1-\frac{d_1^2}{d^2}\right)=0.245$

(4) 节门损失　$\zeta=4.0$

所以　$\sum\zeta_i=\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta$

$=4.985$

因此

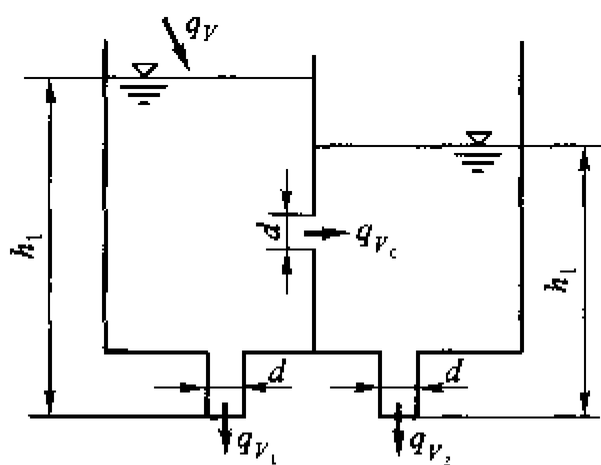
$$V_1=\sqrt{\frac{2gh}{1+\sum\zeta_i}}$$

$$q_V=\frac{\pi}{4}d_1^2V_1$$

$$=\frac{\pi}{4}d_1^2\sqrt{\frac{2gh}{1+\sum\zeta_i}}$$

$$=0.014\ 2\ \mathrm{m^3/s}$$

例 9－3　图示水箱中用一带薄壁孔口的板隔开。已知孔口及二出流管嘴直径相等，均为 $d=100$ mm，流入左侧水箱的流量 $q_V=80$ l/s，试求二管嘴流出的流量 q_{V_1} 及 q_{V_2}。



例 9－3 图

解　设 h_1 和 h_2 分别为左、右两侧水箱的水位高度，如图所示。则由管嘴及孔口出流公式，有

$$q_{V_1}=C_nA\sqrt{2gh_1}\qquad\text{(a)}$$

$$q_{V_2}=C_nA\sqrt{2gh_2}\qquad\text{(b)}$$

$$q_{V_0}=C_0A\sqrt{2g(h_1-h_2)}\qquad\text{(c)}$$

式中　C_n 为管嘴流量因数，取 $C_n=0.82$

C_0 为孔口流量因数，取 $C_0=0.62$

A 为管嘴和孔口的断面积　$A=\frac{\pi}{4}d^2$

而对不变水头 h_1 及 h_2，有连续性方程

$$q_V=q_{V_1}+q_{V_2}\qquad\text{(d)}$$

$$q_{V_0}=q_{V_2}\qquad\text{(e)}$$

由式(e)及(b)、(c)，得

$$C_n A\sqrt{2gh_2}=C_0 A\sqrt{2g(h_1-h_2)}$$

即
$$h_1=\left[1+\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^2\right]h_2$$

代入式(a)，有

$$q_{V_1}=C_n A\sqrt{2gh_2\left[1+\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^2\right]} \tag{f}$$

将式(f)、(b)代入式(d)，有

$$q_V=C_n A\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^2}\right]\sqrt{2gh_2}$$

即
$$\sqrt{2gh_2}=\frac{q_V}{C_n A\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^2}\right]}$$

代回式(b)

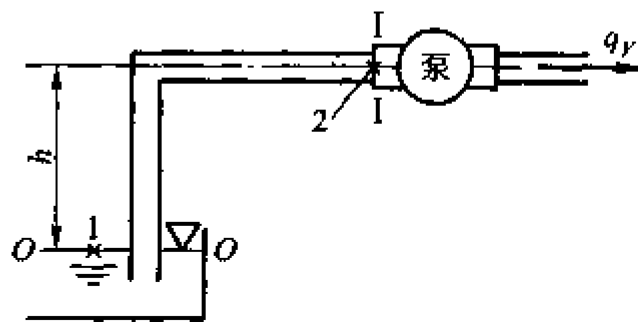
$$q_{V_2}=C_n A\frac{q_V}{C_n A\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^2}\right]}$$

$$=\frac{q_V}{1+\sqrt{1+\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^2}}$$

$$=30\times10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

$$q_{V_1}=q_V-q_{V_2}=50\times10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

例9-4 齿轮泵由油箱吸取液压油，已知流量 $q_V=1.2\times10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$，油的运动粘度 $\nu=4\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$，相对密度 $d=0.9$，吸油管长 $l=10$ m，管径 $d_1=40$ mm。若油泵进口最大允许真空度 $p_V=25$ kPa，求油泵允许的安装高度 h。



例9-4图

解 取如图 $O-O$、Ⅰ-Ⅰ断面，列能量方程

$$0+0+0=h+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}+h$$

$$h=-\frac{p_2}{\rho g}-\frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}-h$$

为确定 α_2、h，需先判断流态

$$Re = \frac{Vd_1}{\nu} = \frac{4q_V}{\pi \nu a}$$

$$\approx 955 < 2\ 320$$

故流态为层流，$\alpha_2 = 2$，$h = 64lV^2/Re \cdot d_1 \cdot 2g$。

另需将真空度 p_V 变为油柱高，并注意到以表压力表示 p_2，可得

$$\frac{p_2}{\rho g} \approx 2.778 \text{ m 油柱}$$

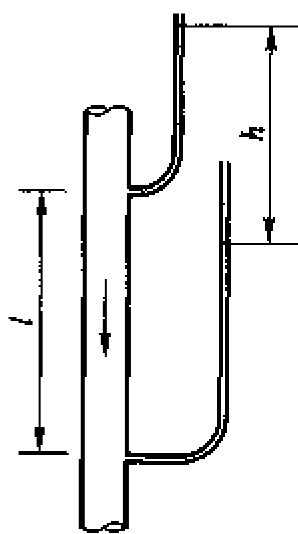
所以允许安装高度不能大于

$$h = -\frac{p_2}{\rho g} - \frac{\alpha_2}{2g}\left(\frac{q_V}{\frac{\pi}{4}d_1^2}\right)^2 - \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{1}{2g}\left(\frac{q_V}{\frac{\pi}{4}d_1^2}\right)^2$$

$$\approx 1.85 \text{ m}$$

习　题

9－1　水在垂直管内由上向下流动，相距 l 的两断面间，测压管水头差 h，两断面间沿程水头损失 h_f，则：(a) $h_f = h$；(b) $h_f = h + l$；(c) $h_f = l - h$。



题 9－1 图

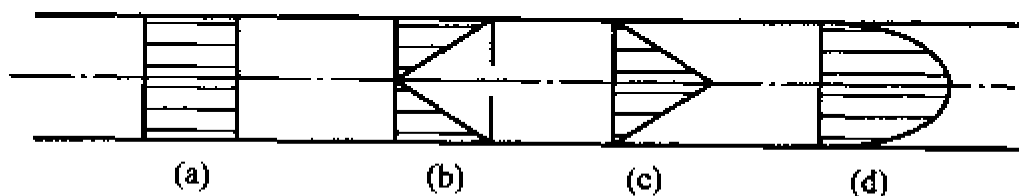
9－2　圆管流动过流断面上的切应力分布为：(a) 在过流断面上是常数；(b) 管轴处是零，且与半径成正比；(c) 管壁处是零，向管轴线性增大；(d) 按抛物线分布。

9－3　在圆管流动中，紊流的断面流速分布符合：(a) 均匀规律；(b) 直线变化规律；(c) 抛物线规律；(d) 对数曲线规律。

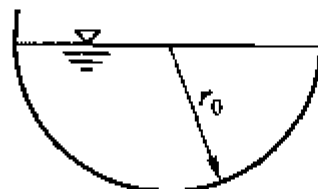
9－4　在圆管流动中，层流的断面流速分布符合：(a) 均匀规律；(b) 直线变化规律；(c) 抛物线规律；(d) 对数曲线规律。

9－5　半圆形明渠，半径 $r_0 = 4$ m，水力半径为：(a) 4 m；(b) 3 m；(c) 2 m；(d) 1 m。

9－6　变直径管流，细断面直径 d_1，粗断面直径 $d_2 = 2d_1$，粗细断面雷诺数的关系是：(a) $Re_1 = 0.5Re_2$；(b) $Re_1 = Re_2$；(c) $Re_1 = 1.5Re_2$；(d) $Re_1 = 2Re_2$。



题 9－2 图



题 9－5 图

9－7　圆管层流，实测管轴线上流速为 4 m/s，则断面平均流速为：(a) 4 m/s；(b)

3.2 m/s；(c) 2 m/s。

问答题：

9-8 试比较圆管中层流和紊流的特性，并根据相似理论的概念说明判别流态的标准。

9-9 能量损失主要有几种形式？产生各种能量损失的物理原因是什么？

计算题：

9-10 直径为 15 mm 的圆管，流体以速度 14 m/s 在管中流动，试决定流动状态。若要求保证为层流，则最大允许速度为多少？设流体为：(1) 润滑油($\nu_1 = 1.0 \times 10^{-4}\ m^2/s$)；(2) 汽油($\nu_2 = 0.884 \times 10^{-6}\ m^2/s$)；(3) 水($\nu_3 = 1 \times 10^{-6}\ m^2/s$)；(4) 空气($\nu_4 = 1.5 \times 10^{-5}\ m^2/s$)。

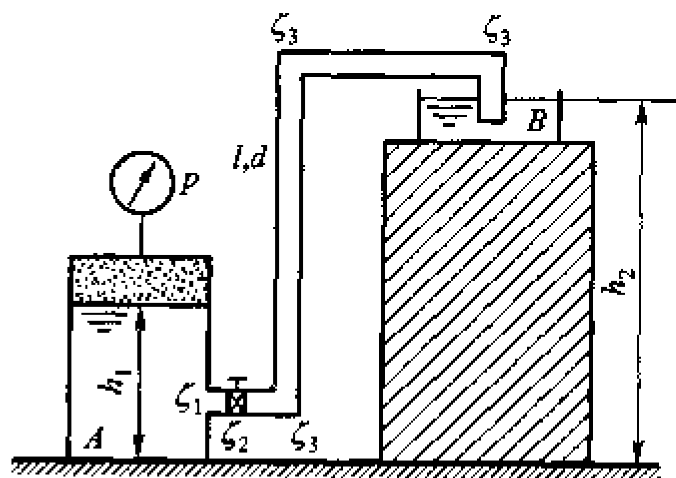
9-11 具有 $\mu = 4.03 \times 10^{-3}$ Pa·s，$\rho = 740\ kg/m^3$ 的油液流过直径为 2.54 cm 的圆管，平均流速为 0.3 m/s。试计算 30 m 长度管子上的压强降，并计算管内距内壁 0.6 cm 处的流速。

9-12 某种具有 $\rho = 780\ kg/m^3$，$\mu = 7.5 \times 10^{-5}$ Pa·s 的油，流过长为12.2 m，直径为 1.26 cm 的水平管子。试计算保持管子为层流的最大平均流速，并计算维持这一流动所需要的压强降。若油从这一管子流入直径为 0.63 cm，长也为 12.2 m 的管子，问流过后一根管子时的压强降为多少？

9-13 30 ℃的水流过直径 $d = 7.62$ cm 的钢管($\Delta = 0.08$)，每分钟流量为 0.340 m^3。求在 915 m 长度上的压强降。当水温下降至 5 ℃时，情况又如何？已知 30 ℃时水的 $\nu = 0.8 \times 10^{-6}\ m^2/s$，$\rho = 995.7\ kg/m^3$，5 ℃时水的 $\nu = 1.519 \times 10^{-6}\ m^2/s$，$\rho = 1\ 000\ kg/m^3$。

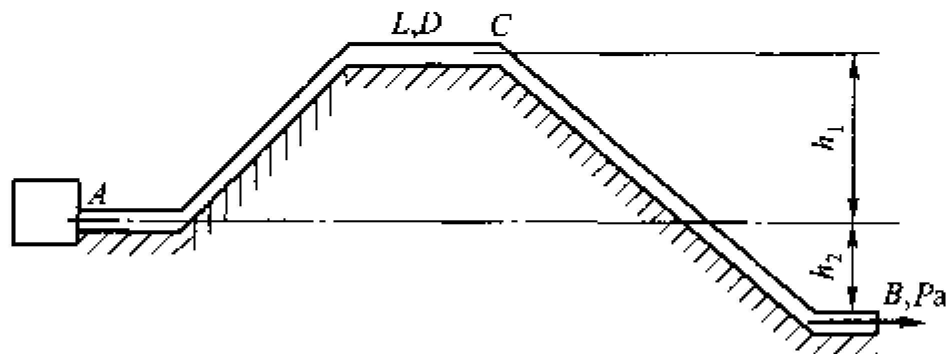
9-14 油的 $\rho = 780\ kg/m^3$，$\mu = 1.87 \times 10^{-3}$ Pa·s，用泵输送通过直径 $d = 30$ cm，长为 6.5 km 的油管，管子内表面的绝对粗糙度 $\Delta = 0.75$ mm，流量 $q_V = 0.233\ m^3/s$，试求压强降。又当泵的总效率为 75%时，问泵所需功率为若干？

9-15 水沿直径 $d = 25$ mm，长 $l = 10$ m 的管子，从水箱 A 流到储水箱 B。若水箱中表压强 $p = 1.96 \times 10^5$ Pa，$h_1 = 1$ m，$h_2 = 5$ m，管子的入口损失因数 $\zeta_1 = 0.5$，闸门的损失因数 $\zeta_2 = 4$，弯头 $\zeta_3 = 0.2$，沿程损失因数 $\lambda = 0.03$，试求水的流量。



题 9-15 图

9-16　石油($d=0.9$, $\nu=1.3\ cm^2/s$)沿长 $L=3\ 600$ m，直径 $D=100$ mm 的输油管由 A 到 B，已知 $L_{AC}=L_{CB}=\frac{L}{2}=1\ 800$ m，$h_1=90$ m，$h_2=22$ m，流量 $q_1=1\ 350\ m^3$/昼夜。试确定：(1) A 点的压强；(2) C 点的压强　不计弯管的损失。

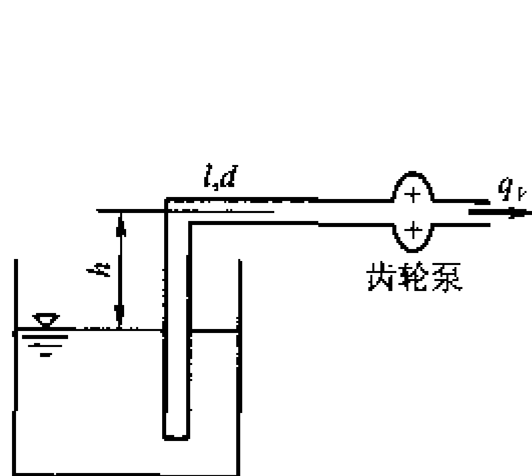


题 9-16 图

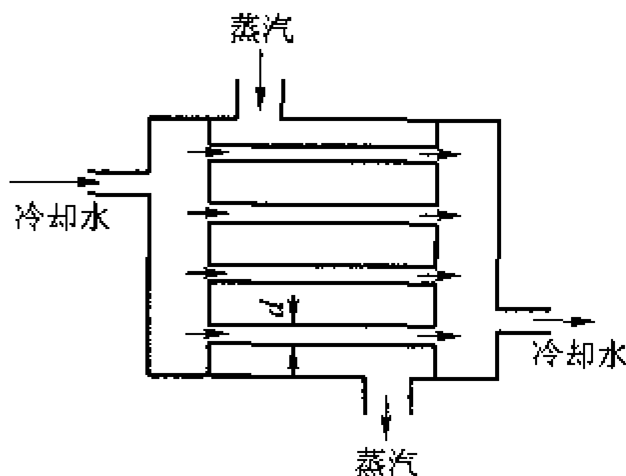
9-17　齿轮泵从一个大容积的贮油池中吸取润滑油，其流量 $q_v=1.2\times10^{-3}\ m^3/s$，运动粘度 $\nu=2.92\times10^{-4}\ m^2/s$，密度 $\rho=900\ kg/m^3$。试确定：

(1) 在贮油池中油面以上的泵位置的最大允许高度 h。设油中最轻分馏物的饱和蒸气压为 2.3 m 水柱，大气压为 0.98×10^5 Pa，吸油管长 $l=10$ m，直径 $d=40$ mm，仅考虑管中沿程损失。

(2) 若将油泵的供油能力增加一倍时，极限吸出高度将如何变化？



题 9-17 图



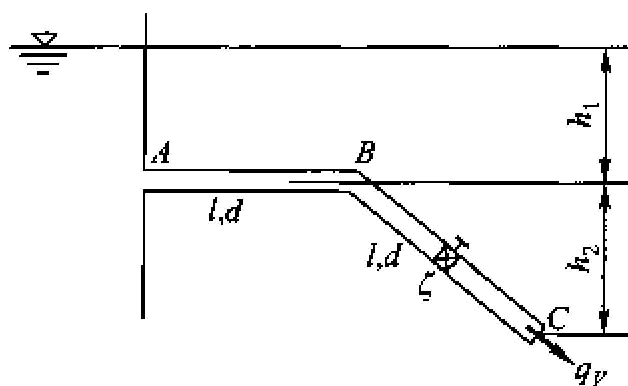
题 9-18 图

9-18　一蒸汽冷凝器，内有平行的黄铜管 250 根，通过冷却水总流量为 80 l/s，水温平均为 10 ℃，$\nu=1.31\times10^{-6}\ m^2/s$，为保证在黄铜管内产生紊流，要求管中 Re 数不得小于 15 000，问黄铜管的内径不得超过多大？

9-19　烟囱直径 $d=1$ m，烟气质量流量 $q_m=18\ 000$ kg/h，烟气密度 $\rho_1=0.7\ kg/m^3$，外界大气密度 $\rho_2=1.29\ kg/m^3$，烟道 $\lambda=0.035$，为要保证烟囱底部断面上有 100 Pa 的负压，烟囱应有多高？

9-20　水由具有固定水位的贮水池中沿直径 $d=100$ mm 的输水管流入大气，管路是由同样长度 $l=50$ m 的水平管段 AB 和倾斜管段 BC 组成，$h_1=2$ m，$h_2=25$ m，试问为了使

输水管 B 处的真空不超过 7 m 水柱时，阀门的损失因数 ζ 应为多少？此时流量 q_V 为多少？取 $\lambda=0.035$，不计弯曲处损失。

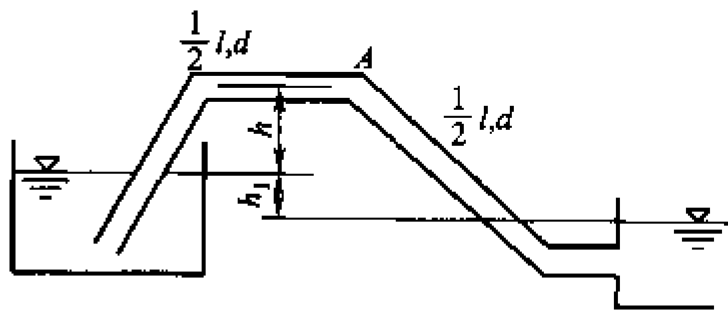


题 9－20 图

9－21 要求保证自流式虹吸管中液体流量 $q_V=10^{-3}\ m^3/s$，只计沿程损失，试确定：

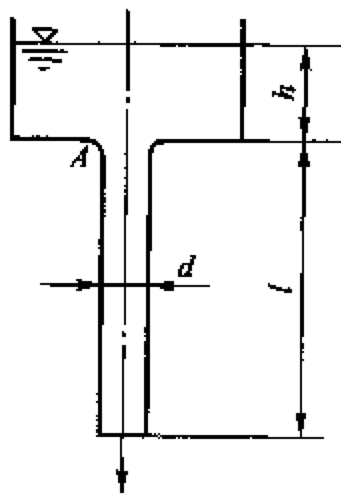
（1）当 $h_1=2$ m，$l=44$ m，$\nu=10^{-4}\ m^2/s$，$\rho=900\ kg/m^3$ 时，为保证层流，d 应为多少？

（2）若在距进口 $l/2$ 处 A 断面上的极限真空为 $p_v=5.4$ m 水柱，输油管在上面贮油池中油面以上的最大允许超高 h_{max} 为多少？

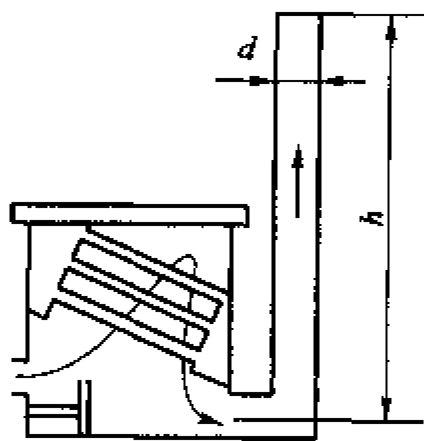


题 9－21 图

9－22 水从水箱沿着高 $l=2$ m 及直径 $d=40$ mm 的铅垂管路流人大气，不计管路的进口损失，取 $\lambda=0.04$，试求：



题 9－22 图



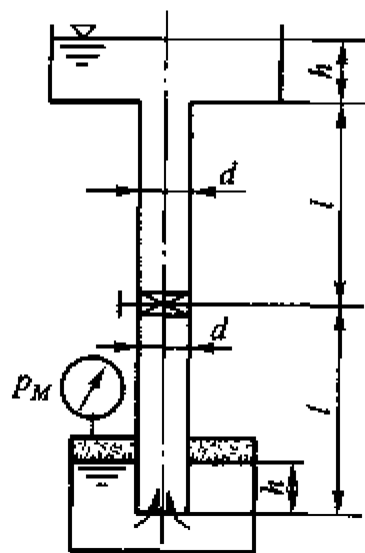
题 9－23 图

(1) 管路起始断面 A 的压强与箱内所维持的水位 h 之间的关系式，并求当 h 为若干时，此断面绝对压强等于 1 个大气压。

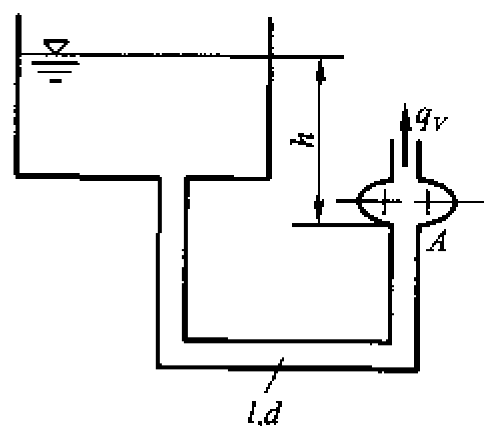
(2) 流量和管长 l 的关系，并指出在怎样的水位 h 时流量将不随 l 而变化。

9－23　一自然通风锅炉，烟囱直径 $d=1$ m，沿程损失因数 $\lambda=0.04$，烟囱高度 $h=38$ m。当烟囱底部要求为 20 mm 水柱负压时，烟气流量有多少？设空气 $\rho_a=1.22\ \mathrm{kg/m^3}$，烟气 $\rho=0.61\ \mathrm{kg/m^3}$。

9－24　依靠在下面密闭水箱内的相对压强 p_M，水沿铅垂管路（$d=25$ mm，$l=3$ m，$h=0.5$ m）供到上面开敞水箱中，阀门全开时损失因数 $\zeta=9.3$，设管内粗糙度 $\Delta=0.2$ mm，试确定当流量 $q_V=4$ l/s 时的压强 p_M（水温为 20 ℃，此时 $\nu=1.003\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$）。



题 9－24 图



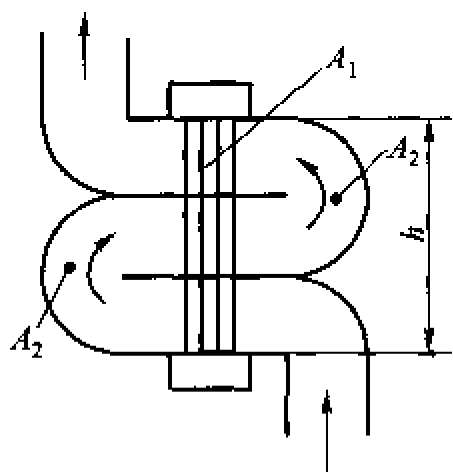
题 9－25 图

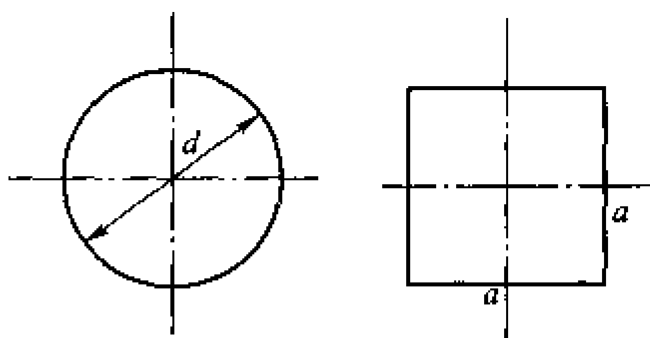
9－25　润滑系统的齿轮泵在温度 $t=20$ ℃时，供给 $q_V=10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$ 的机械油（运动粘度 $\nu=2\times10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$，相对密度 $d=0.9$）。吸油钢管长 $l=5$ m，直径 $d=35$ mm，粗糙度 $\Delta=0.1$ mm。泵的进口 A 在油箱自由液面以下 $h=1$ m 处，试确定 A 处的压强。如果油的温度升高到 $t=80$ ℃（$\nu=10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$，$d=0.85$），试问此时 A 处压强如何？设管路的局部损失为沿程损失的 10%。

9－26　自鼓风机站供给高炉车间的空气量为 $q_V=1.2\times10^5\ \mathrm{m^3/h}$，空气温度 $t=20$ ℃，运动粘度 $\nu=1.57\times10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$，输气管总长 $l=120$ m，其上共有九个圆滑 90°弯管，其中五个弯曲半径为 $R=2.6$ m，另四个弯曲半径为 $R_2=1.3$ m，还有两个闸门，其局部损失因数均为 $\zeta=2.5$。管壁的绝对粗糙度 $\Delta=0.5$ mm。设输气管中空气的流速为 $V=25$ m/s，而热风炉进口处的表压强 $p_e=156\ 896$ Pa。试求输气管所需的管径 d 和鼓风机出口处的压强 p_1。（不计高度差）。

9－27　在图示三路管状空气预热器中，将流量 $q_m=1.615$ kg/s 的空气从 $t_1=20$ ℃加热到 $t_2=160$ ℃。预热器高 $h=4$ m，预热器管系的损失因数 $\zeta=6$（对管内平均流速而言），管系的截面积 $A_1=0.4\ \mathrm{m^2}$，连接箱的截面积 $A_2=0.8\ \mathrm{m^2}$，拐弯处曲率半径和管径的比值 $R/d=1$。设沿程损失不计，试按空气的平均温度计算流经空气预热器的损失。

9－28　当通过相同的流量时，试比较在相同长度和相等断面积的圆管和方管的摩擦





题 9－27 图

题 9－28 图

损失水头。假设流动为(1) 层流；(2) 紊流(阻力平方区)。设管壁粗糙度相同。

提示：(1) 方管层流时可用 $\lambda=\frac{56.9}{Re}$，$Re=\frac{Dv}{\nu}$，其中 D 为水力直径。

(2) 在紊流阻力平方区，圆管和方管均可近似用 $\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{D}\right)^{0.25}$。

9－29 用长为 l 的圆钢管输送液体，试确定：

(1) 当管子两端压差保持不变时，管径减少 1% 会引起流量减少百分之几？

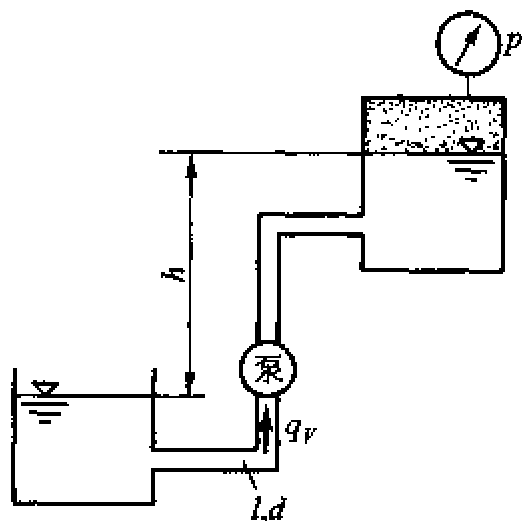
(2) 当流量保持不变时，管径减小 1% 会引起两端压差增加百分之几？

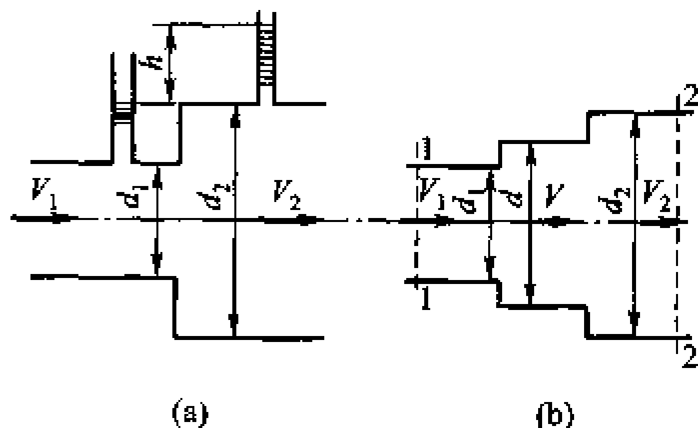
设沿程损失因数 λ 为常数。

9－30 油泵从开口油池中将油送到表压强为 $p=0.981\times10^5$ Pa 的油箱中。已知：油泵流量 $q_t=3.14$ l/s，油泵总效率 $\eta=0.8$，油的密度 $\rho=800$ kg/m^3，运动粘度 $\nu=1.25$ cm^2/s，油管直径 $d=2$ cm，长度 $l=2$ m，总局部损失系数 $\sum\zeta=2$，油面高度差 $h=3$ m。试确定油泵的功率 P。

9－31 用突然扩大使管道的平均流速从 V_1 减到 V_2。

(1) 如图 a 所示，如果 d_1 及 V_1 一定，试求使测压管液柱差 h 成为最大值时的 V_2 及 d_2 为若干？并求 h_{max} 是多少？



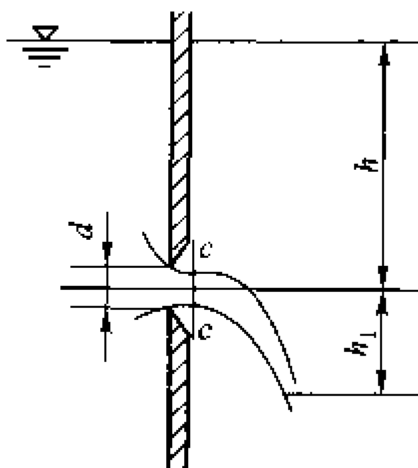


题 9－30 图

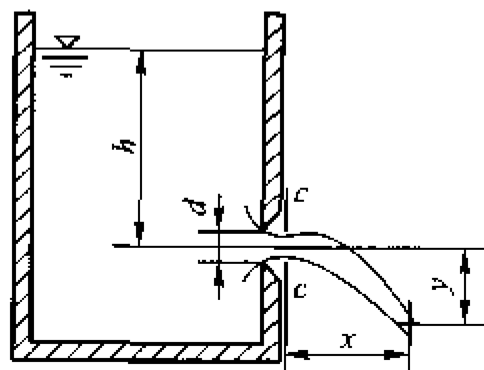
题 9－31 图

（2）如图 b 所示，如果用两个突然扩大，使 V_1 先减到 V 再减到 V_2。试求使 1－1、2－2 断面间的局部水头损失 h_ζ 成为最小值时的 V 及 d 为若干？并求 $h_{\zeta min}$ 是多少？

9－32　如图所示，水从水槽壁上 $d = 4$ cm 的圆孔流出，水面在孔中心线以上 $h = 2.5$ m 处，试求水流在收缩断面 $c-c$ 处的流速和流束直径。在 $h_1 = 2.5$ m 处，流速和流束直径为若干？



题 9－32 图

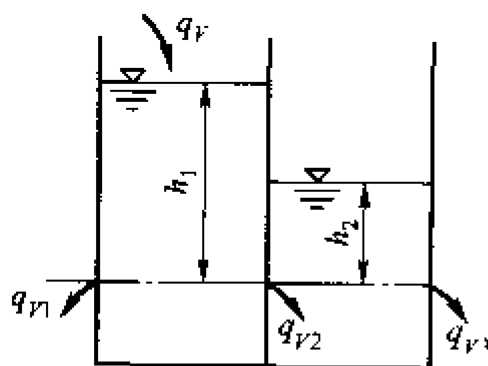


题 9－33 图

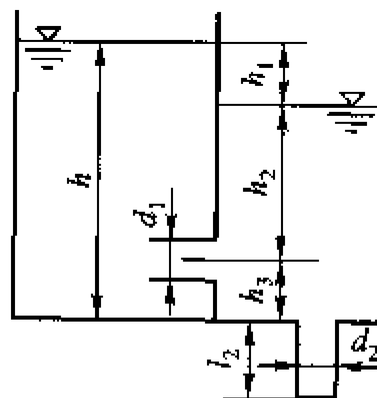
9－33　用射流轨迹法测量孔口因数的装置如图。圆孔直径 $d = 10$ mm，自由液面在孔上 $h = 2$ m 处。测得流量 $q_V = 0.294$ L/s，流束某一断面中心坐标 $x = 3$ m，$y = 1.2$ m，试确定此圆孔的流量因数 C_0，流速因数 C_v、收缩因数 ε 和损失因数 ζ_0。

9－34　一水箱由带有一小孔口的隔板隔开，水箱左右两侧各有一小孔口，由外部供给水箱左侧固定流量 q_V。设隔板上及水箱两侧的小孔均在同一水平面上，且面积和流量因数分别均为 A 和 C_0。求恒定时隔板两侧水面之高度 h_1 和 h_2。

9－35　有一水箱，用板将其分为两部分，该板上开有直径 $d_1 = 4$ cm 的薄壁孔口，其流量因数 $C_{01} = 0.62$。在右侧底部有一管嘴，长 $l_2 = 10$ cm，直径 $d_2 = 3$ cm，$C_{02} = 0.82$，已知 $h = 3$ m，$h_3 = 0.5$ m，若系统保持恒定流动，试求 h_1，h_2 及流量 q_V 各为若干？



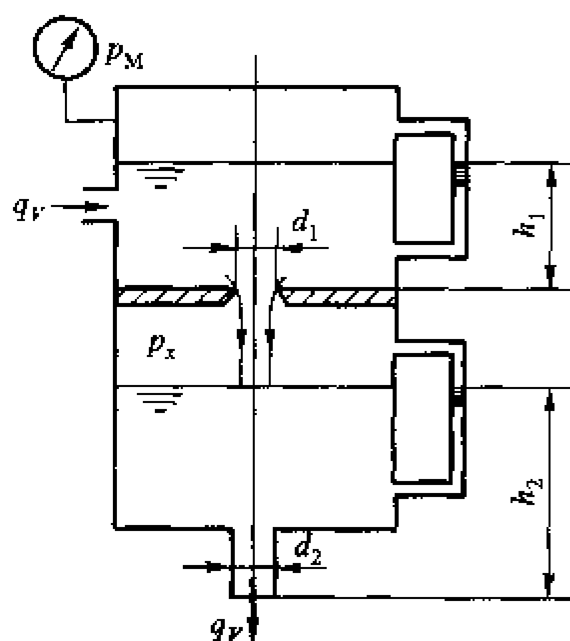
题 9－34 图



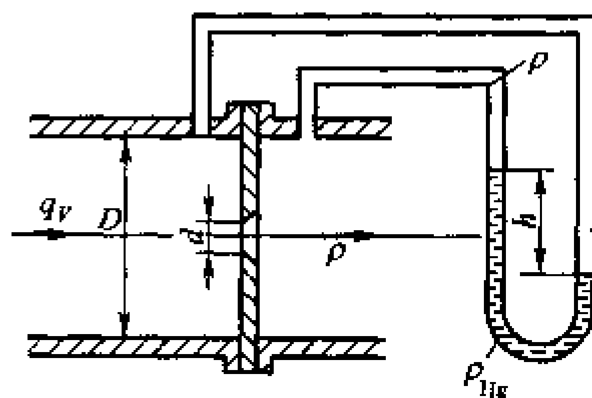
题 9－35 图

9－36　水从封闭水箱的上部经直径 $d_1 = 30$ mm 的孔口流入下部，然后经 $d_2 = 20$ mm 的圆柱形管嘴流入大气。当处于恒定状态时压强计读数 $p_M = 4.9 \times 10^4$ Pa，玻璃测管内的水位

$h_1 = 2$ m，$h_2 = 3$ m，孔口和管嘴的流量因数分别为 $c_{01} = 0.62$，$c_{n2} = 0.82$，试求下部水箱水面上的压强 p_x 及流量 q_1。



题 9-36 图



题 9-37 图

9-37 孔板流量计是将一直径 $d = 100$ mm 的孔口置于直径为 D 的管道中组成的，设 $D \gg d$，孔口流量因数 $C = 0.65$，两侧压差由水银压差计测出($d_{Hg} = 13.6$)。设管中油的相对密度 $d = 0.9$，且测压管中水银之上部分均被油所充满，当 $h = 760$ mm 时，流量 q_V 为多少？

第10章 管路的水力计算

本章讨论管路(系统)的水力计算和设计问题。本章讨论的内容对给排水系统、供油系统等实际工程具有重要意义。

在前面的基础理论部分，我们系统地研究了流动的连续性方程、动量方程、实际流体流动的能量方程和方程中能量损失项的计算方法，这些研究工作为管路的设计和计算奠定了理论基础。

这里我们将主要讨论恒定流动。为研究方便起见，设能量方程中的动能修正因数 $\alpha=1$。

本章首先讨论管路系统的分类，然后按不同类型分别研究其计算和设计方法。

§10-1 管路系统的分类

1. 按能量损失的类型分类

(1) 长管：凡局部损失和出流的速度水头之和与其沿程损失相比较小(通常以小于百分之五为界限)，这样的管路系统称为**水力长管**，或简称长管。在这类管路计算中，通常只计沿程损失，忽略局部损失和出流速度水头。

(2) 短管：所谓短管又称为**水力短管**，是指沿程损失、局部损失等项大小相近，均须计及的管路系统。

2. 按组成结构分类

(1) **简单管路**：通常将等径、无分支管路系统称为简单管路，如图 *10-1a* 所示。

(2) **复杂管路**：除简单管路而外的管路系统统称为复杂管路。按管路组合

形式、出流情况等，复杂管路通常又分以下四种类型。

(a) 串联管路：**串联管路**系指不同直径管段彼此首尾相接所组成的管路系统，如图 10-1b 所示。

(b) 并联管路：**并联管路**指有共同的起始及汇合点(通常称之为节点)的管段所组成的管路系统，如图 10-1c 所示。

(c) **枝状管路**：如图 10-1d 所示，在枝状管路中，各不同的出流管段在不同位置分流。显然，在给排水工程中多属枝状管路。

(d) **网状管路**：如图 10-1e 所示，在网状管路中，不同管段组成网状的不规则输送系统。

由以上分类可以看出，管路系统很类似于电路系统，计算特征也类同于电路。

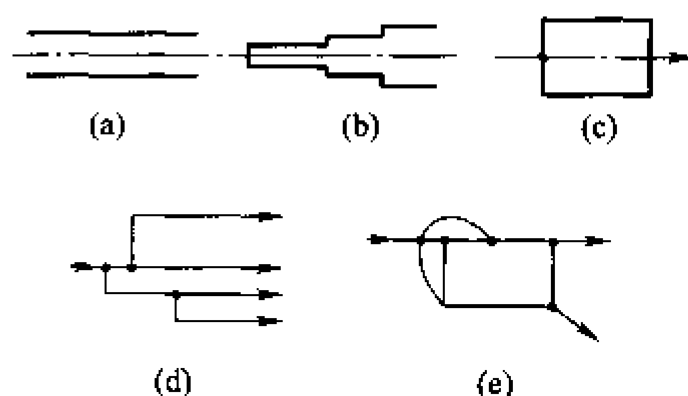


图 10-1

管路水力计算的目的在于设计合理的管路系统，尽量减少动力消耗，节约能源，最大限度地节省原材料、降低成本。因此，应计算确定流量、管道几何尺寸和流动损失之间的定量关系。通常将在工程中所遇到的问题分为以下三类。

(1) 已知所需的流量 q_V 和已有的管道尺寸 l，d，计算压力降 Δp 或确定所需的供液水头。

(2) 已知管道的尺寸 l，d，供液水头 h，或允许的压降 Δp，确定实际可以获得的流量 q_V。

(3) 按照所需要的流量 q_V 和实际具有的作用水头 h，计算所必须的管道尺寸 d(在这种情况下，往往长度 l 是预先给定的)。

显然，结构不同的管路计算方法也是不同的，下面分别予以讨论。

§10-2 管路的水力计算

一、等径无分支管路的水力计算

等径无分支短管和长管等简单管路的水力计算是管路系统水力计算的基础。

在短管的水力计算中应包括沿程损失、局部损失和出流的速度水头。现以

图 10－2 所示的等径管路为例，说明短管的水力计算方法。

首先，假设液体自管端流入大气，即自由出流。

以图示 0－0 为基准，对自由液面 1－1 和出流端面 2－2 列能量方程

$$h+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+h_W$$

因液体自大容器流入管道，所以 $V_1=0$，因此方程变为

$$h=\frac{V_2^2}{2g}+h_W$$

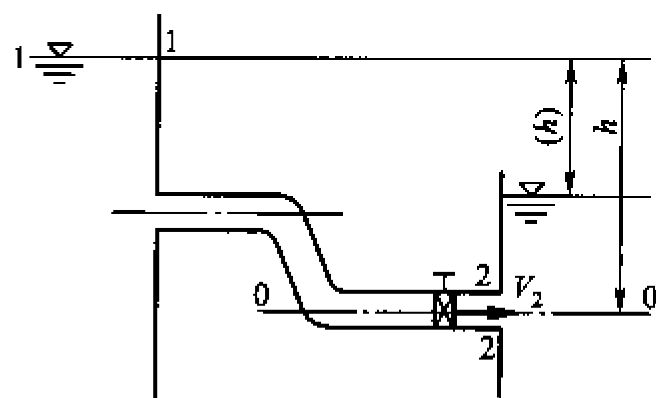


图　10－2

显然，问题的关键在于确定和计算 h_W，在等径管中，液体在各处的流速相等，因此

$$\begin{aligned}h_W&=\sum\lambda_i\frac{l_iV_2^2}{d2g}+\sum\zeta_j\frac{V_2^2}{2g}\\&=\left(\sum\lambda_i\frac{l_i}{d}+\sum\zeta_j\right)\frac{V^2}{2g}\end{aligned}$$

其中，j 包括容器出口，两个 90°转弯和控制闸门四个部位。i 包括各部分直管，因为是等径管，也可以用总计管长代替。代入能量方程可得

$$h=\left(1+\sum\lambda_i\frac{l_i}{d}+\sum\zeta_j\right)\frac{V^2}{2g}$$

令

$$\zeta_s=\sum\lambda_i\frac{l_i}{d}+\sum\zeta_j$$

则

$$h=(1+\zeta_s)\frac{V^2}{2g}=(1+\zeta_s)\frac{16q_V^2}{\pi^2d^4}\frac{1}{2g}$$

或

$$h=0.082\,7\,(1+\zeta_s)\frac{q_V^2}{d^4}\tag{10－1}$$

对于非自由出流，即自管端出流入另一个大容器时，计算方法与前面相同，此时的作用水头为二液面的位置高差，在损失项 h_W 的计算中，应包括自管路流入大容器的出口损失。

对于不等径的短管计算，只须以直径的换算关系将流速统一即可。

在长管水力计算中，$\sum h_\zeta$ 和出流 $V^2/2g$ 忽略不计，于是

$$h=\lambda\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}=\lambda\frac{l}{d}\frac{16q_V^2}{\pi^2d^4}\frac{1}{2g}=0.082\,7\lambda l\frac{q_V^2}{d^5}\tag{10－2}$$

或

$$h=\frac{lq_V^2}{K^2}\tag{10－3}$$

式中 $K=\sqrt{\dfrac{g\pi^2 d^5}{8\lambda}}$，称为流量模数，$K$ 具有流量的量纲 m^3/s。由式(10－3)得

$$q_V = K\sqrt{\frac{h}{l}} \tag{10-4}$$

式中 h/l 表示单位长管上的作用水头，称为水力坡度。K 的物理意义是水力坡度为 1 时的流量数值。

由 K 的定义式可以看出，流量模数为管路直径 d 和沿程损失因数 λ 的函数，即 $K=f(d,\lambda)$，在大多数长管水力计算中，流动多为阻力平方区，$\lambda=f(\Delta,d)$，与雷诺数 Re 无关。所以，在通常情况下，可以取 $K=f(d,\Delta)$。

在实际工程中所使用的各种管的 Δ 值，在确定的生产条件和使用情况下是一定的(如前面表 9－1 所示)，所以，人们为了使设计和计算更为方便，对于各种管路的具体情况列出了各自的 $K=f(d)$表格，以便于实际计算时查阅。这里列举常用铸铁管的 $K=f(d)$，列于表 10－1 作为示例。

表 10－1　铸铁管 K 值

d/m	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
K/(m^3/s)	0.009 9	0.061 4	0.383 7	1.120 6	2.397	4.324 2	6.999 3	14.964 2	26.485
$1/K^2$/(s^2/m^6)	10 340	265.0	6.78	0.794	0.174	0.053 2	0.020 4	0.004 91	0.001 37

二、串联管路的水力计算

串联管路是指不同直径长管的串联，图 10－3 所示为几段长管串联组成的管路系统。各段管路均按长管计算，只有沿程损失。

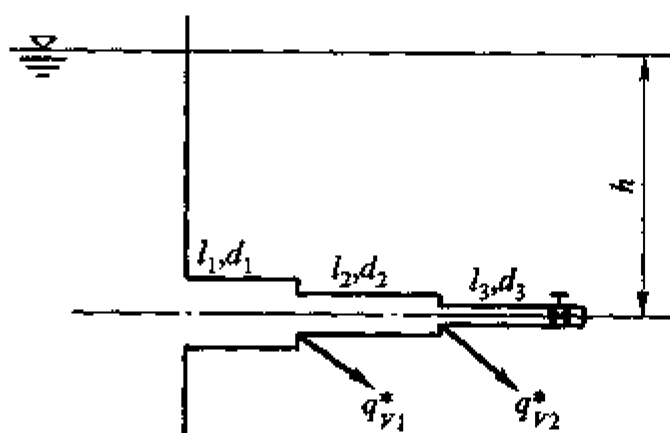


图　10－3

而且

$$h_{f_i}=\frac{q_{V_i}^2}{K_i^2}l_i$$

串联管路有以下两个特征：

(1) 对于无外泄漏的串联管路，各管段流量相等，即

$$q_{V1}=q_{V2}=q_{V3}\cdots=q_V$$

(2) 各段沿程损失之和应为总作用水头，

即
$$h=h_{f1}+h_{f2}+h_{f3}\cdots\cdots$$

所以
$$h=q_V^2\sum\frac{l_i}{K_i^2}=q_V^2\left(\frac{l_1}{K_1^2}+\frac{l_2}{K_2^2}+\frac{l_3}{K_3^2}\cdots+\frac{l_i}{K_i^2}\right)$$

由此得流量为

$$q_V=\sqrt{\frac{h}{\frac{l_1}{K_1^2}+\frac{l_2}{K_2^2}+\cdots+\frac{l_i}{K_i^2}}} \tag{10-5}$$

当有外泄时，即 $q_{Vi}^*\neq0$ 的情况，则有

$$q_{V(i+1)}=q_{Vi}-q_{Vi}^*$$

总计可列出 $i-1$ 个方程，与式(10-5)联立即可求解。

三、并联管路的水力计算

图10-4中，若干条简单长管组成并联管路，有共同的分支点 A 和汇合点 B。在工程中并联管路应用比较普遍，如锅炉内部管路常采用并联形式。

图10-4中为三条管路并联，设分流前流量为 q_{V1}，合流后流量为 q_{V5}，三管内流量分别为 q_{V2}，q_{V3}，q_{V4}。

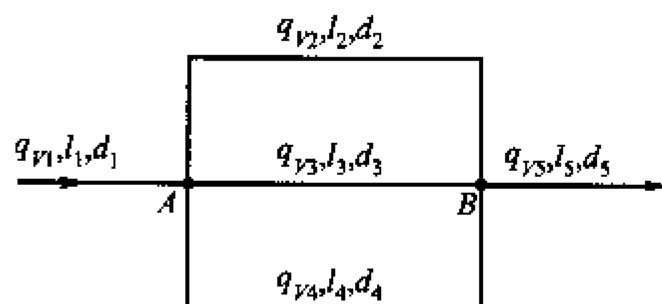


图 10-4

并联管路的特点为：

(1) 在并联的各管段中，阻力损失相同(因为在共同的分流和汇合点处，即在每一条管路的两端有共同的压强值，因此每条管路中都有相同的压降)。即

$$h_{f2}=h_{f3}=h_{f4}=\frac{q_{Vi}^2l_i}{K_i^2},\quad i=2,\ 3,\ 4$$

由此可知，整个管路的损失为

$$h=h_{f1}+h_{fi}+h_{f5},\quad i=2,\ 3,\ 4$$

注意，式中 h_{fi}并非是$\sum h_{fi}$。

(2) 总流量为各分路中支管流量之和，由流量连续条件有

$$q_{V1}=q_{V2}+q_{V3}+q_{V4}=q_{V5}$$

并联管路计算中，经常遇到的问题是计算各管路中的流量。当各管的直径、管

长，粗糙度和使用情况相同时，各管流量应相等。若各管情况不同，即流动阻力不同时，必须按损失相等的原则逐个列方程予以计算。

四、枝状管路的水力计算

枝状管路是工程中常用的一种管路形式，它将流体自主干管路供向各用水点。它较环状管网便于安装，省费用，但可靠性差一些。一般用于生活用水、工地施工用水和农田喷灌用水。

对于如简图 10-5 所示枝状管路，能量方程不能在总干管和分支管之间建立，必须对各管段逐一计算。

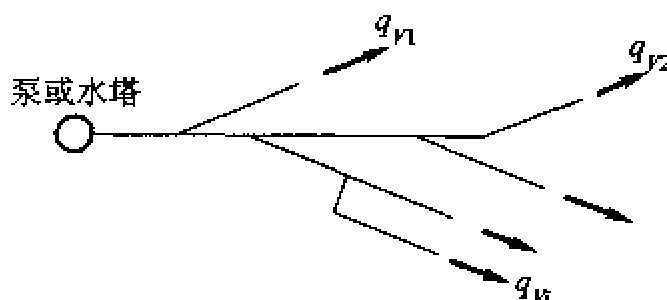


图 10-5

设计枝状管路时，一般已知的是各管段长度 l_i，各处使用要求的水头 h_i 和流量 q_{Vi}，而所使用的管材和管径也应是按工程条件和允许流速来确定的。因此，往往设计的主要任务是计算水塔的高度和泵的扬程。其原则是要满足损失最大枝路的供水要求。

若各段干管和分枝管的能量损失按下式计算

$$h_{fi} = \frac{q_{Vi}^2 l_i}{K_i^2}$$

则自水塔至各枝管末端的总损失为

$$h = \sum h_{fj} + \sum h_{fi}$$

其中：j 为各主干管，i 为相应的分枝管段。

五、环状管网的水力计算

环状管网在给水、通风等工程系统中被广泛采用。它显著的优点是能使流量自行分配，如果任一管段出现局部损坏都可由其它管路补给，保证各用户的使用要求，提高系统运行的可靠性。但环状管网布局较复杂，管段多，投资成本较高。

环状管网设计的布局要根据地域和工程要求确定，各处的供水量应由用户提出。环状管网需要通过水力计算确定的通常是各管段的流量分配并设计选择适当的管径。

不难看出，环状管网的设计计算要比前面介绍的几种管路复杂得多。

环状管网的设计计算依据以下两个基本原则：

1. 由连续性原理，在每个节点上流出、流入的流量应相等。如以流入节点的流量为正，流出为负，则有

$$\sum q_{V_i}=0$$

2. 由并联管路的水力计算特点，在任何一封闭环路中，若设顺环路方向流动的水头损失为正，逆方向为负，则应有

$$\sum h_{f_i}=0$$

不难证明，由上述原则建立的独立方程个数与未知流量的个数相等，因此，原则上可解。但由于方程组的非线性，使求解复杂、困难。通常采用迭代法，逐次逼近求解，以求得满足精度要求的结果。其步骤通常为：

(a) 由设计条件给定管网供水流量、压力，以及各处分出流量 q'_{V_i}；

(b) 凭经验预估各管段流量和流向，则对于各节点应有 $\sum q_{Vi}=0$；

(c) 按各管段流量和经济流速，确定各管直径 d_i；

(d) 分别计算各管段水头损失 h_{fi}；

(e) 计算各环路的 $\sum h_{fi}$，若 $\sum h_{fi}>0$，说明顺时针方向流动的管段流量估算偏大，否则相反；

(f) 依据(e)的分析结果，采用逐次迭代的方法计算其修正流量 Δq_{Vi}，以使各管段流量满足要求。这里须注意，一环的校正会影响相邻环。因此，必须反复、多次修正，直到满足精度要求为止。在修正流量的同时，还需相应地调整管径。

校正流量 Δq_V 的计算方法通常采用哈迪 - 克劳斯(Hardy - Cross)算法。下面以图 10 - 6 的简单管网为例予以说明。其中各节点处流入、流出的流量 q'_V 为已知。

设左、右两环分别为 I 、II，各段流量预估为 $q_{Vi}(i=1,2,3,4,5)$，则各

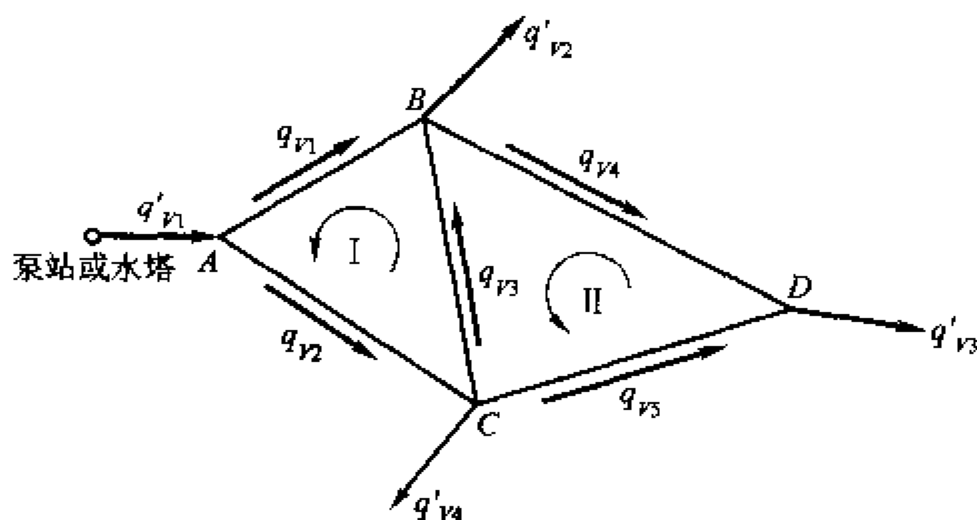


图 10 - 6

环预估流量偏差将出现的水头损失误差为

$$\Delta h_{f\,\mathrm{I}} = h_{fAC} + h_{fCB} - h_{fBC} = \frac{l_2}{K_2^2}q_{V2}^2 + \frac{l_3}{K_3^2}q_{V3}^2 - \frac{l_1}{K_1^2}q_{V1}^2$$

$$\Delta h_{f\,\mathrm{II}} = h_{fCD} - h_{fDB} - h_{fBC} = \frac{l_5}{K_5^2}q_{V5}^2 - \frac{l_4}{K_4^2}q_{V4}^2 - \frac{l_3}{K_3^2}q_{V3}^2$$

设Ⅰ、Ⅱ环的修正流量分别为 $\Delta q_{V\,\mathrm{I}}$，$\Delta q_{V\,\mathrm{II}}$，则各段的校正后流量分别为

$\Delta q_{V1} = -\Delta q_{V\,\mathrm{I}}$，$\Delta q_{V2} = +\Delta q_{V\,\mathrm{I}}$，$\Delta q_{V3} = \Delta q_{V\,\mathrm{I}} - \Delta q_{V\,\mathrm{II}}$

$\Delta q_{V4} = -\Delta q_{V\,\mathrm{II}}$，$\Delta q_{V5} = +\Delta q_{V\,\mathrm{II}}$

其中的"+"、"-"号取决于设定的流量方向是否与环路方向一致。

将 Δq_{V_i} 代入 Δh_f 式，将二次项展开，并忽略平方项可得

$$\Delta h_{f\,\mathrm{I}} + 2\sum\frac{h_{fi}}{q_{Vi}}\Delta q_{V\,\mathrm{I}} - 2\frac{h_{fCB}}{q_{V3}}\Delta q_{V\,\mathrm{II}} = 0$$

$$\Delta h_{f\,\mathrm{II}} + 2\sum\frac{h_{fi}}{q_{Vi}}\Delta q_{V\,\mathrm{II}} - 2\frac{h_{fCB}}{q_{V3}}\Delta q_{V\,\mathrm{I}} = 0$$

由此线性方程组可求解得 $\Delta q_{V\,\mathrm{I}}$ 和 $\Delta q_{V\,\mathrm{II}}$，但当环数较多时，须简化迭代求解。一般计算中，常将第三项忽略，得到任一环的校正量为

$$\Delta q_{Vi} = -\frac{\Delta h_{fi}}{2\sum(h_{fi}/q_{Vi})} \tag{10-6}$$

式中 h_{fi} 和 q_{Vi} 分别为该环各管段的水头损失和流量，Δh_{fi} 为该环前次计算的水头损失误差值。

对于各管段，第 j 次修正后的流量为

$$q_{Vj} = q_{Vj-1} + \Delta q_{Vj}$$

由于初设流量及其方向不可能刚好正确，而且某次的修正量 Δq_V 也不一定是小量，因此忽略平方项可能引起较大的误差。故迭代修正应逐次进行。尤其对于较复杂的管网，常常需要编制相应的程序，应用计算机计算，直至得到满足工程要求的精度为止。

六、均匀泄流的水力计算

在实际工程中，往往会遇到这样的一种管路设计，要求沿管路有等距离、等量流体的供给，即要求沿流程流量均匀泄出，这种流动称为**均匀泄流**。在蔬菜大棚里常见的灌溉用供水系统是比较典型的均匀泄流。

通常，为了使研究简化，假定沿管路泄流是完全均匀的，单位长度上的泄流量为 q_{Vi}。现在研究图 10-7 所示的均匀泄流管路，其管径为 d，管长为 L，

管末端流出流量为 q_{VT}，总作用水头为 h。

计算的目的在于找出沿均匀泄流管路的水头损失。

由流量连续性原理

$$q_V = q_{VT} + q_{Vi}L$$

在距管段起始处 x 位置取 $\mathrm{d}x$ 微段。则在 x 处截面的流量应为末端输出量和余段泄流量之和，即

$$q_{Vx} = q_{VT} + q_{Vi}(L - x)$$

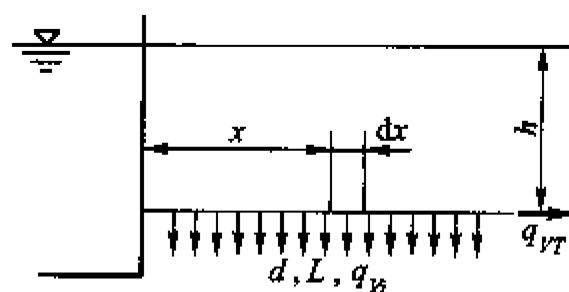


图　10－7

在微段 $\mathrm{d}x$ 上消耗的水头为

$$\mathrm{d}h_f = \frac{q_{Vx}^2}{K^2}\mathrm{d}x$$

由此可得在整个管段上的水头损失为

$$h = \int \mathrm{d}h_f = \int_0^L \frac{q_{Vx}^2}{K^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^L \frac{[q_{VT} + q_{Vi}(L - x)]^2}{K^2}\mathrm{d}x$$

设流动处于阻力平方区，有 $K = \text{const}$，积分上式得

$$h = \frac{q_{VT}^2 L + q_{VT}L^2 + \dfrac{q_{Vi}L^3}{3}}{K^2}$$

即

$$h = \frac{L}{K^2}\left(q_{VT}^2 + q_{VT}q_{Vn} + \frac{q_{Vn}^2}{3}\right) \tag{10-7}$$

其中 $q_{Vn} = q_{Vi}L$ 为泄流量。

式(10－7)说明，在均匀泄流的情况下，相当于在同样水头 h 作用下，无泄流时管端的流量为

$$q_V = \sqrt{q_{VT}^2 + q_{VT}q_{Vn} + \frac{q_{Vn}^2}{3}}$$

当管端无液体输出，即 $q_{VT} = 0$ 时

$$h = \frac{L}{K^2}\frac{q_{Vn}^2}{3} = \frac{1}{3}\frac{q_{Vn}^2 L}{K^2} \tag{10-8}$$

该式说明，管端无输出的均匀泄流量与同样水头作用下无泄流时的管端出流量的关系为

$$q_V = \frac{q_{Vn}}{\sqrt{3}}$$

因此，欲得到相同的流量，均匀泄流管路所需作用水头仅为集中于管末端

出流所需水头的三分之一。

应当说明，实际工程所采用的泄流管路是难以达到绝对均匀的，因此用上面的方法在假设均匀的前提下进行计算只是一种近似。

§10－3 计算机在管路水力计算中的应用

到目前为止，有些复杂的流体力学问题因无法用完善的数学模型表达而难以精确求解；有些流体力学问题因水力计算繁杂、工作量浩大而难以用笔解算。但是，随着数值计算方法和计算机的发展与应用，一些用解析法无法求解的问题，已可以用数值计算方法求得它们的数值解，一些繁杂的水力计算也可以编程用计算机解算。前者主要将在研究生的课程中解决。本章将着重讨论管路水力计算中的计算机应用，并将详细介绍利用高级语言编制的计算程序，通过实践力求使读者尽快掌握编制计算机程序的方法和技巧。

一、等径无分支管路的计算

在管路的计算中，常常遇到下列三类问题：

(1) 已知：介质的运动粘度 ν，密度 ρ，管长 l，管径 d，管壁的绝对粗糙度 Δ，流量 q_V。求：损失 h。

(2) 已知：介质的运动粘度 ν，密度 ρ，管长 l，管壁的绝对粗糙度 Δ，管径 d，损失 h。求：流量 q_V。

(3) 已知：介质的运动粘度 ν，密度 ρ，管长 l，管壁的绝对粗糙度 Δ，流量 q_V，损失 h。求：管径 d。

对于第一类问题，可以由 q_V 和 d 计算出速度 V，再由 V、d、ν 算出 Re，由 Re 判别流动区域，计算出沿程损失因数 λ，从而由达西公式计算出 h。显然第一类问题比较简单。

对于第二类和第三类问题，由于 q_V(或 d)未知，无法直接算出 Re，故无法计算 λ，因而 q_V(或 d)也无法算出。因此，要采用试算法，即凭经验先给定一个 λ_1 值，由达西公式反算出 q_V 或 d，然后再按第一类问题计算出 λ，以检验原来给定的 λ_1 是否正确，若正确，q_V 或 d 即为所求，若误差较大，则将算出的 λ 作为 λ_1 重复上述过程，直到 λ 和 λ_1 之差的绝对值小于某一事先给定的精度值为止。显然，这一迭代过程用手算较为麻烦，而利用计算机则可以轻而易举地完成。

1. 计算 λ 的子程序 CL

在利用计算机计算管路问题时，需要多次计算 λ，因此，我们将计算 λ 的

过程编成一子程序，命名为 CL，以便在计算中随时调用。

(1) 计算 λ 的公式

按照尼古拉兹曲线，本程序在计算 λ 时使用下列公式：

$Re < 2\ 320$ 时

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad ①$$

$2\ 320 < Re < 80\dfrac{d}{\Delta}$时

当 $Re < 10^5$ 时

$$\lambda = \frac{0.316\ 4}{Re^{0.25}} \quad ②$$

当 $10^5 < Re < 3 \times 10^6$ 时

$$\lambda = 0.003\ 2 + 0.221 Re^{-0.237} \quad ③$$

$80\dfrac{d}{\Delta} < Re < 4\ 160\left(\dfrac{d}{2\Delta}\right)^{0.85}$时

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \quad ④$$

$Re > 4\ 160\left(\dfrac{d}{2\Delta}\right)^{0.85}$时

$$\lambda = \left(1.74 + 2\lg\frac{d}{2\Delta}\right)^{-2} \quad ⑤$$

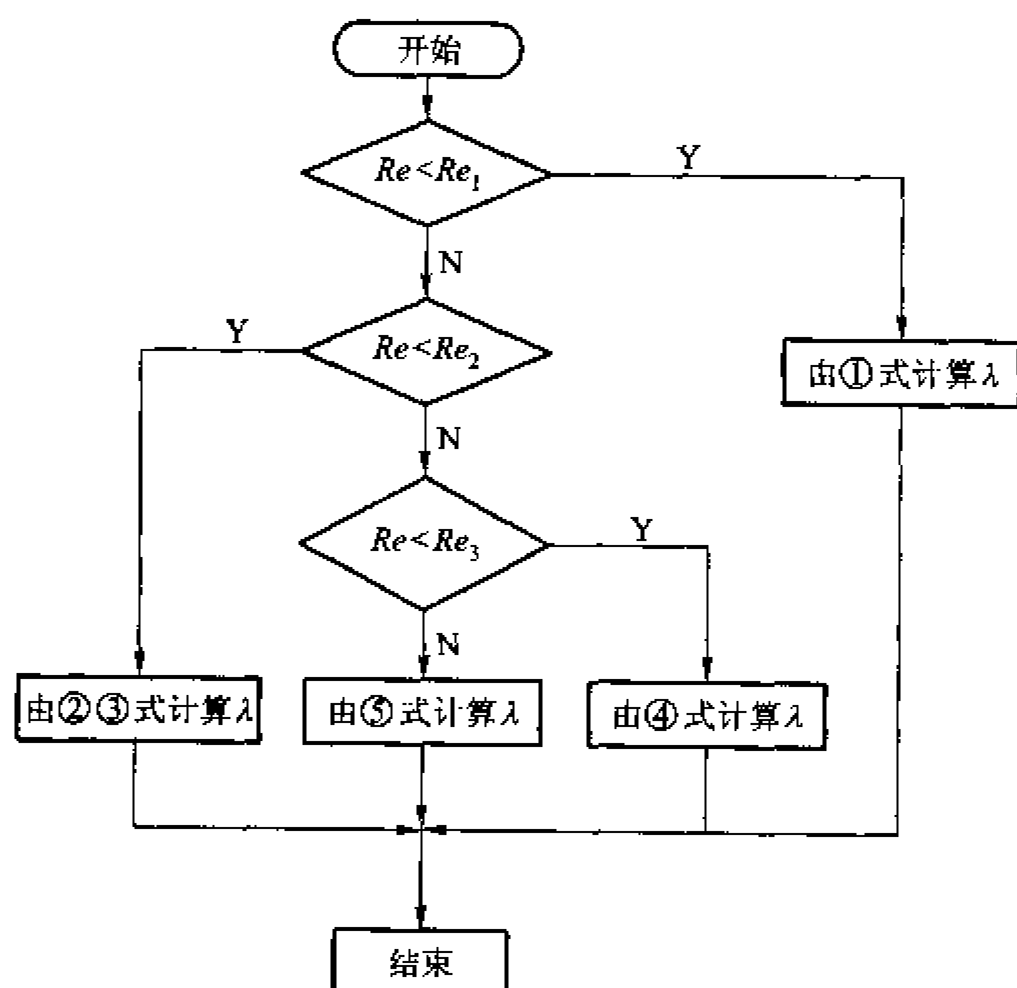


图　10－8

(2) 程序框图(见图 10 - 8)

记 $$Re_1 = 2\ 320$$

$$Re_2 = 80\ \frac{d}{\Delta}$$

$$Re_3 = 4\ 160\left(\frac{d}{2\Delta}\right)^{0.85}$$

(3) 程序说明

在程序中，变量 DLT 表示管壁绝对粗糙度 Δ，D 表示管径 d，Re 表示雷诺数 Re，LMD 和 LMD1 分别表示 λ 和 λ_1，ID 表示所求的 λ 位于哪个区中(ID = 1 表示在层流区，ID = 3 表示在过渡区和紊流光滑管区，ID = 4 表示在紊流粗糙管区，ID = 5 表示在阻力平方区)。

在调用子程序之前，应将前三个元素 DLT，D，RE 赋值，调用子程序后，返回值在 LMD 和 ID 中。

(4) 程序清单

```
float CL (float dlt,float d,float re,int * id)
{
  float lmd1,temp,lmd,Rec1,Rec2,Rec3;
  Rec1 = 2 320;
  Rec2 = 80 * d/dlt;
  Rec3 = 4 160 * pow (d/2.0/dlt,0.85);
  if (re < Rec1){lmd = 64/re; * id = 1;}
  else if (re < Rec2)
  {
    if (re < 1e5){lmd = 0.316 4/pow (re,0.25); * id = 2;}
    else if (re < 3e6){lmd = 0.003 2 + 0.221 * pow (re, - 0.237); * id = 3;}
  }
  else if (re < Rec3)
  {
    lmd = 0.01; * id = 4;
    while (fabs (lmd - lmd1) > = 1e - 6)
    {
      lmd1 = lmd;
      temp = log (dlt/(3.7 * d) + 2.51/re/sqrt (lmd1))/log (10.0);
      lmd = pow (1.0/( - 2.0)/temp,2);
    }
```

```
}
  else if (re > = Rec3)
  {
    lmd = pow ((1.74 + 2.0 * log (d/(2.0 * dlt))/log (10.0)), - 2);
    * id = 5;
  }
  return (lmd);
}
```

2. 简单管路的计算方法

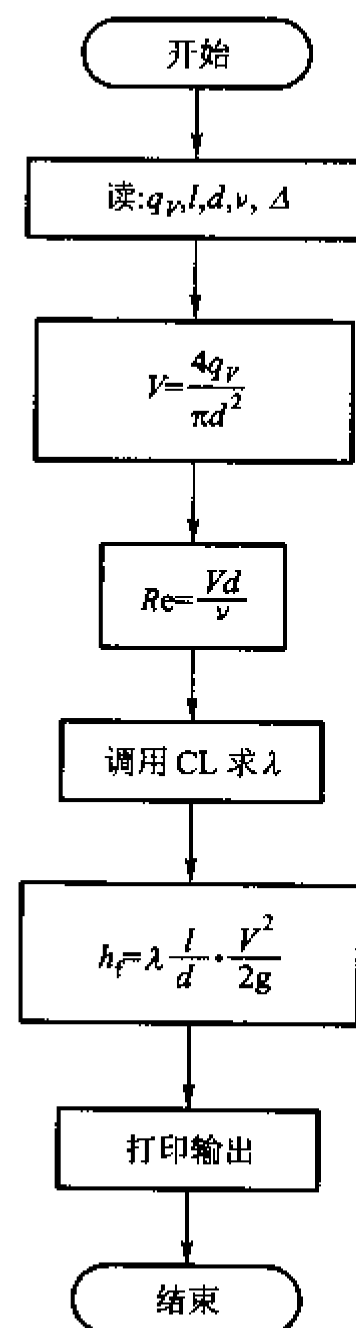


图 10－9

简单管路通常是指等径、无分枝管路系统，这里只计算沿程损失。

(1) 已知：q_V，l，d，ν，Δ

求：沿程损失 h_f。

分析：此题为第一类问题，可用如下步骤求解。

(a) $V=\dfrac{4q_V}{\pi d^2}$

(b) $Re=\dfrac{Vd}{\nu}$

(c) 调用 CL 计算 λ

(d) $h_f=\lambda\dfrac{l}{d}\dfrac{V^2}{2g}$

程序框图，见图 10－9。

程序说明：

在程序中，DLT 表示 Δ，NU 表示 ν，HF 表示 h_f，Q 表示 q_V，LMD 表示 λ，p_1 表示 π。

程序清单：

```
# include 〈math.h〉
# include 〈stdio.h〉
# define pi 3.141 592 6
# define g 9.81

float CL (float,float,float,int * );

void main ()
{
  int ID = 0;
```

```
    float DLT,D,L,Q,NU,HF,V,Re,LMD;
    printf ("please input:dlt,d,l,Q,nu \ n");
    scanf ("%f,%f,%f,%f,%f ",&DLT,&D,&L,&Q,&NU);
    V = 4 * Q/pi/D/D;
    Re = V * D/NU;
    LMD = CL (DLT,D,Re,&ID);
    HF = LMD * L * V * V/D/2/g;
    printf ("ID = %d \ nv = %7.2fm/s \ nre = %7.3f \ nlmd = %7.3f \ nhf =
%7.4fm \ n",ID,V,Re,LMD,HF);
}
```

举例：

已知：油流过某一管路，管长 $l=300$ m，管径 $d=0.2$ m，管壁的绝对粗糙度 $\Delta=0.000\,4$ m，油的流量 $q_V=0.277\,8$ m^3/s，油的运动粘度 $\nu=2.5\times10^{-6}$ m^2/s。

求：沿程损失 h_f。

运行程序

input：DLT，D，L，Q，NU

0.000 4，0.2，300.，0.277 8，2.5E－6

程序输出如下：

ID = 5

v = 8.84 m/s

re = 707 411.938

lmd = 0.023

hf = 139.942 2 m

(2) 已知：h_f，l，d，ν，Δ

求：q_V

分析：此题为第二类问题，要用试算法，其步骤如下：

(a) 取 $\lambda_1=0.03$

(b) 由达西公式可求得

$$V=\frac{\sqrt{2gdh_f}}{\sqrt{\lambda_1 l}}$$

(c) $Re=\dfrac{Vd}{\nu}$

(d) 调用 CL 子程序计算 λ。

(e) 检查 λ 和 λ_1 之差是否小于给定精度 ε，如果不满足，将算出的 λ 作为 λ_1 重复(b)，(c)、(d)步骤，直至满足后计算下一步。

(f) $q_V = \frac{\pi d^2}{4} V$

程序框图，见图 10-10。

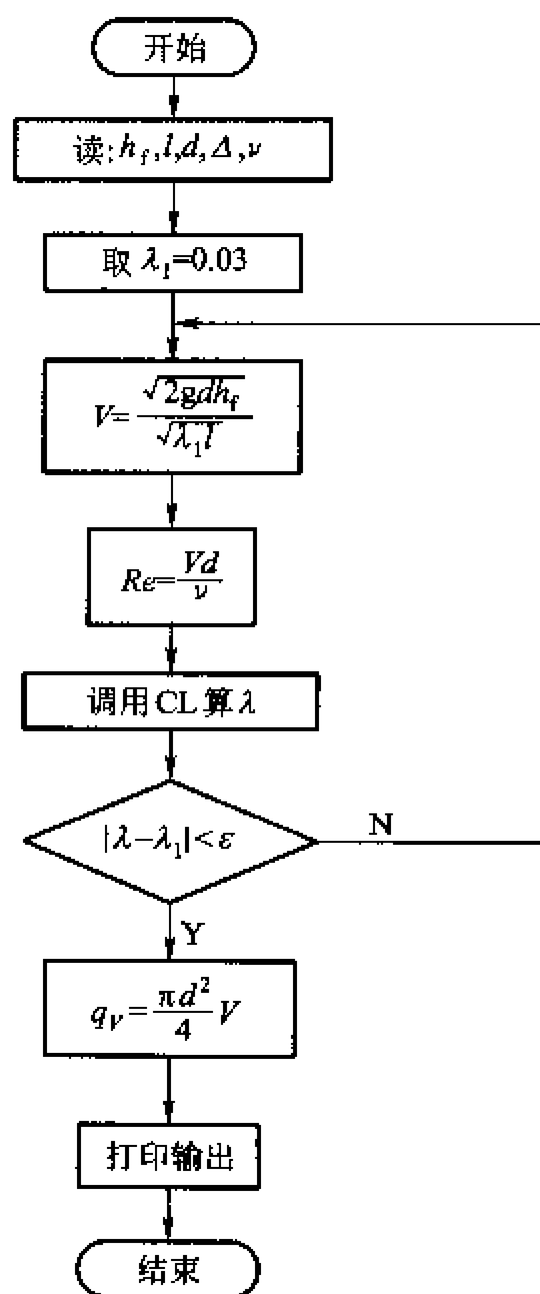


图 10-10

程序说明：

在程序中，LMD1 表示 λ_1，其它参数表示同前述程序相同，取精度 $\varepsilon = 0.000\ 005$。

程序清单：

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define pi 3.1415926
#define g 9.81

float CL (float,float,float,int * );
void main ()
{
  int ID = 0;
  float DLT,D,L,Q,NU,HF,V,Re,LMD,
LMD1;

  printf ("please input:dlt,d,l,hf,nu \n");
   scanf ("%f, %f, %f, %f, %f ", &DLT,
&D,&L,&HF,&NU);

  LMD1 = 0.03;
  V = sqrt (2 * g * D * HF/L/LMD1);
  Re = V * D/NU;
  LMD = CL (DLT,D,Re,&ID);
  while (fabs (LMD - LMD1) > =5e-6) {
    LMD1 = LMD;
    V = sqrt (2 * g * D * HF/L/LMD1);
    Re = V * D/NU;
    LMD = CL (DLT,D,Re,&ID);
  }
  Q = pi * D * D * V/4;
  printf ("ID = %d \ nv = %7.4fm/s \ nre = %7.2f \ nlmd = %7.4f \ nq =
```

```
%7.4fm3/s \ n",ID,V,Re,LMD,Q);
}
```

举例：

已知：15 ℃的水流过一直径 $d=300$ mm，绝对粗糙度 $\Delta=3$ mm 的钢管，测得在长 $l=300$ m 的管道上水头损失 $h_f=6$ m，水的运动粘度 $\nu=1.13\times10^{-6}$ m²/s。

求：水的流量 q_V。

运行程序

input：DLT，D，L，HF，NU

0.000 3，0.3，300.，6.，1.13E－6

程序输出如下：

ID＝5

v＝1.762 8 m/s

Re＝468 012.00

lmd＝0.037 9

q＝0.124 6 m³/s

(3) 已知：h_f，q_V，l，ν，Δ

求：管径 d。

分析：此题为第三类问题，也要采用试算法，其步骤如下：

(a) 取 $\lambda_1=0.03$

(b) 由 $V=\dfrac{4q_V}{\pi d^2}$代入达西公式可得

$$d=\left(\frac{8l\,q_V{}^2\lambda}{\pi^2 g h_f}\right)^{0.2}$$

(c) $Re=\dfrac{4q_V}{\pi\nu d}$

(d) 调用 CL 子程序计算 λ。

(e) 检查 λ 和 λ_1 之差是否小于给定的精度 ε，如果不满足，将算出的 λ 作为 λ_1 重复上述(b)、(c)、(d)步骤，直至满足所给定的精度为止。

程序框图，见图 10－11。

程序说明：

在程序中，参数表示同前述程序相

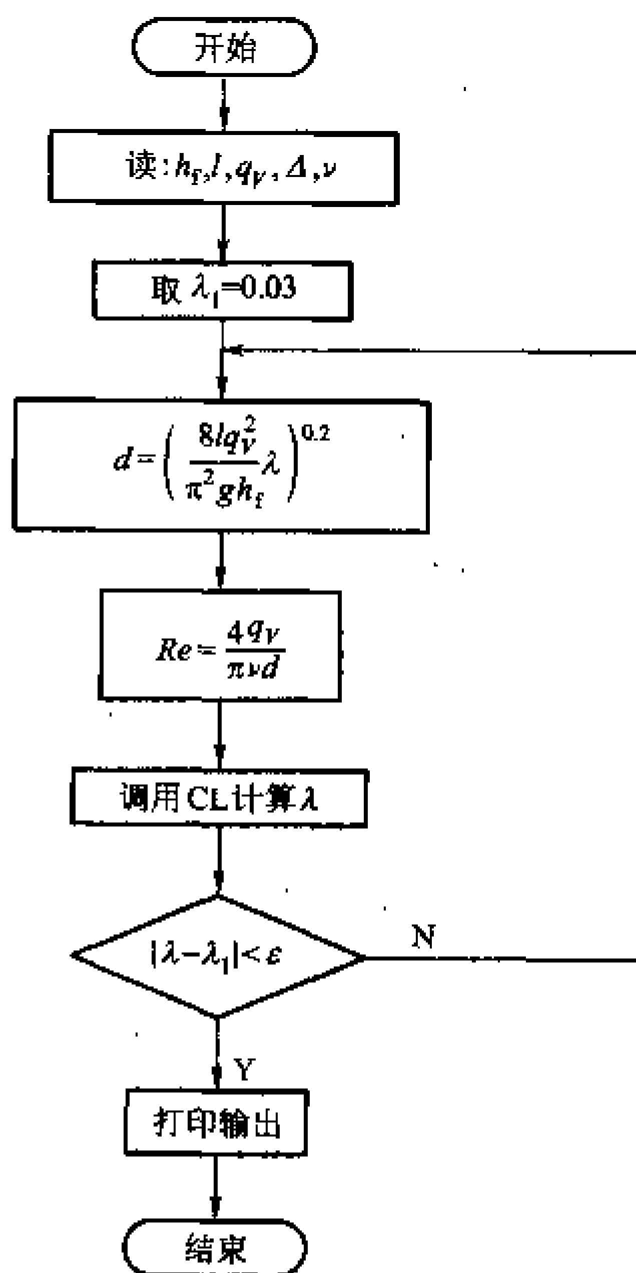


图 10－11

同，取精度 $\epsilon = 0.000\,005$。

程序清单：

```
#include "math.h"
#include "stdio.h"
#define pi 3.1415926
#define g 9.81

double CL (double,double,double,int * );

void main ( )
{
  int ID = 0;
  double DLT,D,L,Q,NU,HF,V,Re,LMD,LMD1;
  double lll;

  LMD1 = 0.03;
  printf ("please input:dlt,Q,l,hf,nu \ n");
  scanf ("%f, %f, %f, %f, %f",&DLT,&Q,&L,&HF,&NU);

  D = pow (8 * L * Q * Q * LMD1/(pi * pi * g * HF), 0.2);
  V = 4 * Q/pi/D/D;
  Re = V * D/NU;
  LMD = CL (DLT,D,Re,&ID);
  while (fabs (LMD - LMD1) > =5e-6) {
    LMD1 = LMD;
    lll = 8 * L * Q * Q * LMD1/(pi * pi * g * HF);
    D = pow (lll,0.2);
    V = 4 * Q/pi/D/D;
    Re = V * D/NU;
    LMD = CL (DLT,D,Re,&ID);
  }
  printf ("ID = %d \ nv = %7.4fm/s \ nre = %7.2f \ nlmd = %7.4f \ nd =
%7.4fm \ n",ID,V,Re,LMD,D);
}
```

举例：

已知：通过某管路的流量 $q_V = 0.277\,8\ \mathrm{m^3/s}$，介质的运动粘度 $\nu = 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，管路长度 $l = 200\ \mathrm{m}$，绝对粗糙度 $\Delta = 0.000\,046\ \mathrm{m}$，允许的最大水头损失

$h_f = 20$ m。

求：管径 d。

运行程序

```
input:DLT,Q,L,HF,NU
0.000 046,0.277 8,200.,20.,1.E-6
```

程序输出结果如下：

```
ID = 4
v = 5.856 9 m/s
Re = 1 439 312.00
lmd = 0.014 3
d = 0.245 7 m
```

二、串联管路的计算方法

串联管路的计算通常有两类问题：

(1) 已知流过串联管路的流量 q_V，介质参数(ν,ρ)，管路参数(l,d,Δ)，求所需要的总水头 h。

(2) 已知总水头 h，介质参数(ν,ρ)，管路参数(l,d,Δ)，求通过的流量 q_V。

以图 10－12 两根不同直径的管子组成的串联管路为例。

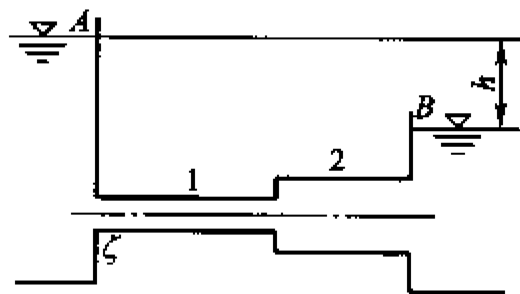


图 10－12

设 ζ 为入口损失因数，对 A、B 两截面列伯努利方程有

$$h = \zeta \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1}\frac{V_1^2}{2g} + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2}\frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} \qquad ⑥$$

根据连续性方程得

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 V_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 V_2 \qquad ⑦$$

下面分别讨论上述两类问题。

1. 已知：q_V，l_1，l_2，d_1，d_2，Δ_1，Δ_2，ν，ζ

求：总水头 h

分析：此题为第一类问题，由公式⑥、公式⑦很容易求出 h，故只给出程序框图，具体程序由读者自行编写，以提高独立编制计算机程序的能力。

程序框图，见图 10－13

2. 已知 h，l_1，l_2，d_1，d_2，Δ_1，Δ_2，ν，ζ

求：流量 q_V

分析：此题为第二类问题，要用试算法，其具体步骤如下：

（1）取 $\lambda_1'=0.025$，$\lambda_2'=0.015$

（2）由⑥、⑦二式可求得

$$V_1=\left\{\frac{2gh}{\zeta+\frac{\lambda_1 l_1}{d_1}+\left[1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2+\frac{\lambda_2 l_2}{d_2}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4+\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4}\right\}^{0.5} \qquad ⑧$$

$$V_2=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 V_1 \qquad ⑨$$

（3）
$$Re_1=\frac{V_1 d_1}{\nu},\quad Re_2=\frac{V_2 d_2}{\nu} \qquad ⑩$$

（4）调用 CL 子程序计算 λ_1、λ_2

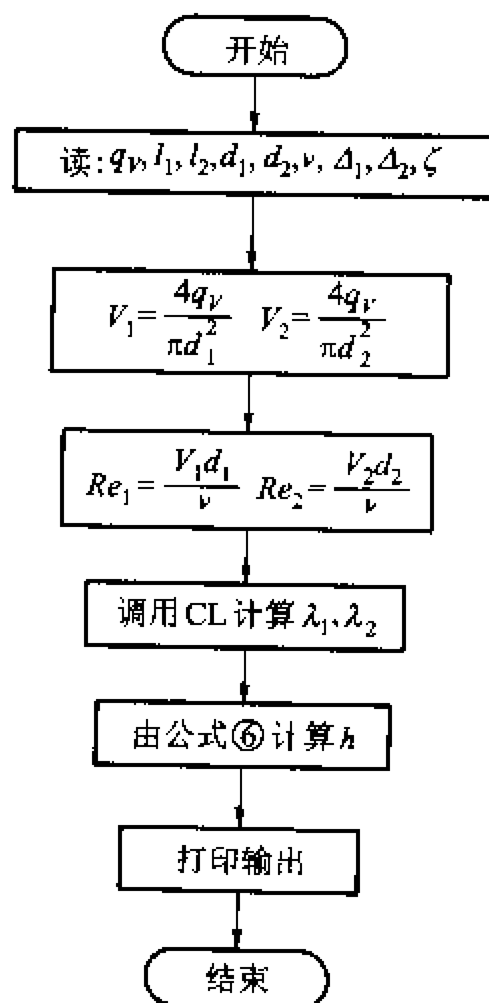


图　10－13

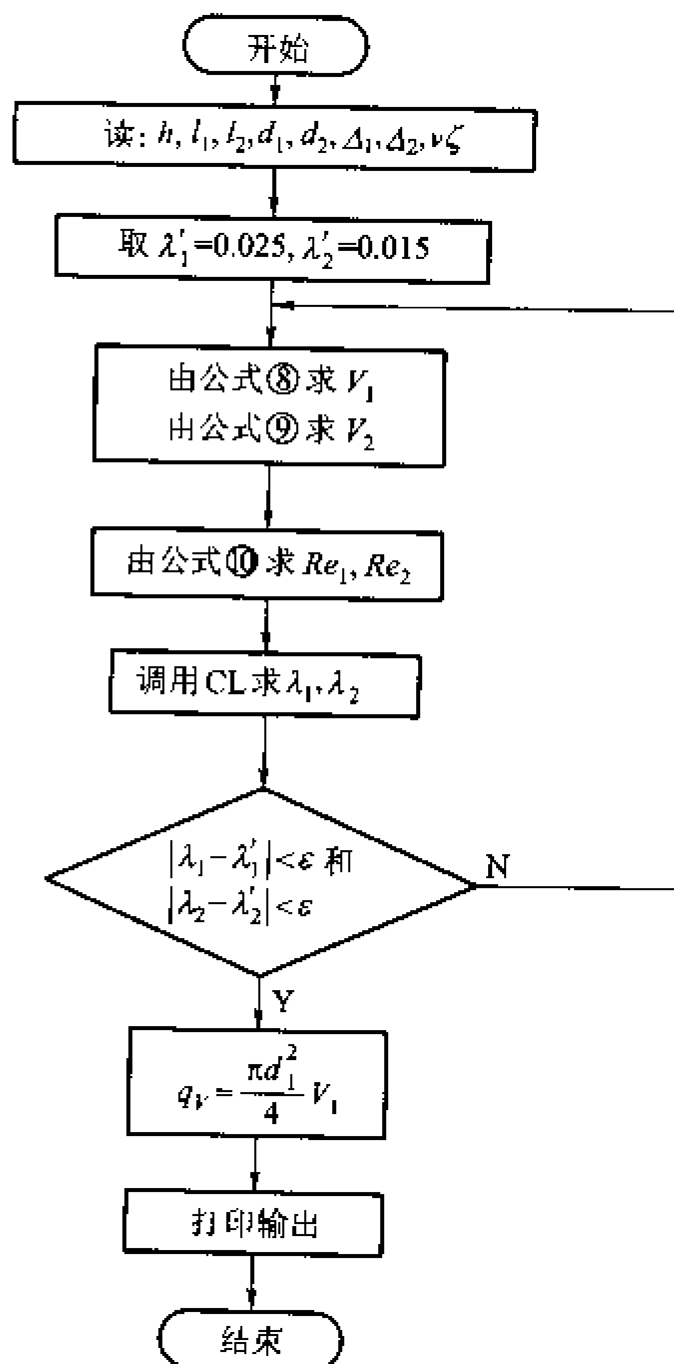


图　10－14

(5) 检查 λ_1 和 λ'_1 之差的绝对值及 λ_2 和 λ'_2 之差的绝对值是否同时小于给定的精度 ε，如果不满足，将算出的 λ_1 和 λ_2 作为新的 λ'_1 和 λ'_2 重复(2)、(3)、(4)步骤；直至满足所取精度后再计算下一步。

(6) $q_V = \dfrac{\pi d_1^2}{4} V_1$

程序框图，见图 10－14。

程序说明：

在程序中，LMD1 和 LMD2 分别表示 λ_1 和 λ_2，LMD11 和 LMD21 分别表示 λ'_1 和 λ'_2，DLT1 和 DLT2 分别表示 Δ_1 和 Δ_2，ZET 表示 ζ，Q 表示 q_V，取精度 $\varepsilon = 0.000\ 005$。

程序清单：

```
    # include <math.h>
    # include <stdio.h>
    # define pi 3.1415926
    # define g 9.81
    float CL (float,float,float,int * );
    void main ()
    {
      int ID1 = 0;
      int ID2 = 0;
      float DLT1,LMD1,LMD11,Re1,D1,L1,V1;
      float DLT2,LMD2,LMD22,Re2,D2,L2,V2;
      float Q,NU,H,KCE;
      float DK,lll;
      printf ("please input:h,l1,d1,l2,d2,nu,dlt1,dlt2,kce: \ n");
      scanf ("%f%f%f%f%f%f%f%f%f ",&H,&L1,&D1, * &L2,&D2,&NU,
             &DLT1,&DLT2,&KCE);
      H = 6;L1 = 300;L2 = 240;D1 = 0.6;D2 = 0.9;NU = 1e - 6;DLT1 = 0.0015;
      DLT2 = 0.0003;
      KCE = 0.5;
      LMD11 = 0.025;LMD22 = 0.015;
loop:
      DK = D1 * D1/(D2 * D2);
      lll = KCE + LMD11 * L1/D1 + (1 - DK) * (1 - DK);
```

```
        lll = lll + LMD22 * L2/D2 * DK * DK + DK * DK;
        V1 = sqrt (2 * g * H/lll);
        V2 = DK * V1;
        Re1 = V1 * D1/NU;
        Re2 = V2 * D2/NU;
        LMD1 = CL (DLT1,D1,Re1,&ID1);
        LMD2 = CL (DLT2,D2,Re2,&ID2);
        if ((fabs (LMD1 - LMD11) > =5e - 6)||(fabs (LMD2 - LMD22) > =5e - 6))
        {
          LMD11 = LMD1;
          LMD22 = LMD2;
          goto loop;
        }
        Q = pi * D1 * D1 * V1/4;
        printf ("ID1 = %d \ nv1 = %7.4fm/s \ nre1 = %7.2f \ nlmd1 = %7.4f \ nID2
              = %d \ nv2 = %7.4fm/s \ nre2 = %7.2f \ nlmd2 = %7.4f \ nq =
              %7.4fm3/s \ n",ID1,V1,Re1,LMD1,ID2,V2,Re2,LMD2,Q);
    }
```

举例

已知：图 10 - 12 所示串联管路的 $\zeta = 0.5$，$l_1 = 300$ m，$l_2 = 240$ m，$d_1 = 0.6$，$d_2 = 0.9$ m，$\Delta_1 = 0.001\,5$ m，$\Delta_2 = 0.000\,3$ m，$\nu = 1 \times 10^{-6}$ m²/s，$h = 6$ m。

求：通过该管路的流量 q_V。

运行程序

input：H，D_1，D_2，DLT_1，DLT_2，L_1，L_2，NU

6.，0.6，0.9，0.001 5，0.000 3，300.，240.，1.E - 6

程序输出如下：

```
ID1 = 5
v1 = 2.871 3 m/s
re1 = 1 722 771.00
lmd1 = 0.024 9
ID2 = 4
v2 = 1.276 1 m/s
Re2 = 1 148 514.00
lmd2 = 0.015 9
q = 0.811 8 m³/s
```

三、并联管路的计算方法

并联管路指有共同的起始及汇合点的管段所组成的管路系统。

并联管路的计算通常有两类问题：

(1) 已知二点间的压力降(即能量损失)h，求总流量 q_V。

(2) 已知总流量 q_V，求各分支管路的流量及能量损失 h。

现以图 10－15 所示三管路并联系统为例进行计算，并联管路的特点是每一分支管路的能量损失相等，干路的流量等于各分支管路流量之和。

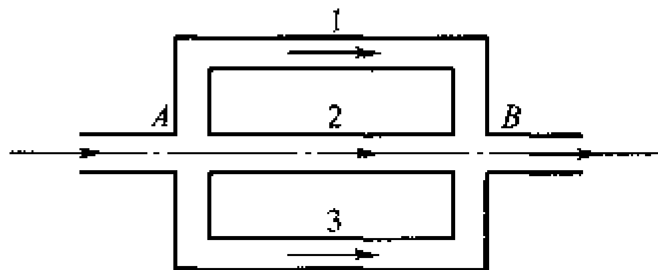


图 10－15

1. 已知：h，l_1，l_2，l_3，d_1，d_2，d_3，Δ_1，Δ_2，Δ_3，ν

求：总流量 q_V

分析：此题相当于简单管路的第二类问题。故只给出编程步骤及程序框图，具体程序由读者自行编写。

为了编程方便，采用三维数组表示三条管道的各个参数。

(1) 取 $\lambda_1(I)=0.03$

(2) 由达西公式可求得

$$V(I)=\frac{\sqrt{2gd(I)h}}{\sqrt{\lambda_1(I)l(I)}}$$

(3) $Re(I)=\dfrac{V(I)\ d(I)}{\nu}$

(4) 调用 CL 子程序计算 $\lambda(I)$

(5) 检查 $\lambda(I)$和 $\lambda_1(I)$之差的绝对值是否同时小于给定的精度 ε ($I=1,2,3$)，如果不满足，将算出的 $\lambda(I)$作为 $\lambda_1(I)$重复(2)、(3)、(4)步骤，直至满足所给定的精度后计算下一步。

(6) $q_V(I)=\dfrac{\pi d^2(I)}{4}V(I)$

(7) $q_V=\sum q_1(I)$

程序框图，见图 10－16。

2. 已知：l_1，l_2，l_3，d_1，d_2，d_3，Δ_1，Δ_2，Δ_3，ν，q_V

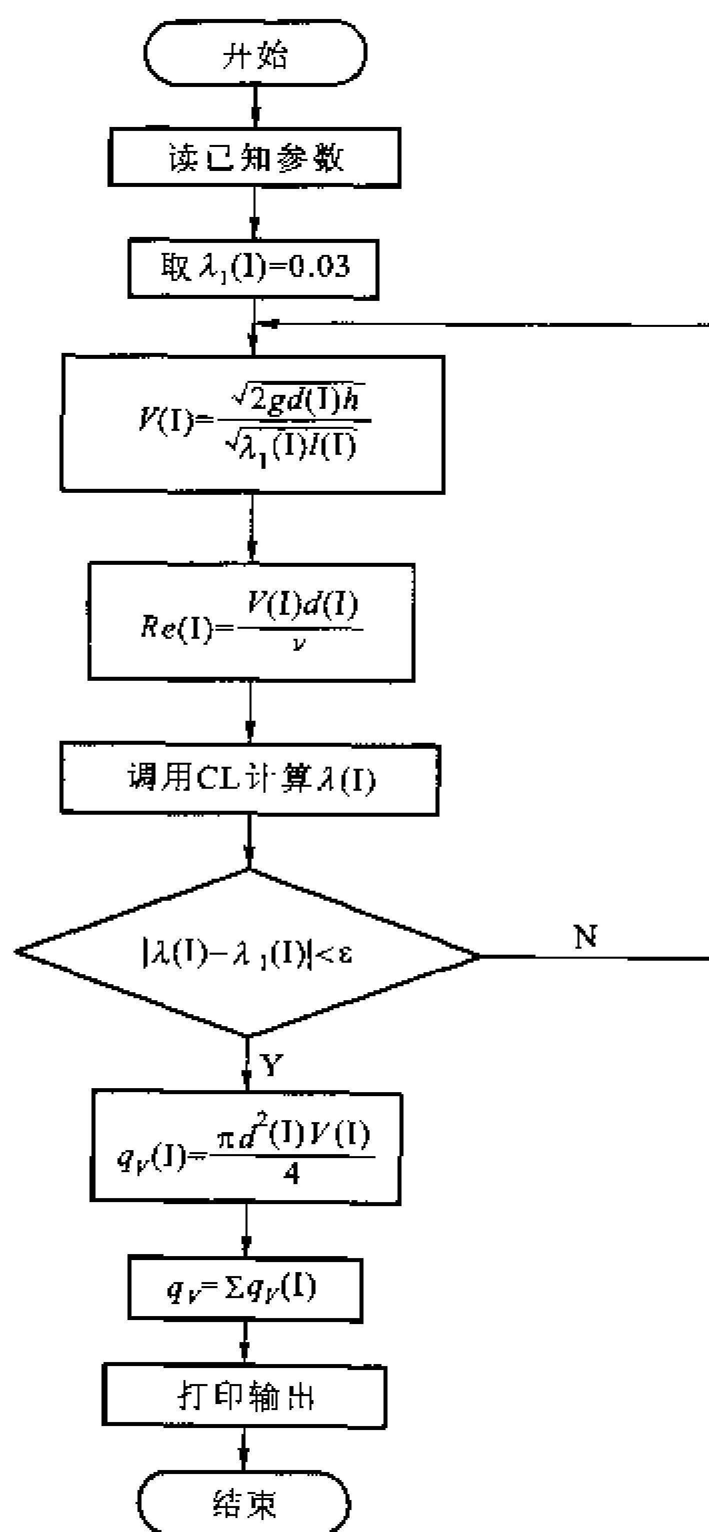


图　10－16

求：各分支管路的流量及能量损失 h

分析：此题为并联管路第二类问题，由于只知道总流量 q_V，各分支管路的流量和损失均不知道，因此计算较复杂，其具体计算步骤如下：

（1）根据经验，先给定一个 h 值

（2）由此 h 值求出各分支管路的流量 q'_{V1}，q'_{V2}，q'_{V3}（其步骤参见简单管路的第二类问题）

（3）计算其和 $q_{Vt}=q'_{V1}+q'_{V2}+q'_{V3}$

(4) 将总流量按如下比例分配

$$q_{V1}=\frac{q'_{V1}}{q_{Vt}}q_V,\quad q_{V2}=\frac{q'_{V2}}{q_{Vt}}q_V,\quad q_{V3}=\frac{q'_{V3}}{q_{Vt}}q_V$$

(5) 用计算出的流量 q_{V1}、q_{V2}、q_{V3}去求 h_1，h_2，h_3(参见简单管路的第一类问题)以核对流量分配的正确性。若求得的各分支管路的损失 h_1，h_2，h_3 中任意两者之差小于某一给定精度 ε_1，则认为 H 为正确值，否则进行下一步。

(6) 令 $h=\frac{h_1+h_2+h_3}{3}$

重复(2)、(3)、(4)、(5)步骤，直至满足所给定的精度 ε_1 为止。

程序框图，见图 10-17。

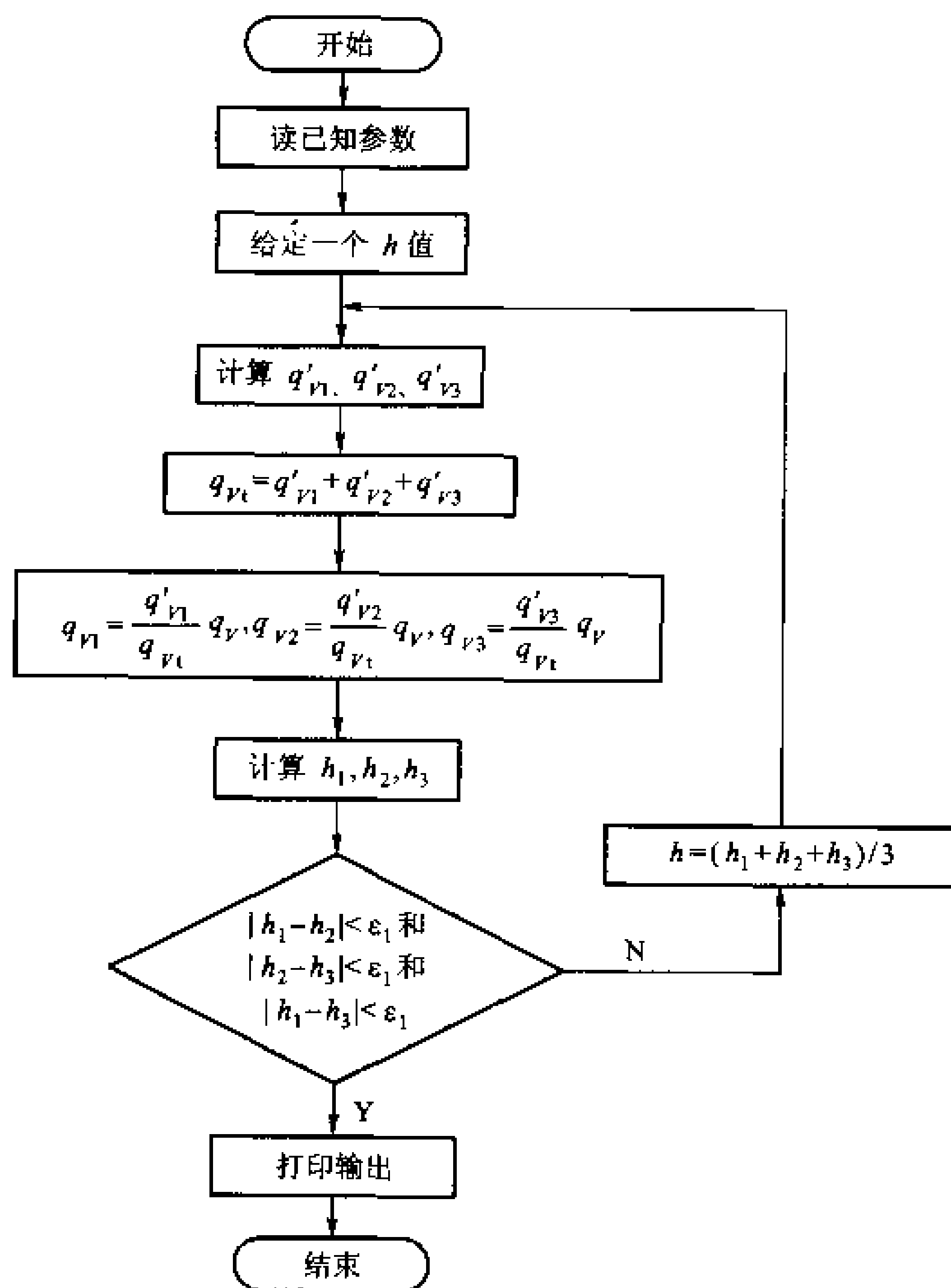


图 10-17

程序说明：

在程序中，用三维数组表示三条管路的各个参数，即 Q (1)、Q (2)、Q (3)分别表示 q_{V1}，q_{V2}，q_{V3}，Q1 (1)，Q2 (2)，Q3 (3)分别表示 q'_{V1}，q'_{V2}，q'_{V3}，V (1)，V (2)，V (3)分别表示 V_1，V_2，V_3，PA 表示 A 点的压力 p_A，PB 表示 B 点的压力 p_B，RHO 表示流体的密度 ρ，LMD (1)、LMD (2)，LMD (3)分别表示 λ_1，λ_2，λ_3，HF (1)、HF (2)、HF (3)分别表示 h_1，h_2，h_3，QT 表示总流量 q_V，QT1 表示 q_{V1}，其余同前例，本程序中取 $\epsilon_1 = 0.05$。

程序清单

```
# include <math.h>
# include <stdio.h>
# define pi 3.141 592 6
# define g 9.806

float CL (float,float,float,int * );

void main ()
{
  int ID [3];
  int i;
  float DLT [3], D [3],L [3],HF [3],V [3],Re [3],LMD [3];
  float Q [3],Q1 [3],V1 [3],LMD1 [3],Re1 [3];
  float QT,QT1,H,NU;

  printf ("please input:d1,d2,d3,l1,l2,l3: \ n");
  scanf ("%f,%f,%f,%f,%f,%f",&D [0],&D [1],&D [2],&L
        [0],&L [1],&L [2]);
  printf ("please input:dlt1,dlt2,dlt3: \ n");
  scanf ("%f,%f,%f",&DLT [0],&DLT [1],&DLT [2]);
  printf ("please input:qt,nu: \ n");
  scanf ("%f,%f",&QT,&NU);

  for (i = 0;i < 3;i + + )ID [i] = 0;
  H = 10.0;
  do
  {
    for (i = 0;i < 3;i + + )
    {
```

```
            LMD1 [i] = 0.02;
            loop:
              V1 [i] = sqrt (2 * g * D [i] * H/L [i]/LMD1 [i]);
              Re1 [i] = V1 [i] * D [i]/NU;
              LMD [i] = CL (DLT [i], D [i], Re1 [i], &ID [i]);
              if (fabs (LMD [i] - LMD1 [i]) < = 5e - 6)Q1 [i] = pi * D [i]
                 * D [i] * V1 [i]/4;
              else {
                LMD1 [i] = LMD [i];
                goto loop;
              }
          }
          QT1 = Q1 [0] + Q1 [1] + Q1 [2];
          for (i = 0; i < 3; i + + )
          {
            Q [i] = QT * Q1 [i]/QT1;
            V [i] = 4 * Q [i]/(pi * D [i] * D [i]);
            Re [i] = V [i] * D [i]/NU;
            LMD [i] = CL (DLT [i], D [i], Re [i], &ID [i])
            HF [i] = LMD [i] * L [i] * V [i] * V [i]/2/g/D [i];
          }
          H = (HF [0] + HF [1] + HF [2])/3;
} while (fabs (HF [0] - HF [1]) < = 0.01&&fabs (HF [1] - HF [2]) < =
      0.01&&fabs (HF [2] - HF [0]) < = 0.01);
      printf ("ID1 = %d \ nID2 = %d \ nID3 = %d \ n", ID [0], ID [1], ID
          [2]);
      printf ("q1 = %7.4fm3/s \ nq2 = %7.4fm3/s \ nq3 = %7.4fm3/s \
          n", Q [0], Q [1], Q [2]);
      printf ("v1 = %7.4fm/s \ nv2 = %7.4fm/s \ nv3 = %7.4fm/s \ n", V
          [0], V [1], V [2]);
      printf ("re1 = %7.4f \ nre2 = %7.4f \ nre3 = %7.4f \ n", Re [0], Re
          [1], Re [2]);
      printf ("lmd1 = %7.4f \ nlmd2 = %7.4f \ nlmd3 = %7.4f \ n", LMD
          [0], LMD [1], LMD [2]);
```

```
        printf ("hf1 = %7.4fm3/s \nhf2 = %7.4fm3/s \nhf3 = %7.4fm3/s \
            n",HF[0],HF[1],HF[2]);
    }
```

举例

已知：图 10 - 15 所示三管路并联，$l_1 = 900$ m，$l_2 = 600$ m，$l_3 = 1\ 200$ m，$d_1 = 0.3$ m，$d_2 = 0.2$ m，$d_3 = 0.4$ m，$\Delta_1 = 0.000\ 3$ m，$\Delta_2 = 0.000\ 03$ m，$\Delta_3 = 0.000\ 024$ m，$\nu = 1 \times 10^{-6}$ m²/s，$\rho = 1\ 000$ kg/m³，$p_A = 9.8 \times 10^5$ Pa，$q_V = 0.4$ m³/s。

求：每个分支管路的流量和 B 点的压力 p_B 为多少？

运行程序

```
input: D(1),D(2),D(3),L(1),L(2),L(3)
0.3,0.2,0.4,900.,600.,1200.
input:DLT(1),DLT(2),DLT(3)
0.000 3,0.000 03,0.000 024
input:QT,PA,NU,RHO
0.4,9.8E5,1.E-6,1000.
```

程序结果如下：

```
ID1 = 4
ID2 = 3
ID3 = 3
q1 = 0.103 0 m³/s
q2 = 0.056 3 m³/s
q3 = 0.240 7 m/s
v1 = 1.456 9 m/s
v2 = 1.791 7 m/s
v3 = 1.915 7 m/s
re1 = 437 057.468 8
re2 = 358 336.593 8
re3 = 766 278.187 5
lmd1 = 0.020 3
lmd2 = 0.013 9
lmd3 = 0.012 1
hf1 = 6.799 2
hf2 = 6.809 1
hf3 = 6.797 3
```

四、分支管路的计算方法

分支管路的形式多种多样，现以图 10-18 所示的三水库系统为例。

已知：三条管路的尺寸（管长为 l、管径为 d，管壁的绝对粗糙度为 Δ），三水库中液面的高度为 z，流体的粘度为 ν。

求：通过三条管路的流量 q_{V1}，q_{V2}，q_{V3}。

分析：设三水库的液面高度满足 $z_1 > z_2 > z_3$，则本问题的关键是判断节点 A 的水头高度 z_A 是大于 z_2 还是小于 z_2。若大于 z_2，则流体是从 A 点流向水库 2，应满足 $q_{V1} = q_{V2} + q_{V3}$。否则流体从水库 2 流向 A 点，满足 $q_{V1} + q_{V2} = q_{V3}$，其计算步骤如下：

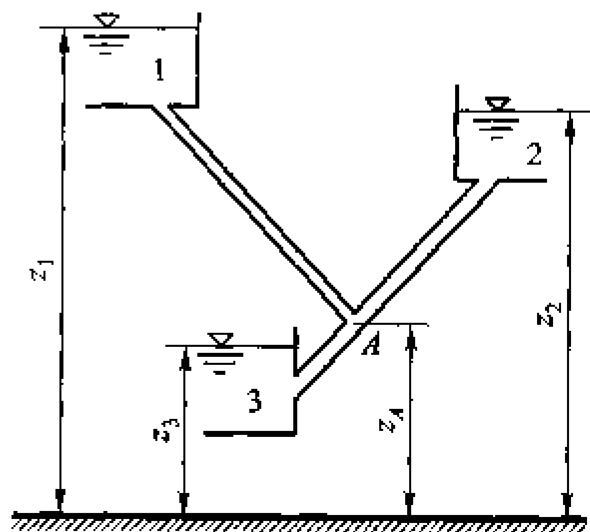


图 10-18

(1) 取 $z_A = (z_1 + z_3)/2$

上式的目的是保证给出的 z_A 在 z_1 和 z_3 之间。

(2) 由(1)知 $h_1 = z_1 - z_A$，$h_2 = |z_2 - z_A|$ 和 $h_3 = z_A - z_3$ 分别为三条管路的能量损失，由此可算出三条管路的流量 q_{V1}、q_{V2} 和 q_{V3}（见简单管路的第二类问题）。

(3) 判断是否满足 $z_2 < z_A$，若满足则执行(4)，否则执行(5)。

(4) 判断 q_{V1} 与 $q_{V2} + q_{V3}$ 之差是否小于某一给定的精度 ε_2，若满足则执行(6)，否则取

$$q_{V1} = \frac{q_{V1} + q_{V2} + q_{V3}}{2}$$

用此新的 q_{V1} 计算 h_1（简单管路的第一类问题），从而算出新的 z_A，然后重复(2)，(3)步骤。

(5) 判断 $q_{V1} + q_{V2}$ 与 q_{V3} 之差的绝对值是否小于给定的精度 ε_2。若满足则执行(6)，否则取 q_{V3} 为

$$q_{V3} = \frac{q_{V1} + q_{V2} + q_{V3}}{2}$$

用此新的 q_{V3} 计算 h_3（简单管路的第一类问题），从而算出新的 z_A 重复(2)，(3)步骤。

(6) 认为前面算出的 q_{V1}，q_{V2} 和 q_{V3} 是正确的，结束计算，输出结果。

程序框图，见图 10-19。

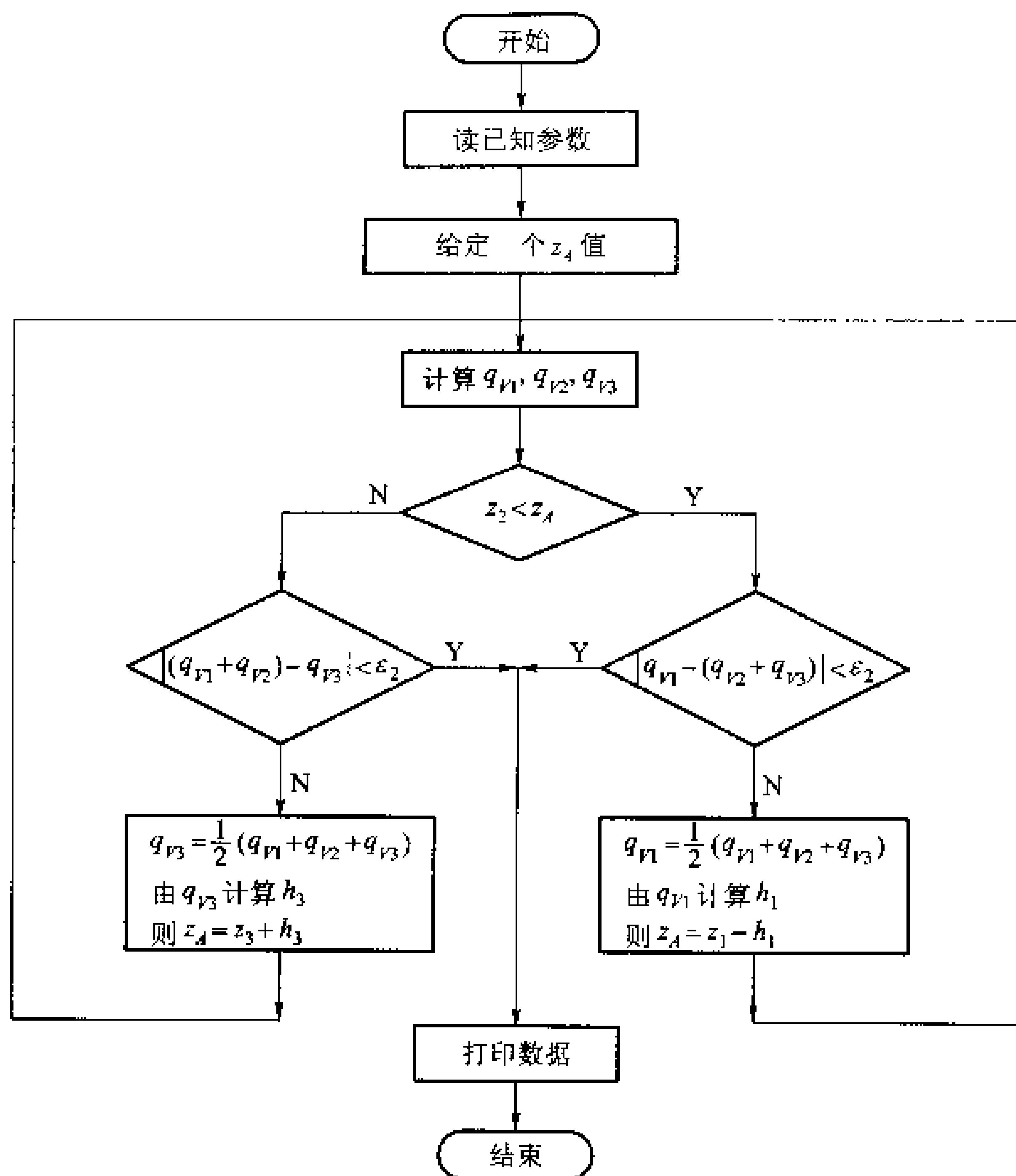


图　10 - 19

程序说明

在程序中，用三维数组表示三条管路的各个参数，参数表示与前述程序相同，取精度 $\varepsilon_2=0.001$。

程序清单

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#define pi 3.141 592 6
#define g 9.806

float CL (float,float,float,int * );

void main ()
```

```
{
  int ID [3];
  int i;
  float DLT [3],D [3],L [3],HF [3],V [3],Re [3],LMD [3];
  float Q [3],LMD1 [3],Z [3];
  float NU,Re1,ZA;

  printf ("please input:d (1), d (2),d (3),l (1),l (2),l (3) \ n");
  scanf ("%f,%f,%f,%f,%f,%f ",&D[0],&D [1],&D [2],&L
        [0],&L [1],&L [2]);
  printf ("please input:dlt (1),dlt (2),dlt (3),z (1),z (2),z (3) \ n");
  scanf ("%f,%f,%f,%f,%f,%f ",&DLT [0],&DLT [1],&DLT [2],
        &Z [0],&Z [1],&Z [2]);
  printf ("please input:nu: \ n");
  scanf ("%f ",&NU);
  for (i = 0;i < 3;i + + )ID [i] = 0;
  ZA = (Z [0] + Z [2])/2;
loop1:
  for (i = 0;i < 3;i + + )
  {
    LMD1 [i] = 0.02;
    loop:
      V [i] = sqrt (2 * g * D [i] * fabs (Z [i] - ZA)/L [i]/LMD1 [i]);
      Re [i] = V [i] * D [i]/NU;
      LMD [i] = CL (DLT [i],D [i],Re [i],&ID [i]);
      if (fabs (LMD [i] - LMD1 [i]) < = 5e - 6)Q [i] = pi * D [i] * D
         [i] * V [i]/4;
      else {
        LMD1 [i] = LMD [i];
        goto loop;
      }
  }
  if ((ZA - Z [1]) < 0)
  {
     if (fabs (Q [0] + Q [1] - Q [2]) > 0.001)
```

```
            {
              Q[2] = (Q[0] + Q[1] + Q[2])/2;
              V[2] = 4 * Q[2]/(pi * D[2] * D[2]);
              Re[2] = V[2] * D[2]/NU;
              LMD[2] = CL(DLT[2],D[2],Re[2],&ID[2]);
              ZA = Z[2] + LMD[2] * L[2] * V[2] * V[2]/(2 * g * D[2]);
              goto loop1;
            }
        }
        else {
          if (fabs(Q[0] - (Q[1] + Q[2])) > 0.001)
            {
              Q[0] = (Q[0] + Q[1] + Q[2])/2;
              V[0] = 4 * Q[0]/(pi * D[0] * D[0]);
              Re[0] = V[0] * D[0]/NU;
              LMD[0] = CL(DLT[0],D[0],Re[0],&ID[0]);
              ZA = Z[0] - LMD[0] * L[0] * V[0] * V[0]/(2 * g * D[0]);
              goto loop1;
            }
      }
        printf("q1 = %7.4fm3/s \nq2 = %7.4fm3/s \nq3 = %7.4fm3/s \n",Q
              [0],Q[1],Q[2]);
        printf("v1 = %7.4f \nv2 = %7.4f \nv3 = %7.4f \n",V[0],V[1],V[2]);
        printf("re1 = %7.4f \nre2 = %7.4f \nre3 = %7.4f \n",Re[0],Re[1],
              Re[2]);
    printf("za = %7.4fm \n",ZA);
}
```

举例

已知：图 10 – 18 所示系统，$l_1 = 600$ m，$l_2 = 800$ m，$l_3 = 500$ m，$d_1 = 1$ m，$d_2 = 0.5$ m，$d_3 = 0.7$ m，$\Delta_1 = 0.000\ 1$ m，$\Delta_2 = 0.000\ 3$ m，$\Delta_3 = 0.000\ 2$ m，$z_1 = 100$ m，$z_2 = 50$ m，$z_3 = 10$ m，$\nu = 1 \times 10^{-6}$ m^2/s。

求：各个分支管路的流量 q_{V1}，q_{V2}，q_{V3}。

运行程序

```
input: D(1),D(2),D(3),L(1),L(2),L(3)
1.0,0.5,0.7,600.,800.,500.
```

```
input:DLT(1),DLT(2),DLT(3),Z(1),Z(2),Z(3)
0.000 1.0.000 3,0.000 2,100.,50..10.
input:Nu
1.E-6
```

程序结果如下：

```
q1 = 5.696 7 m³/s
q2 = 1.284 3 m³/s
q3 = 4.411 5 m³/s
v1 = 7.253 3 m/s
v2 = 6.541 0 m/s
v3 = 11.463 1 m/s
re1 = 7 253 255.500 0
re2 = 3 270 521.750 0
re3 = 8 024 197.500 0
za = 80.724 8 m
```

§10-4 有压管路中的水击

在有压管路中流动的液体，由于某种外界因素(如阀门突然动作或泵突然停止工作等)使液流速度突然改变，这种因液体动量的变化而引起压强的突变(急剧交替上升或下降)现象称为水击。压强的交替变化对管壁或阀门、仪表等产生类似于锤击的作用，因此，水击亦称为“水锤”。

水击所造成的压强升高可以达到管路中正常压强的许多倍，而且频率很高。因此，水击现象将影响管道系统的正常工作，严重时甚至引起管道破裂，仪表损坏。所以，对水击现象的研究是流体力学的一项重要任务，本节将分别讨论水击现象的物理过程、压强升高值计算和减弱水击的一般措施。

1. 水击现象及其物理过程

前面几章讨论的均为不可压缩流体，由于忽略了可压缩性而使研究大为简化，在压强不高时，所得到的结果与实际情况基本符合。但是，对于非恒定流动的水击现象，必须考虑可压缩性才能解释现象本身和说明其物理过程。

因为水击现象会造成很大的压强升高，因此还必须考虑管壁的膨胀。

现在以图 10-20 所示装置研究水击现象的物理过程。

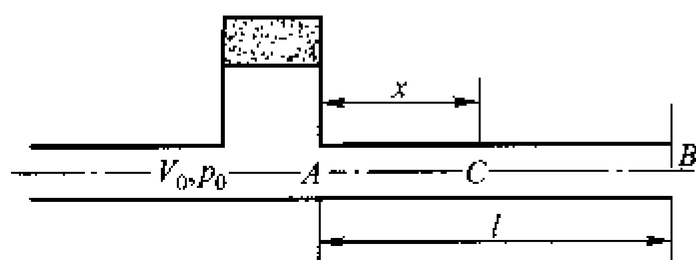


图　10－20

在管道 A 处装有容量足够大的蓄能器，所以认为所产生的**水击波**被截止于 A 处。液流方向自 A 流向 B。为使讨论简化，我们先忽略液体粘性的影响，并假设管道长为 l，直径不变。

为便于分析，现假设 B 处的阀门瞬时关闭，即关闭时间为零。同时，我们假设管中的液体由无数微段组成，彼此间互相紧挨着，但相互间又无联系。

可以按以下四个过程来研究水击现象，设管中原流动状态下压强为 p_0，流速为 V_0。

(1) 减速、升压过程

当 B 处闸门突然关闭时，紧靠闸门的微段液体立刻停止流动。随后，紧接的另一微段将随之停止流动，这样，管 AB 中的液体依次逐段停止下来。当液体突然停止流动时，动能转化为压强能，使已停止的液体中压强升高，这种压强升高使液体被压缩，同时也将使围绕这段液体的管壁膨胀。液流的停止和由此造成压强升高的现象以波的形式沿管路向上游 A 处传播。这一波称为压强升高波。

因假设液体和管壁均匀，因此管中压强波的传播速度为常数 c。设管道长度为 l，则经过一个短时间 $t = l/c$ 之后，整个液柱 AB 将停止不动。即升压波传至 A 处，AB 段全部处于升压状态。与管中原初始压强 p_0 相比升高的压强 Δp 称为水击压强。所以，当经过 $t = l/c$ 时刻后，AB 段中的流速 $V = 0$，压强 $p = p_0 + \Delta p$。

(2) 压强恢复过程

因为我们已假定蓄能器的容量足够大，即压强波不会引起蓄能器中压强明显的变动。因此，当压强升高波传至 A 点时，被蓄能器截止，即 A 左端压强认为是不变的。可以看出，在 A 点两侧由于压差 Δp 的作用将有流体开始向 A 左方倒流，使压强恢复到原来的 p_0，紧挨着其右边的一段液体这时将向左作减压流动。这种逐段降压、升速流动形成了一个降压波，其传播速度为 c。经过 $t = l/c$ 后，减压波传至闸门 B 处。

在这个过程中，AB 段内液体逐段自右向左运动，各点速度为原始速度，即 $V = V_0$，其压强自 $p_0 + \Delta p$ 降至 p_0。

(3) 压强降低过程

因为我们假定流体无粘性，即没有水头损失，因此，当压强恢复波传至闸门处时，整个 AB 管中的液体具有自右向左的运动速度 V_0，压强 p_0。这样，在紧靠闸门处的液体会出现离开闸门的趋势，而在闸门处没有液体可以给予补充，其结果将使 B 处液体静止，压强降低，密度减小。在理想情况下，压强降低值应等于过程(1)中的压强升高值 Δp。同时，这个压强下降将与停止流动一起逐段自 B 传至 A，形成降压波。降压波的传播速度同样为 c，经过时间 $t=l/c$，降压波传至 A 处。此时，AB 段流动全部停止，即 $V=0$，压强为 $p=p_0-\Delta p$。

(4) 压强恢复过程

压强降低波传至 A 时，为蓄能器所截止，此时出现 A 点左侧压强比右侧高 Δp 值的状态。在 Δp 的作用下，A 左侧的液体又开始向右侧管中流动，流动速度仍为原始初速度 V_0，而 A 右侧的压强亦恢复至原压强 p_0。这个过程自紧靠 A 右侧的微段开始，依次传向闸门 B 处，又经过 $t=l/c$ 时间后，整个 AB 管内，压强全部恢复至 p_0，速度亦为初始值 V_0。

当(4)中的压强恢复波传至 B 处时，若闸门仍然关闭，则重又造成(1)时的升压波，随之重复出现(2)、(3)、(4)过程。对于理想情况，液体没有粘性阻力损失，且管子没有变形，因此在压强波传播过程中能量没有消耗，整个水击现象将依次以上面四个波动过程往复、交替地在管中 AB 段一直重复下去。

对于图 10－20 中所示之闸门 B 处，压强随时间的变化规律如图 10－21 中实线所示。

AB 段中任意点，如距 A 为 x 处之 C 点，压强变化如图 10－22 a 所示。

在位于蓄能器的 A 点处，$x=0$，该点升压和降压只出现于一瞬间，压强变化如图 10－22 b 所示。

实际上，由于液体的粘性和管道的变形必将引起能量损失，因此，由于水击现象引起的能量在传播过程中必将逐渐损失掉，直至最后完全消失。闸门 B 处压强的实际变化规律如图 10－21 中虚线所示。

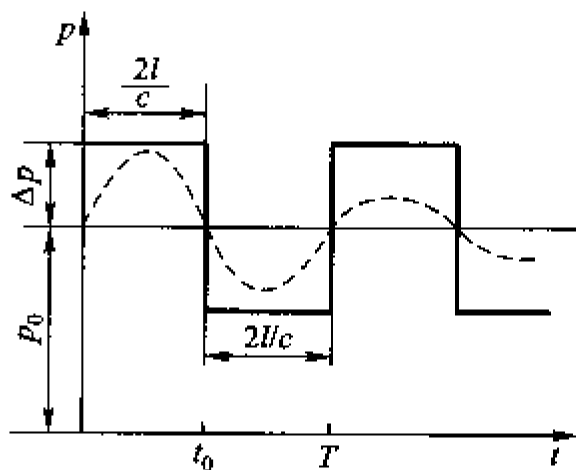


图 10－21

从闸门突然关闭开始到水击波第一次返回闸门需要 $\frac{2l}{c}$ 时间，它也就是闸门处第一次压力恢复的时间，令 $t_0=\frac{2l}{c}$ 称为水击波的**波相**。由图 10－21 可以看出，

每经过 t_0 时间，水击压力变化一次，称为“倒相”。而每经 $T=\frac{4l}{c}=2t_0$ 时间，水击现象重复一次，因此将 T 称为**水击波的周期**。

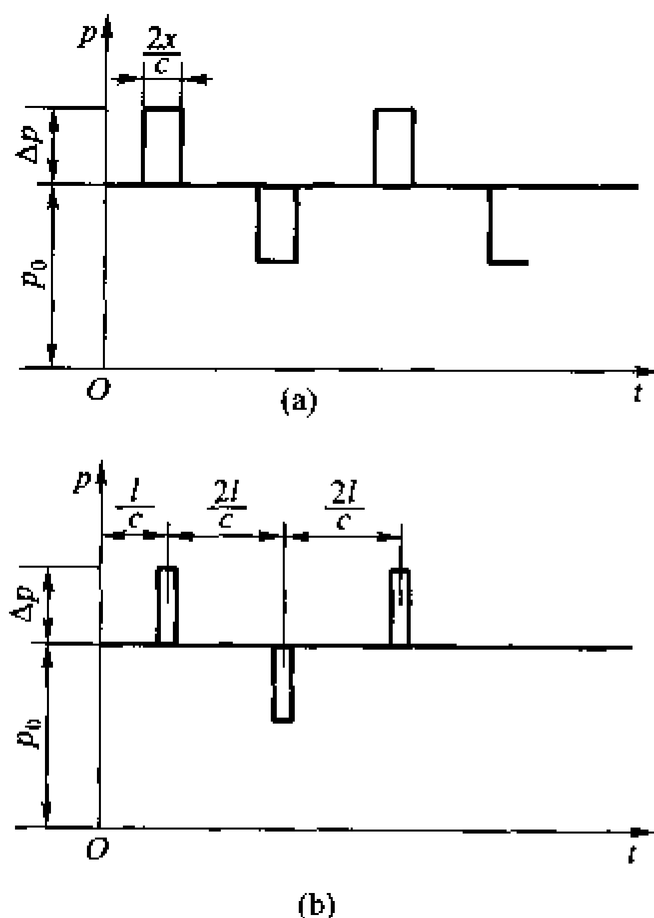


图　10－22

在实际过程中，不可能在瞬间将闸门突然关闭，总有一个关闭时间 t_k，按 t_k 和 t_0 的相对大小，常将水击分为“**直接水击**”和“**间接水击**”。所谓直接水击是指闸门关闭时间小于水击波的相，即 $t_k < t_0$，而当 $t_k > t_0$ 时，称为间接水击。可以看出，在直接水击的情况下，压强波未返回闸门时，闸门已经关闭了。而在间接水击的情况下，压强恢复波在闸门完全关闭之前已经返回到闸门处，这样，压强升高部分抵消，使间接水击的最大压强升高值小于直接水击。

2. 最大压强升高值计算

由前面的分析可以看出，在水击现象的研究中，所产生的压强升高值(即水击压强)的确定是核心问题。

当图 10－20 所示 B 处闸门突然关闭时，取如图 10－23 所示靠近 B 端的一段管道和液体进行研究。在 Δt 时间内，闸门处产生的升压波向左传播距离为 Δtc，该段管内液体流速此时为零，压强由 p_0



图　10－23

升至 $p_0+\Delta p$，管道的截面积由 A 扩大为 $A+\Delta A$。

该段液体所受的轴向力为

$$-(p_0+\Delta p)A+p_0A=-\Delta pA$$

在该段液体两端所增加的微元环形面积 ΔA 上受力互相平衡。

该段流体质量为原 Δtc 长度管内流体与 Δt 时间以速度 V_0 流入的流体质量之和，即

$$\rho c\Delta tA+\rho V_0\Delta tA=\rho A(c+V_0)\Delta t$$

对该段流体列动量方程

$$\begin{aligned}-\Delta pA\Delta t&=\rho A(c+V_0)\Delta t(0-V_0)\\&=-\rho A(c+V_0)V_0\Delta t\end{aligned}$$

最后得

$$\Delta p=\rho(c+V_0)V_0 \tag{10-9}$$

通常 $c\gg V_0$，因此

$$\Delta p=\rho cV_0 \tag{10-10}$$

该式称为**儒科夫斯基公式**，在水击压强计算中十分重要。

当闸门只有部分突然关闭时，其水击过程与上面完全相同，只是速度由 V_0 降为 V'，用前面类似的方法可以求得最大压强升高值计算公式为

$$\Delta p=\rho c(V_0-V') \tag{10-11}$$

在间接水击的情况下，理论分析比较复杂，在闸门处的最大压强升高值通常按下式近似计算。

$$\Delta p=\rho V_0\frac{2l}{t_k} \tag{10-12}$$

上面讨论的前提是闸门突然关闭，对于工程中的闸门逐渐关闭过程，可以看作在整个关闭时间内由一系列部分关闭叠加而成，其压强可以看作是所有部分关闭升高压强的代数和。

3. 水击波的传播速度

现在仍以图 10-23 所示管段来计算水击波的传播速度 c。

在 $c\Delta t$ 长度的控制体内，由于压强增加，管道将扩张，在 Δt 时间内将有 $V_0A\Delta t$ 的液体补充进来。显然，两者体积可以近似看作相等(其中忽略了补充进入体积内液体的压缩量)，即

$$V_0A\Delta t=\Delta tc\,\mathrm{d}A+\kappa\Delta pAc\Delta t$$

由此得

$$V_0=c(\mathrm{d}A/A+\kappa\Delta p)$$

式中 κ——液体的体积压缩率。

由于

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=\frac{2\pi r\mathrm{d}r}{\pi r^2}=2\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{2\sigma}{E}=\frac{D\Delta p}{\delta E}$$

式中　σ——管壁内所受的附加应力；

r、D——管道内半径、直径；

δ——管壁厚度；

E——管壁材料的弹性模量。

代入方程可得

$$V_0 = c\Delta p\left(\frac{D}{\delta E}+\kappa\right)$$

$$= c\Delta p\left(\frac{D}{\delta E}+\frac{1}{K}\right)$$

式中　$K=1/\kappa$——液体体积模量。

由于

$$\Delta p = \rho c V_0$$

所以

$$c^2 = \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{\dfrac{D}{\delta E}+\dfrac{1}{K}} = \frac{\dfrac{K}{\rho}}{1+\dfrac{DK}{\delta E}}$$

最后得

$$c = \sqrt{\frac{\dfrac{K}{\rho}}{1+\dfrac{DK}{\delta E}}} \tag{10－13}$$

对于无弹性管壁 $E\to\infty$ 则式(10－13)为

$$c = c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

对于水 $c_0=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}=1\ 416\ \mathrm{m/s}$

相当于声音在无边界水中的传播速度。

4. 减弱水击的措施

水击现象所产生的压强升高值常常是很大的，如当管内水流速度 $V=1\ \mathrm{m/s}$ 时，若突然关闭闸门，其水击压强升高可达 $\Delta p=10^6\ \mathrm{Pa}$，约为 10 个大气压。由此可以想象，若管内流速增加时，将造成更高的水击压强。这样高的压强将对实际工程造成严重的威胁，它可能使管路破裂，使液压和液动机械不能正常工作，危及系统各种仪表和元件，引起振动和噪音等，而瞬时出现的压强降低将引起气穴，破坏工作的连续性，因此，水击现象在系统正常的工作中是不希望出现的。但是，在实际工作中，为了达到各种不同的工作要求，常常必须在工作过程中改变管内流速，因而水击现象往往不可避免，只能尽量想办法减小它们的影响，通常人们采取以下几种措施：

(1) 在靠近水击产生处装设蓄能器、安全阀等用以缓冲或减小水击波的强度和传播距离；

(2) 尽量使闸门、阀门等启闭动作平缓；

(3) 限制管道中的流速，从而减小最大压强升高值；

(4) 在可能的条件下，尽量选用富有弹性的管道；

(5) 采取必要的附加装置，以便尽量使水击波衰减。比如，人们常在水电站的压力管路上设置调压塔用以减弱水击。

在实际工程中，必须按具体情况，采用不同的措施来减弱水击，使系统正常工作。

当然，对于水击现象所产生的压强升高现象人们尽量想方设法加以利用，水锤扬水器(又称为水锤泵)就是利用水击能量将水提升至一定高度的装置。

例　　题

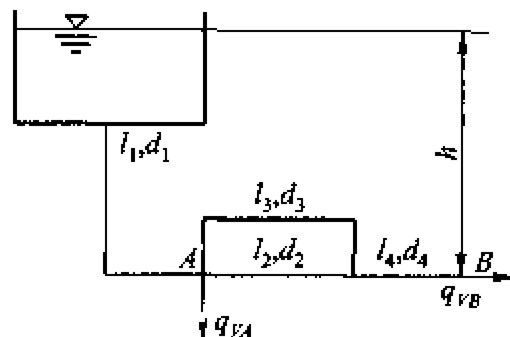
例 10-1　一管路系统如图所示，各支管的长度、直径及沿程损失因数为：

$$l_1=300\ \text{m},\ d_1=225\ \text{mm},\ \lambda_1=0.03;$$
$$l_2=150\ \text{m},\ d_2=125\ \text{mm},\ \lambda_2=0.038;$$
$$l_3=250\ \text{m},\ d_3=150\ \text{mm},\ \lambda_3=0.032;$$
$$l_4=100\ \text{m},\ d_4=175\ \text{mm},\ \lambda_4=0.042。$$

管路系统在节点处流出 $q_{VA}=35$ L/s、端点 B 处流出 $q_{VB}=50$ L/s 的流量，试确定：

(1) 水位高 h；

(2) 节点 A 处的水头 h_A。



例 10-1 图

解　由流量连续性原理，按题图所标各管段序号有

$$q_{V1}=q_{VA}+q_{VB}=35+50=85\ \text{L/s}$$

$$q_{VB}=q_{V3}+q_{V2}$$

对水力长管，水箱中的水位高应等于沿程损失之和，即

$$h=h_1+h_2+h_4=0.082\ 7\left(\frac{\lambda_1 l_1 q_{V1}^2}{d_1^5}+\frac{\lambda_2 l_2 q_{V2}^2}{d_2^5}+\frac{\lambda_4 l_4 q_{VB}^2}{d_4^5}\right)$$

又根据管路并联特性，有

$$h_2=h_3$$

即

$$\frac{\lambda_2 l_2 q_{V2}^2}{d_2^5}=\frac{\lambda_3 l_3\,(q_{VB}-q_{V2})^2}{d_3^5}$$

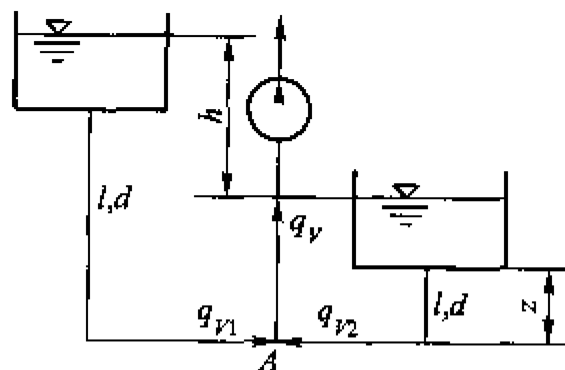
解得
$$q_{V2} \approx 21.45 \text{ L/s}$$
于是得到水箱水位高为
$$h = 0.0827\left(\frac{\lambda_1 l_1 q_{V1}^2}{d_1^5} + \frac{\lambda_2 l_2 q_{V2}^2}{d_2^5} + \frac{\lambda_4 l_4 q_{VB}^2}{d_4^5}\right) = 21.72 \text{ m}$$
节点 A 处水头为
$$h_A = h - h_1 = h - 0.0827\frac{\lambda_1 l_1 q_{V1}^2}{d_1^5} = 12.39 \text{ m}$$

例 10－2　流量 $q_V = 4$ L/s 的泵从两个有着初始液位差 $h = 0.5$ m 的油箱中吸油。在节点 A 以前的两条管路具有相同长度 $l = 10$ m 和直径 $d = 50$ mm，若仅计算沿程损失，且取 $\lambda = 0.03$。试求：

(1) 泵开始吸油时，每个油箱流出的流量 q_{V1} 和 q_{V2} 各为多少？

(2) 当 h 为多少时，由低位油箱流出的流量 q_{V2} 等于零？

(3) 当图示 z 为多少时，高位油箱泄空后空气不至于进入泵内，又使低位油箱可以完全泄空？



例 10－2 图

解　(1) 当只考虑沿程损失时，对两根油管有
$$h_1 = \frac{q_{V1}^2 l}{K^2};\quad h_2 = \frac{q_{V2}^2 l}{K^2}$$
这里由于 $d_1 = d_2 = d$，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$，故 $K_1^2 = K_2^2 = K^2$。而 $h_1 - h_2 = h$，即
$$\frac{q_{V1}^2 l}{K^2} - \frac{q_{V2}^2 l}{K^2} = h$$
所以
$$q_{V1}^2 - q_{V2}^2 = \frac{hK^2}{l} \tag{①}$$
对 A 点有连续性方程
$$q_V = q_{V1} + q_{V2} \tag{②}$$
将式①、②联立解得
$$q_{V1} = \frac{q_V}{2} + \frac{hK^2}{2lq_V} \tag{③}$$
$$q_{V2} = \frac{q_V}{2} - \frac{hK^2}{2lq_V}$$
以上式中
$$K^2 = \frac{\pi^2 g d^5}{8\lambda} \approx 1.26 \times 10^{-4} \text{ m}^6/\text{s}^2$$

将已知参数代入③式中，可解得

$$q_{V1} \approx 2.79 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

$$q_{V2} \approx 1.21 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

（2）对 $q_{V2}=0$，代入式①及式②中得

$$q_{V1}^2 = q_V^2 = \frac{hK^3}{l}$$

所以

$$h = \frac{q_V^2 l}{K^2} \approx 1.27\ \mathrm{m}$$

即当 $h=1.27$ m 时，由低位油箱流出的流量 q_{V2} 为零。请读者讨论当 $h>1.27$ m 时会出现什么情况。

（3）当高位油箱流空时，有 $q_{V1}=0$，由能量关系

$$h_2 = z - \frac{p_A}{\rho g} = \frac{q_V^2 l}{K^2}$$

欲不进空气，应有 $p_A \geqslant 0$，即

$$z - \frac{q_V^2 l}{K^2} \geqslant 0$$

故

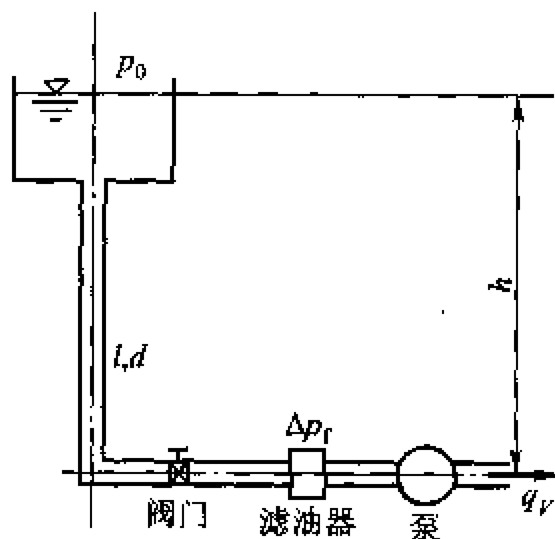
$$z \geqslant \frac{q_V^2 l}{K^2} \approx 1.27\ \mathrm{m}$$

当 $z \geqslant 1.27$ m 时，高位水箱流空时空气不致进入泵内，可以使低位油箱完全流空。

习　题

10-1　何为“短管”？何为“长管”？区分它们的意义何在？

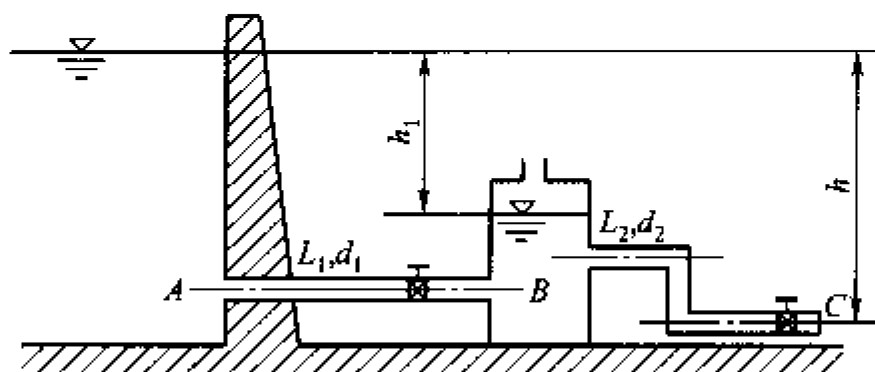
10-2　有一油路如图。已知流量 $q_V=1.2\times10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$，管中油液运动粘度 $\nu=1.2\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，密度 $\rho=860\ \mathrm{kg/m^3}$，管子长 $l=3$ m，直径 $d=40$ mm，管子入口损失因数 $\zeta_1=0.5$、弯管 $\zeta_2=3.3$、阀门 $\zeta_3=2.5$，滤油器损失压降 $\Delta p_f=6.86\times10^3$ Pa，油箱液面高 $h=1.7$ m，求油液流入泵前的绝对压强。



题10-2图

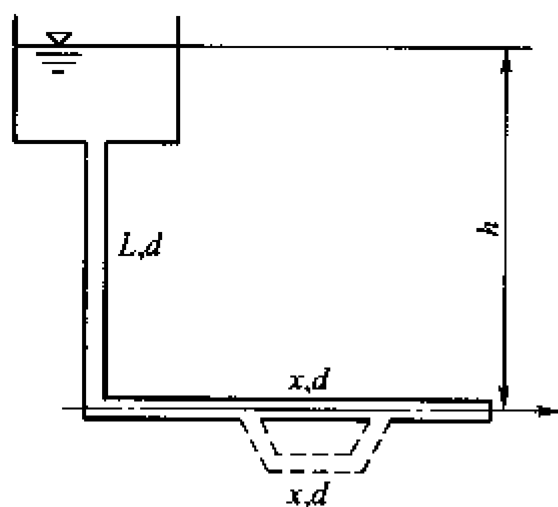
10-3　水由水池 A 沿 $L_1=25$ m，$d_1=75$ mm 的输水管流入开口水箱 B，并从 B 经过 $L_2=150$ m，$d_2=50$ mm 的输水管流入大气。设 AB 段沿程损失因数 $\lambda_1=0.035$，总局部损失因数 $\zeta_1=3.5$；BC 段 $\lambda_2=0.04$，$\zeta_2=4$，水头 $h=10$ m。试求管路系统中的流量 q_V 及水池 A 与水箱 B 的水位差 h_1。若平行于 L_1、

d_1 再并联一根与之相同的水管时，流量如何变化？

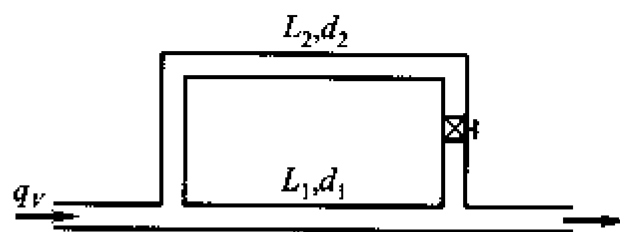


题 10－3 图

10－4　水从具有固定水位 $h=15$ m 的水箱经过长度 $L=150$ m 及直径 $d=50$ mm 的输水管流入大气中。为了使流量增加 20%，需要并联同样直径 d 的管子长度 x 为多少？仅考虑 $\lambda=0.025$ 的沿程损失。



题 10－4 图



题 10－5 图

10－5　试求 $q_V=25\times10^{-3}$ m³/s 在两根并联管路中是如何分配的？并联管路中水头损失又为多少？其中一根管长 $L_1=30$ m，直径 $d_1=50$ mm，另一根管(有 $\zeta=3$ 的阀门) $L_2=50$ mm，$d_2=100$ mm，假设沿程损失因数 $\lambda_1=0.04$ 及 $\lambda_2=0.03$。

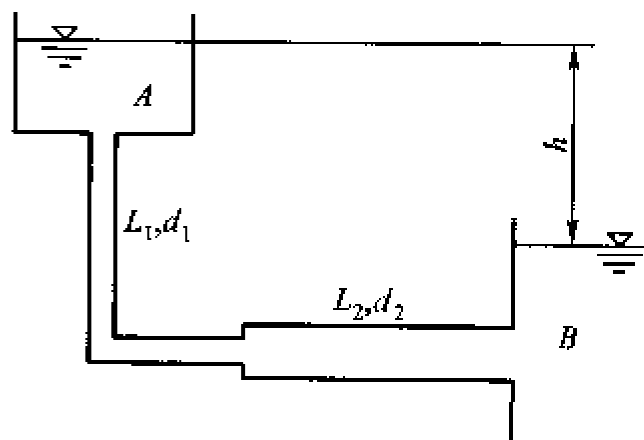
10－6　水沿两根同样长度 $L_1=L_2=40$ m，直径各为 $d_1=40$ mm，$d_2=80$ mm 的串联管路由水箱 A 自由地流入水池 B 中。

设 $\lambda_1=0.04$，$\lambda_2=0.035$，$h=20$ m，试确定：

(1) 流量 q_V 为若干？

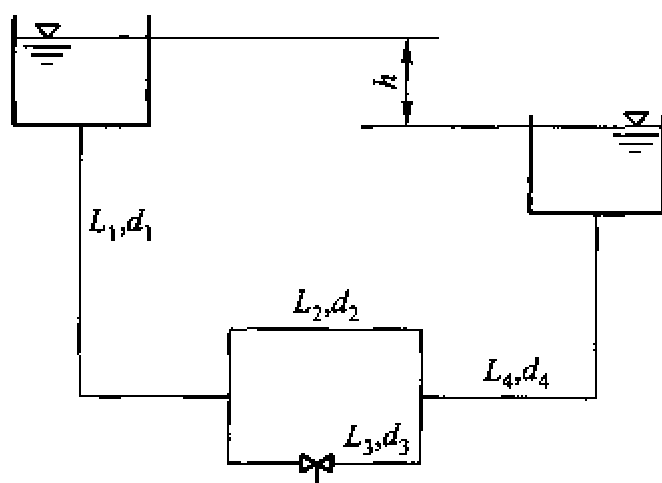
(2) 对 L_1，d_1 管并联同样长度及直径的支管时，总流量 q_V 为若干？

(3) 给 L_2、d_2 管并联同样长度及直径的支管时，总流量 q_V 为若干？比较(2)(3)的结果。



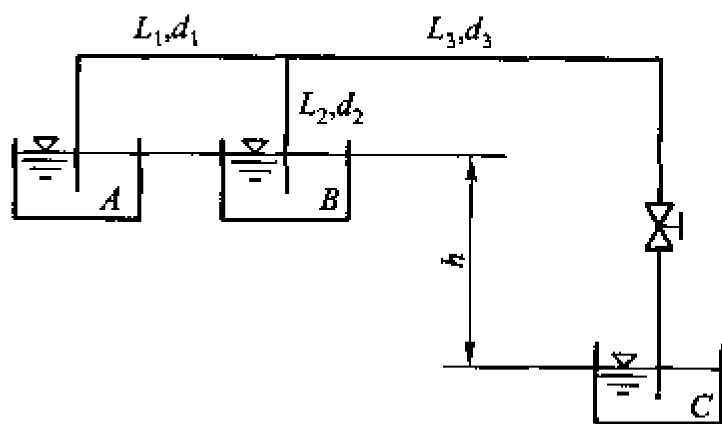
题 10－6 图

10－7 试确定图示系统的总流量 q_V。设(1)阀门全闭；(2)阀门打开，且 $\zeta = 30$。已知 $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 100$ m，$d_1 = d_2 = d_4 = 100$ mm，$d_3 = 200$ mm，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0.025$，$\lambda_3 = 0.02$，$h = 24$ m。



题 10－7 图

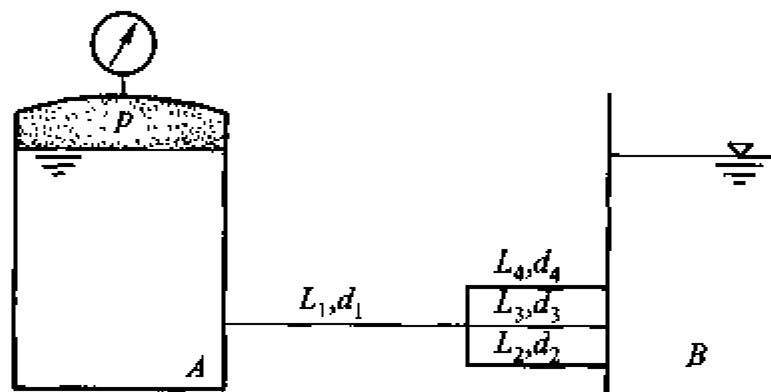
10－8 水由水位相同的两个蓄水池 A 和 B，沿 $L_1 = 200$ m、$d_1 = 200$ mm 及 $L_2 = 100$ m、$d_2 = 100$ mm 的两根管子，流入长 $L_3 = 720$ m、直径 $d_3 = 200$ mm 的主管，并流入水池 C 中。设 $h = 15$ m，$\lambda_1 = \lambda_3 = 0.02$，$\lambda_2 = 0.025$，求：



题 10－8 图

(1) 排入 C 中的流量 q_V；

(2) 若要 q_V 减少 $\frac{1}{2}$，阀门损失因数 ζ 应为何值？

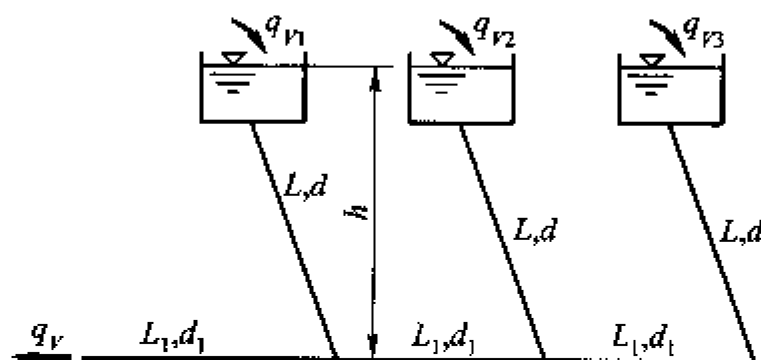


题 10－9 图

10－9　如图所示系统，两容器水位相同，管路尺寸为：$L_1=400$ m，$d_1=100$ mm；$L_2=180$ m，$d_2=100$ mm；$L_3=50$ m，$d_3=100$ mm，$L_4=400$ m；$d_4=200$ mm。问当容器 A 水面上的压强 p 为多大时，管 4 的流量为 $q_{V4}=40\times10^{-3}$ m³/s？取 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.025$，$\lambda_4=0.02$。

10－10　水由三个相同且水位不变($h=10$ m)的贮水箱，沿着三根长均为 $L=50$ m、直径 $d=100$ mm，沿程损失因数 $\lambda=0.025$ 的输水管，流入由每段长 $L_1=80$ m、直径 $d_1=200$ mm 损失因数 $\lambda_1=0.021$ 的三段同样管段所组成的干管。试确定：

(1) 由于管流入大气的流量 q_1；



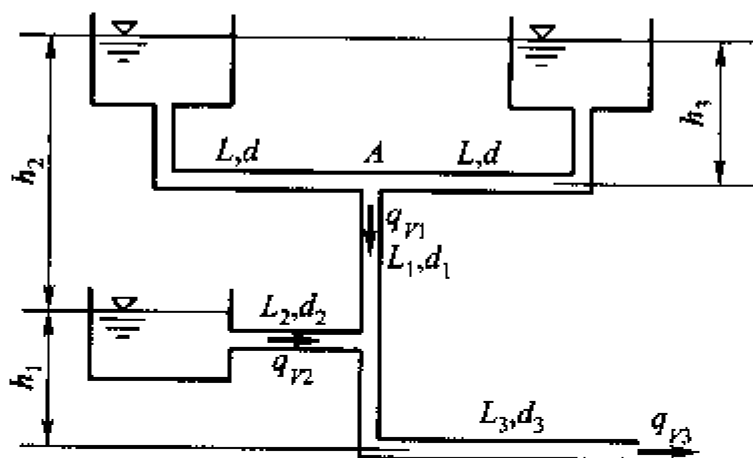
题 10－10 图

(2) 为保持三个贮水箱中水位不变，q_{V1}，q_{V2}，q_{V3}各应是多少？

10－11　如图所示的管路系统，设各水箱水位为 $h_1=5$ m，$h_2=10$ m；各管路尺寸：$L=400$ m，$L_1=L_2=100$ m，$L_3=200$ m，$d_1=d=100$ mm，$d_2=d_3=150$ mm；取 $\lambda_1=\lambda=0.025$，$\lambda_2=\lambda_3=0.023$。试求：

(1) 流量 q_{V1}，q_{V2}，q_{V3}；

(2) 当 $h_3=5$ m 时，A 点的压强 p_A。

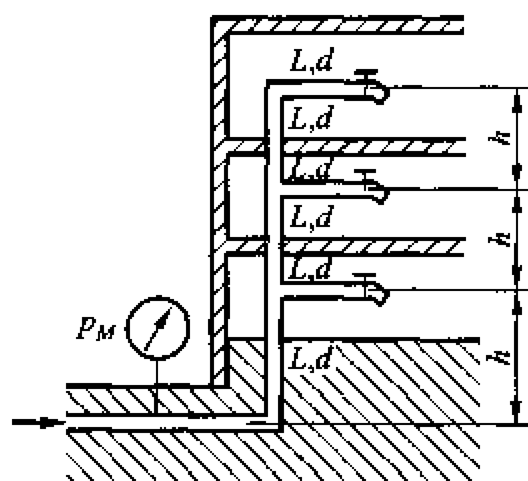


题 10－11 图

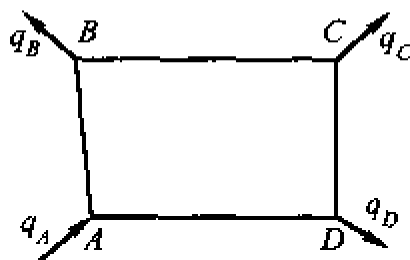
10－12　某三层楼的自来水管路如图。已知 $L=4$ m，$d=60$ mm，$h=3.5$ m，采用 $\lambda=0.03$，龙头全开时损失因数 $\zeta=3.0$，不计其它部分的局部损失，试求当龙头全开时供给每一住宅的流量不小于 3×10^{-3} m³/s 时，供水压强 p_M 应为多少？

10－13　如图所示的环状管网，水在 A 处流入，流量 $q_A=0.4$ m³/s，在 B，C，D 处流出，流量分别为 $q_B=0.15$ m³/s，$q_C=0.1$ m³/s，$q_D=0.15$ m³/s。管子的长度为 $AB=CD=$

150 m，$BC = 300$ m，$DA = 240$ m。所有管子的直径 $d = 60$ cm，管中的沿程损失因数均为 $\lambda = 0.007\,8$。若 A 处的压强为 $p_A = 105$ kN·m^{-2}，试求通过每条管中的流量和 B、C、D 处的压强。

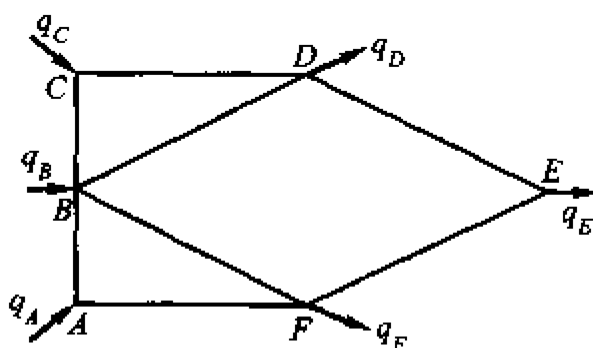


题 10－12 图

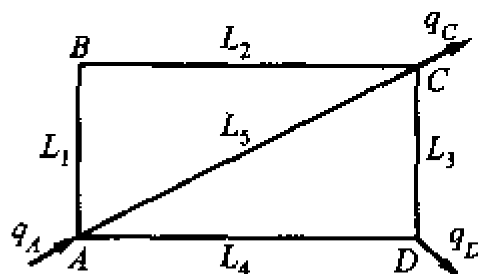


题 10－13 图

10－14 如图所示的管网中，$BC = AB = 150$ m，$CD = AF = 250$ m，$BD = DE = EF = FB = 300$ m。所有管的直径为 $d = 0.6$ m，管中沿程损失因数 $\lambda = 0.007\,8$。若在 E 处的压强为 $p_E = 50$ kN·m^{-2}，且各节点处的流量分别为 $q_A = 0.2$ m^3/s，$q_B = 0.4$ m^3/s，$q_C = 0.2$ m^3/s，$q_D = 0.3$ m^3/s，$q_E = 0.2$ m^3/s，$q_F = 0.3$ m^3/s，试求 p_A，p_B，p_C 和所有管中的流量。



题 10－14 图



题 10－15 图

10－15 如图所示的管网，各管的直径均为 $d = 0.5$ m，管中沿程损失因数 $\lambda = 0.005$，管子长度为 $L_1 = 100$ m，$L_2 = 200$ m，$L_3 = 100$ m，$L_4 = 200$ m，$L_5 = 300$ m，节点处的流量 $q_A = 0.3$ m^3/s，$q_C = 0.2$ m^3/s，$q_D = 0.1$ m^3/s，试用哈迪－克劳斯(Hardy－Cross)法计算每条管中的流量。

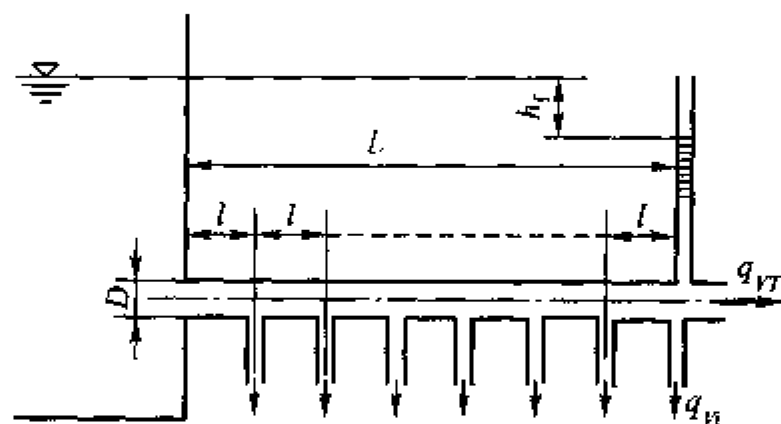
10－16 水沿着长 $L = 1\,000$ m 及直径 $D = 200$ mm 的干管流过，水的流量 $q_{VT} = 40 \times 10^{-3}$ m^3/s，并沿干管全长布置彼此距离 $l = 50$ m 的出流点，各点流出均匀的流量 $q = 2 \times 10^{-3}$ m^3/s。试确定：

(1) 仅考虑沿程损失，采用 $\lambda = 0.025$，求沿程损失 h；

(2) 若流经其起始断面的全部流量 $q_V = 80 \times 10^{-3}$ m^3/s，则在下列情况时管路损失 h_f 如何变化：

(a) 全部流量均通过干管，沿干管全长无出流；

(b) 沿管长沿途流量 $q_{Vt}=4\times10^{-3}\mathrm{m^3/s}$，而 $q_{VT}=0$。



题 10－16 图

10－17　有直径 $d=205$ mm、管壁厚度 $\delta=10.5$ mm 的管道，管中有水以 $V=2$ m/s 的速度流动，此时闸门处压强 $p_0=1.5\times10^6$ Pa。已知水的体积模量 $K=2.1\times10^9$ Pa，管壁材料弹性模量 $E=10^{11}$ Pa。如阀门突然关闭，求管壁材料内产生的应力 σ，并与正常工作时管壁内的应力 σ_0 比较之。

第11章

粘性流体绕物体流动

管路中的损失计算，解决了粘性流体通过管路时由于阻力而引起的损失。本章主要解决当物体与实际流体存在相对运动时，物体所受到的粘性阻力问题。即研究实际流体绕物体流动时粘性阻力的发生、阻力的性质、它们的计算及减小的方法等，其中特别是流体以较高速度绕物体流动时边界层的产生及其计算的研究。这些研究对于解决管道进口段的速度、压力分布及损失计算同样具有重要的意义。

§11-1 边界层的概念

大量的观察研究指出，物体在粘性很小的流体中以较高的速度相对运动时，沿垂直物体表面的法线方向，得到如图11-1所示的速度分布曲线。B点把速度分布曲线分成截然不同的AB和BC两部分，在AB线上，流体运动速度从物体表面上的零迅速增加到$V(x)$，速度的增长在很小的距离内完成，具有较大的速度梯度。在BC段上，速度$V(x)$近似为一常值。

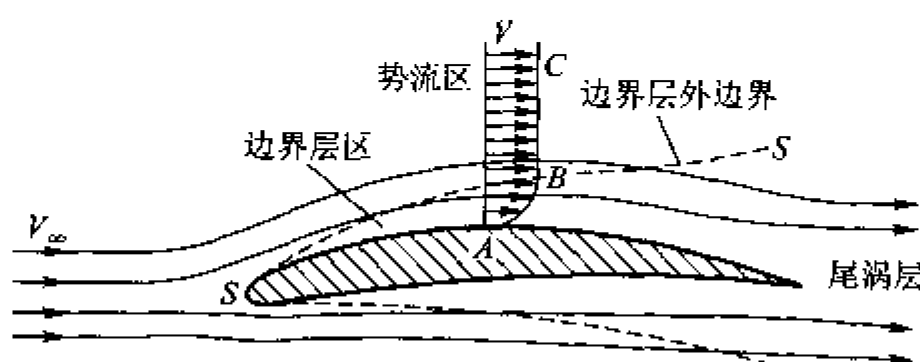


图 11-1

沿物体长度，把所有具有B点处速度的点连接起来，得到$S-S$曲线将整个流场划分为性质完全不同的两个区域。从物体边壁到$S-S$的区域，在很小

的距离 δ 内，流体质点的速度从物体表面上的速度为零以较大的速度梯度迅速增长到与外部流场具有相同大小的速度，紧靠物体表面存在速度梯度的薄层区域称为**边界层**。在边界层内，即使粘性很小的流体，也将有较大的切应力值，使粘性力与惯性力具有同样大小的数量级，因此，流体在边界层内作剧烈的有旋运动。$S-S$ 以外的区域，流体近乎以相同的速度运动，即边界层外部的流动不受固体边壁的粘滞影响，即使对于粘度较大的流体，流体间的粘性切应力也很小，可以忽略不计，这时流体的惯性力起主导作用。因此，将这区域中的流体运动看作为理想流体的无旋运动，可以用势流理论和理想流体的伯努利方程确定该区域中的流速和压强分布。

称 $S-S$ 为**边界层的外边界**，$S-S$ 到固体表面的垂直距离 δ 称为**边界层厚度**。流体与物体最先接触的点称为前驻点，在前驻点处 $\delta=0$，沿着流动方向，边界层逐渐加厚。实际上边界层没有明显的外边界，一般规定边界层外边界处的速度为外部势流速度的 99%。

应当注意，边界层的外边界和流线并不重合，所以势流区的流体质点可以通过边界层的外边界不断地进入边界层内。

引入边界层的概念后，流体绕物体的流动场，分成了性质完全不同的两部分。流体的粘性影响只出现在边界层内，因此，研究粘性流体对物体的阻力，只需通过边界层来求解。边界层外流动则完全按理想流体势流理论来求解。由于边界层很薄，可以把边界层看作为固体的一部分，这样，流体绕包括边界层在内的物体的流动，与绕该物体的流动近似相同，即在计算主流动时可以将很薄的边界层对外面势流的影响忽略不计。因此解边界层以外区域流动问题时，完全可以用势流理论求得速度和压强分布，然后将边界层和势流区的解由边界条件联系起来，就可以求得整个绕流流动的解。

显然，只有在大雷诺数的紊流流动下，才出现绕流的边界层和势流区。根据实验结果分析得到，边界层内存在层流和紊流两种流动状态。在大多数情况下，从前驻点开始的一段距离为层流边界层，随着离前驻点距离增大，边界层逐渐变厚。边界层外边界上的雷诺数为

$$Re=\frac{V^{*}\delta}{\nu}$$

式中 V^{*} 为边界层外边界上的速度 $V^{*}=V(x)$。

当 Re 较小时，整个边界层都是层流，称为**层流边界层**；随 δ 增大，流体受物体表面粘滞作用的影响减小，逐渐出现不稳定因素，当 Re 增大到某一数值时，边界层由层流转变为紊流，这时，边界层只是在起始的一段距离内为层流，其余则是紊流，称为混合边界层；在层流和紊流之间存在一个过渡区，称为**边界层转捩区**；当 Re 很大时，除物体头部和紧贴壁面处存在很薄的粘性底

层外，其余全部为紊流，称为紊流边界层。

在边界层雷诺数的计算中常用 x 替代 δ，实际上 $\delta = f(x)$，用 x 进行计算更方便些。于是雷诺数变为

$$Re = \frac{V_\infty x}{\nu}$$

由层流边界层向紊流转变的雷诺数称为临界雷诺数，边界层由层流转变为紊流取决于边界层外势流区的紊动度、物体表面的粗糙度以及前缘的形状等。对于平板绕流，由层流转变为紊流的临界雷诺数为 $Re \approx 5 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$，图11－2给出了绕流时混合边界层的结构。

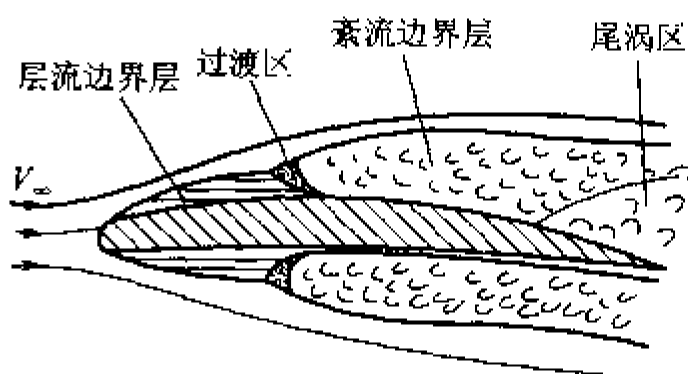


图 11－2

根据上述，得到边界层具有下面特点：

(1) 与绕流物体的长度比较，边界层的厚度很小。厚度 δ 从前驻点起沿流动方向逐渐增厚，δ 随 Re 数增加而减小。

(2) 边界层内沿厚度方向有急剧的速度变化(速度梯度大)，边界层外为势流区。

(3) 边界层内粘性力和惯性力具有相同的数量级。

(4) 边界层可以全部是层流，或全部是紊流，或一部分是层流，另一部分是紊流。

(5) 沿曲面边界流动时边界层易出现分离和尾涡。

§11－2 边界层微分方程

边界层的计算主要解决边界层厚度沿流动方向的变化规律，即 $\delta = f(x)$，沿边界层流体压强的变化，以及流动阻力的计算问题。而边界层特性的确定，关系到流动阻力的大小，热交换的效果，以及绕流的稳定性等问题。

粘性流体绕流物体的相互作用，本应该用 N－S 方程求解，但由于起始边界条件难以用数学表达式描述，至今没有精确解答。普朗特利用边界层的特

点，采用数量级比较的方法，将 N - S 方程简化，得到研究边界层的运动微分方程。

假设不可压缩流体作二维恒定流动，流动过程中流体粘性不变且满足牛顿内摩擦定律，边界层的整个厚度内流动状态为层流。若将物体壁面的法向定为 y 轴，沿物体曲面定为 x 轴，因为边界层厚度很小，所以将 δ 放大时，物体的曲率可以略去不计，x 轴就近似变为直线。可以将一些绕曲面(曲率不大)物体的流动近似当作绕流平板的流动。当略去质量力不计时，粘性流体运动微分方程可以写为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{11-1}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{11-2}$$

连续方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{11-3}$$

设被绕流物体的特征长度为 l、无穷远来流的速度(设为特征速度)为 V_∞。为了对各项进行数量级比较，我们将方程组中各运动参数项都变换成无量纲值，因此令

$$\bar{x}=\frac{x}{l},\quad \bar{y}=\frac{y}{l},\quad \bar{v}_x=\frac{v_x}{V_\infty},\quad v_y=\frac{v_y}{V_\infty},$$

$$\bar{p}=\frac{p}{\rho V_\infty^2},\quad Re=\frac{V_\infty l}{\nu},\quad \bar{\delta}=\frac{\delta}{l}$$

将无量纲参数代入式(11 - 1)，(11 - 2)和(11 - 3)，得到

$$-\left(\frac{V_\infty^2}{l}\right)\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\left(\frac{V_\infty}{l^2}\nu\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial \bar{y}^2}\right)=\left(\frac{V_\infty^2}{l}\right)\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}}+\left(\frac{V_\infty^2}{l}\right)\bar{v}_y\frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{11-1a}$$

$$-\left(\frac{V_\infty^2}{l}\right)\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\left(\frac{V_\infty}{l^2}\upsilon\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{y}^2}\right)=\left(\frac{V_\infty^2}{l}\right)\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}}+\left(\frac{V_\infty^2}{l}\right)\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \tag{11-2a}$$

$$\left(\frac{V_\infty}{l}\right)\frac{\partial v_x}{\partial \bar{x}}+\left(\frac{V_\infty}{l}\right)\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}}=0 \tag{11-3a}$$

设在所有有限大小的量之间相比较时，它们的数量级为 1。因 x 与 l 具有

同样的量级，所以 $\bar{x}\sim 1$（符号～表示数量级相同），同样可得 $\bar{v}_x\sim 1$，$\bar{p}\sim 1$。

根据边界层的特点，边界层的厚度 δ 与物体的特征长度 l 比较，$\bar{\delta}=\dfrac{\delta}{l}$ 是个很小的量级，即 $\bar{\delta}\ll 1$。因为是研究**边界层的流动**，因此有：$0\leqslant y\leqslant\delta$，所以 $\bar{y}\sim\bar{\delta}\ll 1$。

在边界层与势流交界的外边界上 v_x 与特征速度相同，即有

$$\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{x}}\sim 1,\quad \frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{x}^2}\sim 1,\quad \frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{y}}\sim\frac{1}{\bar{\delta}},\quad \frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}\sim\frac{1}{\bar{\delta}^2}$$

又由连续方程，可得

$$\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{x}}\sim 1$$

所以必有 $\bar{v}_y\sim\bar{\delta}$，于是得到

$$\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\bar{x}}\sim\bar{\delta},\quad \frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{x}^2}\sim\bar{\delta},\quad \frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{y}^2}\sim\frac{1}{\bar{\delta}}$$

若以 $\left(\dfrac{V_\infty^2}{l}\right)$ 除式(11－1a)和(11－2a)各项；用 $\left(\dfrac{V_\infty}{l}\right)$ 除式(11－3a)各项，得到下面的无量纲方程组，并在方程式每一项的下面标注上面讨论得到的各项的数量级。即为

$$-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}\right)=\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{x}}+\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{y}} \tag{11－1b}$$

$$1\qquad \bar{\delta}^2\qquad 1\qquad \frac{1}{\bar{\delta}^2}\qquad\qquad 1\quad 1\qquad \bar{\delta}\quad \frac{1}{\bar{\delta}}$$

$$-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{y}^2}\right)=\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\bar{x}}+\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\bar{y}} \tag{11－2b}$$

$$\frac{1}{\bar{\delta}}\qquad \bar{\delta}^2\qquad \bar{\delta}\qquad \frac{1}{\bar{\delta}}\qquad\qquad 1\quad \bar{\delta}\qquad \bar{\delta}\quad 1$$

$$\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\bar{y}}=0 \tag{11－3b}$$

$$1\qquad 1$$

现在来分析上述方程组中各项的数量级。式(11－1b)中**粘性项** $\dfrac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{x}^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}$ 进行数量级比较，$\dfrac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{x}^2}$ 可以略去；式(11－2b)中 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{y}^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{x}^2}$ 比较，$\dfrac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{x}^2}$ 项可以略去；若比较 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{y}^2}$ 的数量级，则 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_y}{\partial\bar{y}^2}$ 项也可以略去。因此在方程组的粘性项中只剩下式(11－1b)中的一项 $\dfrac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\bar{y}^2}$。如果比较方程中的所有惯性项的数量

级，得到(11－2b)中的两个惯性项可以略去，而式(11－1b)中的 $\bar{v}_x \dfrac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}}$ 与 $\bar{v}_y \dfrac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}$ 则具有相同的数量级。

最后根据边界层的特点，在边界层内粘性力与惯性力具有同样的数量级，即 $\dfrac{1}{Re}\dfrac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2} \sim \bar{v}_y \dfrac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}}$，由于 $\bar{v}_y \dfrac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \sim 1$，而 $\dfrac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2} \sim \dfrac{1}{\bar{\delta}^2}$，所以只有当 $\dfrac{1}{Re} \sim \bar{\delta}^2$，上述的边界层特点才能得到满足，即 $\dfrac{1}{Re} \sim \delta^2 = \left(\dfrac{\delta}{l}\right)^2$，$\delta$ 反比于 $\sqrt{Re}$，它表明，随 Re 增大，边界层厚度变薄。

于是，通过数量级比较，略去方程组中所有数量级小于 1 的微小项，并还原成有量纲的形式，最后得到边界层的微分方程

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11-4}$$

这一方程是普朗特在 1904 年导出的(恒定二维层流边界层)，故又称为**普朗特边界层方程**。方程组中 $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$，表明边界层中沿物体表面的法线方向压强不变，等于边界层外边界上势流区的压强。因此，边界层中固体壁面上沿流动方向上的压强分布，与边界层外边界上势流区沿流动方向上的压强分布相同，这一结论有十分重要的实际意义。因为边界层外流体作有势流动，所以边界上的压强分布 $p(x)$ 可以由拉格朗日－伯努利方程求得。又因为 p 与 y 无关，所以 $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$。这样，方程(11－4)中只有两个未知量 v_x，v_y，方程可解。

在边界层与势流区交界的外边界上，由势流的伯努利方程

$$p + \frac{1}{2}\rho V^{*2} = C，\quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho V^* \frac{\partial V^*}{\partial x}$$

因为边界层中 $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$，所以在边界层内部有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho V^* \frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x}$$

式中 V^*——势流区中的速度。

这样，方程组(11－4)变为

$$\left.\begin{aligned} V^* \frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11-5}$$

求解普朗特边界层方程组的**边界条件**为

$$y=\delta \text{ 处}, \quad v_x = V_x^*$$

$$y=0 \text{ 处}, \quad v_x = v_y = 0$$

由式(11-5)的第一个方程得到

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\nu}V^*\frac{\mathrm{d}V^*}{\mathrm{d}x} \tag{11-6}$$

如果势流速度 V^* 的分布已知，则根据上述边界条件就可以求解恒定二维边界层流动。

边界层微分方程是边界层计算的基本方程式，但是，由于它的非线性，即使对于形状很简单的物体的绕流，求解也十分困难。

§11-3 边界层动量积分关系式

虽然利用边界层特点对 N-S 方程简化，得到了比较简单的普朗特边界层微分方程，但是对于大多数工程问题，求解拟线性的偏微分方程仍十分困难，只有对极少数的简单的情况才能求得精确解。为此只有寻找近似的求解方法，其中冯·卡门根据动量原理提出的动量积分方法，得到了广泛应用。

将 x 轴取在物体壁面上，无穷远来流速度为 V_∞（见图 11-3），流体不可压缩。

在距离前缘 x 处，沿边界层取一单位宽度（垂直纸面方向）的微元控制体 $ABCD$，（图 11-4 所示），长为 $\mathrm{d}x$，BC 为边界层外边界，AD 为物体壁面。

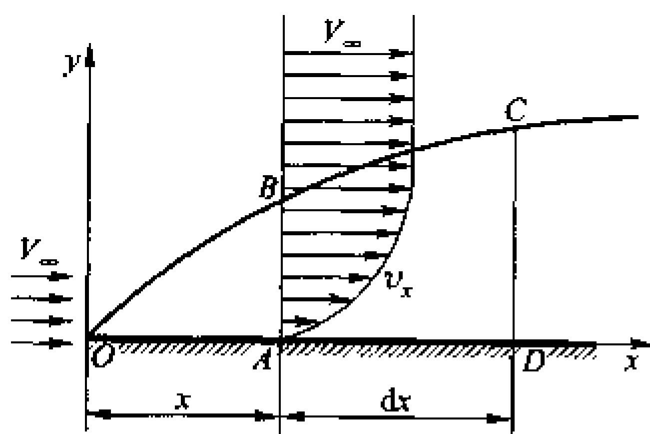


图 11-3

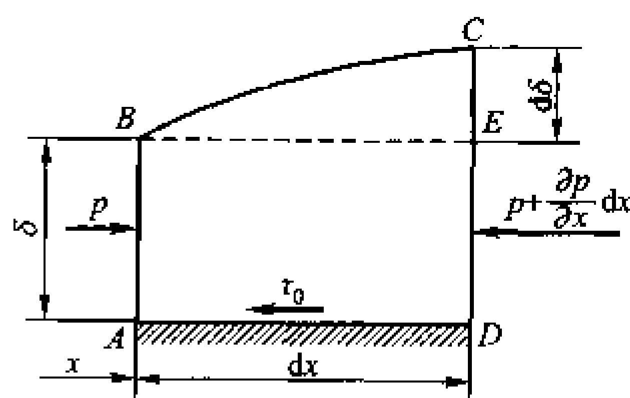


图 11-4

对控制体 $ABCD$ 应用动量定理，研究沿 x 方向单位时间内动量的改变量与

外力冲量间的关系。

1. 若流动恒定，控制体 *ABCD* 内流体在单位时间内沿 x 方向动量的变化

$$K_x = K_{CD} - K_{AB} - K_{BC}$$

单位时间内流体由 AB 面流入的动量为

$$K_{AB} = \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y$$

单位时间内流体经 CD 面流出的动量为

$$K_{CD} = \int_0^\delta \left[\rho v_x^2 + \frac{\partial (\rho v_x^2)}{\partial x} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y$$

对不可压缩流体，根据流量连续原理，通过 BC 面流入的流体质量，等于从 CD 面流出的质量与流入 AB 面的质量之差

$$m_{BC} = m_{CD} - m_{AB} = \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$

流体在边界层边缘 BC 面上的流速为 V^*，在 x 方向的投影为 V_x^*。因为 BC 很短，近似认为 V_x^* 为常量，所以从 BC 面流入的流体动量为

$$K_{BC} = V_x^* \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$

单位时间内沿 x 方向的动量变化为

$$\begin{aligned} K_x &= K_{CD} - K_{AB} - K_{BC} \\ &= \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y - \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y \\ &\quad - V_x^* \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y - V_x^* \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. 流体非恒定运动引起的动量变化

在控制体内取无限小面积 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

t_1 时刻 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中流体在 x 方向的速度为 v_{x1}，所具有的动量为 $\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y v_{x1}$；

t_2 时刻 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中流体在 x 方向的速度为 v_{x2}，所具有的动量为 $\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y v_{x2}$。

单位时间内 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中流体动量的变化为

$$\frac{\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(v_{x2} - v_{x1})}{\Delta t} = \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

单位时间内控制体 *ABCD* 中流体由于 x 方向上速度改变引起的动量变化为

$$K_{xt} = \int_0^\delta \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y \frac{\partial v_x}{\partial t}$$
$$= \mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$

3. 单位时间内作用在控制体上沿 x 方向外力的冲量

作用在控制体诸面上的外力沿 x 方向的分量为

$$F_{AB} = p\delta$$

$$F_{CD} = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)(\delta + \mathrm{d}\delta)$$

BC 面上，因为沿 BC 上速度梯度很小，粘性力可近似忽略不计，故只有法向作用力。

即
$$F_{BC} = p\frac{\partial \delta}{\partial x}\mathrm{d}x$$

固体壁面 AD 作用在流体上摩擦切应力的合力为

$$F_{AD} = -\tau_0 \mathrm{d}x$$

在图示情况下，作用在控制体上的质量力只有重力，在 x 轴上投影等于零。

所以，单位时间内作用在控制体上所有外力沿 x 方向分力的冲量之和为

$$F_x = p\,\delta + p\frac{\partial \delta}{\partial x}\mathrm{d}x - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)(\delta + \mathrm{d}\delta) - \tau_0 \mathrm{d}x$$

将上式展开，略去高阶微量

得
$$F_x = -\delta\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x - \tau_0 \mathrm{d}x$$

根据动量定理，单位时间内控制体内流体动量的改变量，等于外力的冲量之和，于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y - V_x^* \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$
$$= -\left(\delta\frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0\right) \qquad (11-7)$$

式(11－7)就是不可压缩流体**边界层动量积分关系式**。

对不可压缩流体的恒定流动，$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y = 0$，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y - V_x^* \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$
$$= -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta + \tau_0\right) \qquad (11-8)$$

式(11－7)和式(11－8)1921 年由冯·卡门首先导出，故称为**卡门动量积分关系**

式。在推导过程中并未限制流动状态，积分方程对层流和紊流都适用，但对不同流动状态，τ_0 将具有不同表达式。

因为边界层中$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，压强 p 仅是 x 的函数，它就是边界层外边界上的压力分布规律，所以$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，可以根据势流的拉格朗日积分求出$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$。边界层外边界上的速度 V_x^*，可由势流理论求解或用实验方法得到。这样式(11－8)中，ρ，$\frac{\partial p}{\partial x}$，$V_x^*$ 为已知量，但 v_x，δ 和 τ_0 未知，三个未知数只有一个方程，要求解这一方程，需要列两个补充方程。求解时通常给出沿边界层厚度的速度分布 $v_x=f(y)$ 和 $\tau_0=f(\delta)$ 两个补充方程。

只要根据经验给出边界层内的速度分布规律 $v_x=f(y)$，$\tau_0=f(\delta)$，就可以利用给定的边界条件由式(11－8)求得 $\delta=f(x)$。

§ 11－4　边界层的位移厚度和动量损失厚度

为了进一步说明动量积分关系式中积分项的物理意义，这里引入位移厚度 δ^* 和动量损失厚度 δ^{**}。

在动量积分关系式中，可以改写积分项

$$V_x^* \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho V_x^* v_x \mathrm{d}y - \frac{\partial V_x^*}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$

在边界层的外边界上，流体作理想有势流动，有

$$p+\frac{1}{2}\rho V_x^{*2}=C$$

于是

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x}$$

因此，积分关系式中

$$\delta\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x}\int_0^\delta \mathrm{d}y$$

$$=-\rho\frac{\partial V_x^*}{\partial x}\int_0^\delta V_x^* \mathrm{d}y$$

将上述代入积分关系式(11－8)，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2 \mathrm{d}y - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho V_x^* v_x \mathrm{d}y + \frac{\partial V_x^*}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x \mathrm{d}y$$

$$=\rho\frac{\partial V_x^*}{\partial x}\int_0^\delta V_x^* \mathrm{d}y - \tau_0$$

或
$$\frac{\partial V_x^*}{\partial x}\int_0^\delta (V_x^* - v_x)\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x (V_x^* - v_x)\,dy = \frac{\tau_0}{\rho} \tag{11-9}$$

现在分析式(11-9)中积分的物理意义。

对于边界层中高度为 δ 的截面，第一项积分表示，理想流体以速度 V_x^* 的等速流动和边界层的实际流速为 v_x 的流动流经 δ 时的流量之差值，等于图11-5的阴影面积。

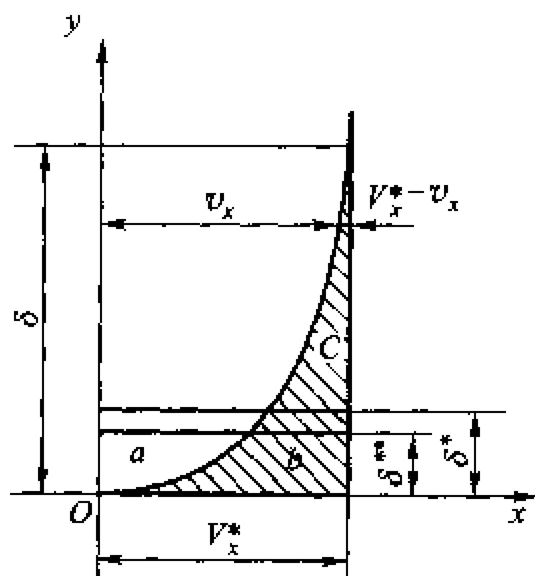


图 11-5

实际上，由于边界层外边界处的流速与边界层外势流区的流速相差极小，因此，以 0 ~ ∞ 的积分限代替 0 ~ δ 的积分限时，两者积分值相差很小，这里用图 11-5 所示的等值矩形面积 $\delta^* V_x^*$ 代替阴影面积，即得到

$$\delta^* = \frac{1}{V_x^*}\int_0^\infty (V_x^* - v_x)\,dy = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{V_x^*}\right)dy \tag{11-10}$$

称 δ^* 为**位移厚度**或排挤厚度

式(11-10)相当于以速度 V_x^* 流动的不可压缩理想流体流过厚度为 δ^* 的流量，与实际存在边界层时，由于粘性作用使流速降低，流过 δ 时减小的流量相等，即面积 $a + b = c + b$，$a = c$。若想象将物体向外增加 δ^* 厚度，理想流体以速度 V_x^* 绕流这一增厚了的物体，则流过厚度($\delta - \delta^*$)的流量，等于以边界层中流速 v_x 绕流物体时的流量。因此，δ^* 实质上表示了实际流体由于粘性引起的具有边界层的绕流，相当于固体壁面向外移动了 δ^* 时的理想流体绕流，使流体的运动向外排挤。

第二项积分表示流体中因边界层粘性的影响而减少的流体动量，同样，也可以用理想流体以速度 V_x^* 流过厚度为 δ^{**} 截面的流体动量来代替减少的动量，即

$$\rho V_x^{*2}\delta^{**} = \int_0^\infty \rho v_x (V_x^* - v_x)\,dy$$

得到
$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{v_x}{V_x^*}\left(1 - \frac{v_x}{V_x^*}\right)dy; \tag{11-11}$$

称 δ^{**} 为**动量损失厚度**。

式(11-8)对平面边壁应用比较方便。对曲面边界层，为便于计算，常变换成下面的形式

将式(11 - 10)和式(11 - 11)代入式(11 - 9)得

$$\frac{\partial(V_x^{*2}\delta^{**})}{\partial x} + \delta^* V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \tag{11 - 12}$$

同除以 V_x^{*2}，变成无因次形式，得

$$\frac{\partial\delta^{**}}{\partial x} + (2\delta^{**} + \delta^*)\frac{1}{V_x^*}\frac{\partial V_x^*}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho V_x^{*2}}$$

或

$$\frac{\delta^{**}}{\partial x} + (2 + H_1)\frac{\delta^{**}}{V_x^*}\frac{\partial V_x^*}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho V_x^{*2}} \tag{11 - 13}$$

式中 $H_1 = \delta^*/\delta^{**}$，称为形状因数。

这是卡门动量积分关系式的另一种形式，该式同样对层流、紊流均适用，式中 V_x^* 为已知数，δ^*，δ^{**} 和 τ_0 取决于边界层内的速度分布规律。

§ 11 - 5　平板层流边界层的近似计算

设不可压缩流体对薄平板作平面恒定绕流，无穷远均匀来流速度与平板方向一致。在边界层的近似计算中，普遍采用卡门动量积分关系式，计算的目的是求出作用于平板上的阻力。

如图 11 - 6 所示，将坐标原点取在平板前缘处，x 轴沿着平板，由于平板和边界层很薄，对平行来流的干扰很小，可以近似略去不计，即在边界层的外边界上 $V_x^* = V_\infty$。所以，在边界层外边界上，由势流的拉格朗日 - 伯努利方程有

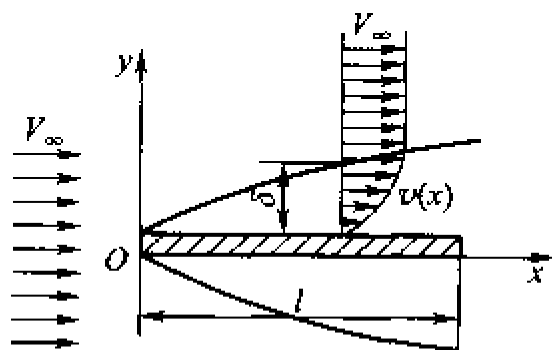


图　11 - 6

$$p + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 = C$$

得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho V_\infty \frac{\mathrm{d}V_\infty}{\mathrm{d}x} = 0$$

即在整个边界层中 p = 常数，称之为无压强梯度的边界层。

因为流动恒定，$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$。对于无限宽的平板，流体作平面绕流，边界层厚度 $\delta = f(x)$，动量积分方程中的偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ 可以改写成全微分。

根据上述，卡门动量积分关系式简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta v_x^2 \mathrm{d}y - V_\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta v_x \mathrm{d}y = -\frac{\tau_0}{\rho} \tag{11 - 14}$$

方程中 v_x，δ 和 τ_0 未知，需另列两个补充方程。

首先解决沿边界层厚度上速度分布规律 $v_x = f(y)$。设边界层内流速分布 v_x 用 y 的四次多项式表示

$$v_x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4$$

式中 a，b，c，d，e 为待定系数，由边界层的边界条件确定。由于边界层厚度很小，y 是一个微小量，一般取前五项精度就足够了。

(1) $y=0$ 时，即在平板壁上流速 $(v_x)_{y=0}=0$，所以系数 $a=0$；

(2) 边界层外边界上，$y=\delta$ 时，速度为势流区流动速度，即 $(v_x)_{y=\delta} = V_\infty = a + b\,\delta + c\,\delta^2 + d\,\delta^3 + e\,\delta^4$；

(3) 边界层外边界上，速度梯度 $\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}=0$，摩擦切应力 $\tau = \left(\mu\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}=0$，于是

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = b + 2c\,\delta + 3d\,\delta^2 + 4e\,\delta^3 = 0$$

(4) 平板壁面上，$y=0$，有 $v_x = v_y = 0$，由边界层普朗特微分方程的第一式得

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

即
$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 2c = 0，\text{得 } c=0$$

(5) 边界层外边界上 $(v_x)_{y=\delta} = V_\infty$，由边界层微分方程第一式得

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

即
$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = 2c + 6d\,\delta + 12e\,\delta^2 = 0$$

根据上述五个边界条件所得的方程联立，解出系数

$$a=0，\ b=2\frac{V_\infty}{\delta}，\ c=0，\ d=-2\frac{V_\infty}{\delta^3}，$$

$$e=\frac{V_\infty}{\delta^4}$$

这样，层流边界层中速度分布规律为

$$v_x = V_\infty\left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right] \tag{11-15}$$

因为是层流边界层，第二个补充方程由牛顿内摩擦定律给出

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 2\mu\frac{V_\infty}{\delta} \tag{11-16}$$

将式(11 - 15)和(11 - 16)代入动量积分关系式(11 - 14)，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta} V_\infty^2 \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]^2 \mathrm{d}y$$

$$- V_\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\delta} V_\infty \left[2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]\mathrm{d}y$$

$$= -2\frac{\mu}{\rho}\frac{V_\infty}{\delta}$$

$$\frac{367}{630}V_\infty^2\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} - \frac{7}{10}V_\infty^2\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = -2\frac{\mu}{\rho}\frac{V_\infty}{\delta}$$

或

$$\delta\mathrm{d}\delta = \frac{630}{37}\nu\frac{\mathrm{d}x}{V_\infty}$$

积分得

$$\delta^2 = \frac{1260}{37}\frac{\nu}{V_\infty}x + C$$

积分常数由边界条件确定：当 $x = 0$ 时，$\delta = 0$ 得 $C = 0$，所以边界层厚度为

$$\delta = 5.84\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}} = 5.84x\sqrt{\frac{1}{Re_x}} \qquad (11-17)$$

式中

$$Re_x = \frac{V_\infty x}{\nu}$$

由上式可见，平板层流边界层的厚度变化曲线是二次抛物线，δ 随 x 增加而增大，但随来流速度 V_∞ 的增加而减小，流体粘性愈大，边界层增厚。

将式(11 - 17)代入式(11 - 16)，得到摩擦切应力

$$\tau_0 = 2\mu\frac{V_\infty}{5.84\sqrt{\dfrac{\nu x}{V_\infty}}} = 0.343\rho V_\infty^2\sqrt{\frac{\nu}{V_\infty x}}$$

$$= 0.343\rho V_\infty^2\sqrt{\frac{1}{Re_x}} \qquad (11-18)$$

上述方程中的系数，对 $v_x = f(y)$ 的多项式，取的项数愈少，误差愈大，一般取五项已具有足够的精度。实验得到，对于较长的平板，随 x 增大，误差相应增加。从公式可以看到，随边界层厚度 δ 增加，摩擦切应力减小。

若平板宽度为 b，平板面积 $A = bl$，则作用在微元面积 $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}x$ 上的摩擦力为

$$\mathrm{d}F_f = \tau_0\mathrm{d}A = \tau_0 b\mathrm{d}x$$

作用在平板一侧表面上的总摩擦阻力为

$$F_f = b\int_0^l \tau_0\mathrm{d}x = 0.343\rho V_\infty^2 b\sqrt{\frac{\nu}{V_\infty}}\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

$$= 0.686bl\rho V_\infty^2\sqrt{\frac{1}{Re_l}} \qquad (11-19)$$

摩擦阻力因数为

$$C_f = \frac{F_f}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 bl} = 1.372\sqrt{\frac{1}{Re_l}} \tag{11-20}$$

C_f与 Re_l 的平方根成反比。实验得到，当 $Re_l < 5\times10^5$ 时，平板边界层基本呈层流。而当 $5\times10^5 < Re_l < 10^6$ 时，可能为层流或紊流，主要决定于来流的状态、平板前缘形状和表面粗糙度。

§11-6 平板紊流边界层的近似计算

不可压缩流体对光滑平板作恒定绕流，并且认为边界层从平板前缘开始就是紊流。

对于**平板紊流边界层**的近似计算，仍然采用动量积分关系式进行，但是，要确定边界层厚度 δ 和表面摩擦阻力，必须首先解决紊流边界层内速度分布规律和摩擦切应力与 δ 的关系式。然而目前理论上还不知道这些规律。普朗特假设：边界层内的紊流流动与圆管的紊流流动相同。即对于顺来流放置的薄平板，沿板长方向无压强梯度时，沿平板边界层厚度上的速度分布规律与沿圆管半径的速度分布规律相同。雷诺数不太大时，可以采用 1/7 次方指数定律，即

$$v_x = v_{max}\left(\frac{y}{r}\right)^{1/7} \quad （管道）$$

$$v_x = V_\infty\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad （平板）$$

显然，管道中心 $y = r$ 处的流速 v_{max}与边界层外边界处势流区 $y = \delta$ 处的速度 V_∞对应。

与上式相应的切应力公式表达为

$$\tau_0 = \lambda\frac{\rho V^2}{8}$$

损失因数 λ，对应$\frac{1}{7}$次方定律速度分布的紊流光滑管区($4\ 000 \leqslant Re_d \leqslant 10^5$)，采用布拉休斯公式

$$\lambda = \frac{0.316\ 4}{Re^{1/4}} = \frac{0.316\ 4}{\left(\frac{Vd}{\nu}\right)^{1/4}}$$

将上式代入切应力公式得

$$\tau_0 = \left[\frac{0.3164}{\left(\frac{2Vr}{\nu}\right)^{1/4}}\right]\left(\frac{\rho V^2}{8}\right)$$

$$= 0.0664\left(\frac{\nu}{Vr}\right)^{1/4}\frac{\rho V^2}{2}$$

式中平均流速 $$V = \frac{1}{A}\int_A v_x \mathrm{d}A$$

对于管中紊流

$$v_x = v_{\max}\left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}, A = \pi r^2$$

若 x 轴取在管壁上，$\mathrm{d}A = 2\pi(r-y)\mathrm{d}y$，于是积分得到

$$V = 0.817\ v_{\max}$$

所以 $$\tau_0 = 0.0664\ (0.817)^{7/4}\left(\frac{\nu}{v_{\max} r}\right)^{1/4}\frac{\rho v_{\max}^2}{2}$$

将上式中圆管中心线处的 $v_{\max}$ 和 r 对应用边界层外边界上的 V_∞ 和 δ 代替，则

$$\tau_0 = 0.0664\ (0.817)^{7/4}\left(\frac{\nu}{V_\infty \delta}\right)^{1/4}\frac{\rho V_\infty^2}{2}$$

$$= 0.0233\left(\frac{\nu}{V_\infty \delta}\right)^{1/4}\rho V_\infty^2$$

因为沿平板边界层内压强不变，即 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$，因此将上述得到的 $v_x = f(y)$ 和 τ_0 的关系式代入动量积分方程(11－14)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \left[V_\infty\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right]^2 \mathrm{d}y - V_\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta V_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{\rho}\times 0.0233\left(\frac{\nu}{V_\infty \delta}\right)^{1/4}\rho V_\infty^2$$

由上式得 $$\frac{7}{72}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = 0.0233\left(\frac{\nu}{V_\infty \delta}\right)^{1/4}$$

或 $$\delta^{1/4}\mathrm{d}\delta = 0.24\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{1/4}\mathrm{d}x$$

积分得 $$\frac{4}{5}\delta^{\frac{5}{4}} = 0.24\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{1/4}x + C$$

在平板前缘处，$x=0$，$\delta=0$，所以 $C=0$，于是

$$\delta = 0.381\left(\frac{\nu}{V_\infty}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{4}{5}} = 0.381\left(\frac{\nu}{V_\infty x}\right)^{\frac{1}{5}}x \tag{11-21}$$

摩擦切应力

$$\tau_0 = 0.0233\left[\frac{\nu}{0.381 V_\infty x}\left(\frac{V_\infty x}{\nu}\right)^{1/5}\right]^{1/4}\rho V_\infty^2$$

$$= 0.0296 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5} \rho V_\infty^2 \tag{11-22}$$

可见，紊流边界层的厚度 $\delta \propto x^{4/5}$，而层流边界层为 $\delta \propto x^{1/2}$，所以紊流边界层随 x 增长其厚度增加比较迅速。

平板一个壁面上的总摩擦力

$$\begin{aligned} F_f &= \int_0^l \tau_0 b \mathrm{d}x = \int_0^l 0.0296 \left(\frac{\nu}{V_\infty x} \right)^{1/5} \rho V_\infty^2 b \mathrm{d}x \\ &= 0.037 \left(\frac{\nu}{V_\infty l} \right)^{1/5} A \rho V_\infty^2 \\ &= 0.074 \frac{1}{Re_l^{1/5}} A \frac{\rho V_\infty^2}{2} \\ &= C_f A \frac{\rho V_\infty^2}{2} \end{aligned} \tag{11-23}$$

式中　A——平板表面积，$A = bl$；

C_f——摩擦阻力因数。

$$C_f = \frac{F_f}{\frac{1}{2} A \rho V_\infty^2} = \frac{0.074}{Re_l^{1/5}} \tag{11-24}$$

因为上述推导中，采用了圆管中紊流速度分布的 $\frac{1}{7}$ 次方指数规律和光滑管区阻力因数的布拉休斯公式，所以推得的结果有一定的适用范围，实验证明，在 $5 \times 10^5 \leqslant Re_l \leqslant 10^7$ 范围内，式(11-24)求得的 C_f 与实验数据十分吻合，当 $Re_l > 10^7$ 时，应当采用对数速度分布规律

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{cut}} = 5.85 \lg \frac{y \bar{v}_{cut}}{\nu} + 5.56$$

式中　$\bar{v}_{cut} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$——切应力速度。

由上式推导得到的平板紊流边界层摩擦阻力因数 C_f 与 Re 的关系曲线如图 11-7 中的曲线③，普朗特和施里希廷(H.Schlichting)对这条曲线拟合得到的经验公式为

$$C_f = \frac{0.455}{(\lg Re_l)^{2.58}} \tag{11-25}$$

这一计算公式适用范围为 $10^6 < Re_l < 10^9$。

舒尔茨(F.Schultz) - **格鲁诺**(Grunow)根据对平板紊流边界层的大量测量结果，得到摩擦阻力因数的修正公式为

$$C_f = \frac{0.427}{(\lg Re_l - 0.407)^{2.64}} \tag{11-26}$$

式(11-26)的曲线如图 11-7 中④所示。

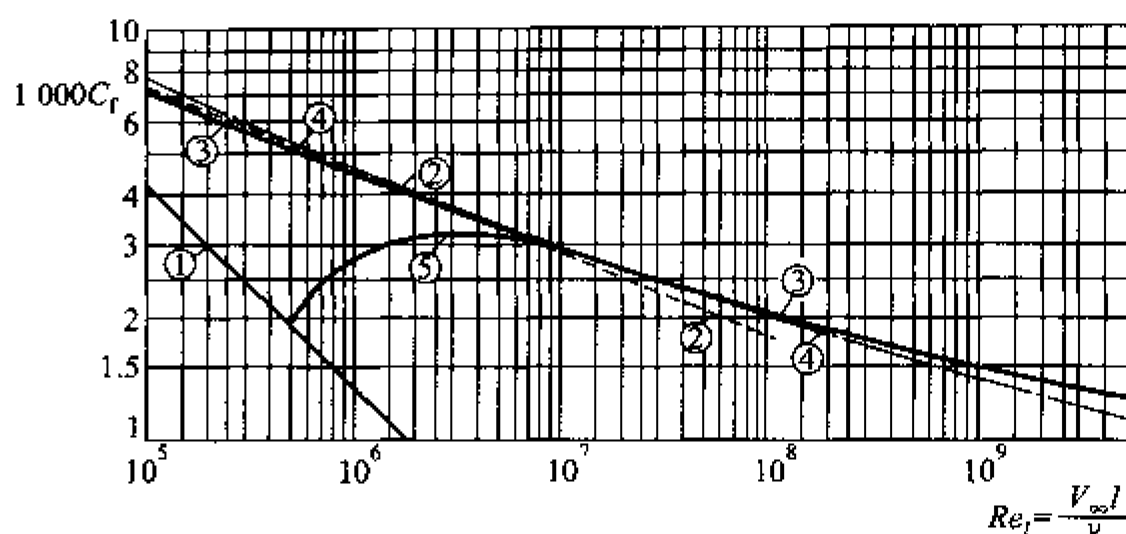


图 11－7

图 11－7 中曲线①为层流边界层 $C_f=1.328Re_l^{-\frac{1}{2}}$；曲线②为式(11－24)；曲线③为式(11－25)；曲线④为式(11－26)；曲线⑤为混合边界层 $C_f=0.455(\lg Re_l)^{-2.58}-ARe_l^{-1}$。

分析图 11－7 所示的曲线，可以得出，随 Re_l 增加，摩擦阻力因数都减小，但紊流边界层的 C_f 比层流边界层的 C_f 减小缓慢，在相同的 Re_x 下紊流边界层的 C_f 比层流边界层的 C_f 大得多，这是由于紊流中流体微元剧烈的横向混杂，产生紊流附加切应力的缘故。因此，在工程上对边界层进行人工控制，使绕流物体表面保持层流边界层，可以减小摩擦阻力。

§ 11－7 二维平板混合边界层近似计算

平板边界层的性质主要取决于雷诺数的大小、平板表面的粗糙度和来流的扰动程度。在 $Re_x<5\times10^5$ 情况下，边界层为层流；在 $Re_x=5\times10^5\sim10^6$ 的范围内，平板前端为层流边界层，在某点开始出现由层流转变为紊流边界层的过渡区，后部是紊流边界层。只有到 Re_x 足够大时，才出现全部为紊流边界层。工程实际绕流中，大部分都是前端处为层流边界层，后部为紊流边界层的混合边界层。对于粗糙的边壁，紊流边界层的形成将会提前。

混合边界层由层流向紊流转变的过渡区十分复杂，为简化计算，对平板混合边界层的研究，常作下面两个假设：

（1）由层流边界层到紊流边界层的转变，在 A 点突然发生(见图 11－8)，$OA=x_{cr}$；

（2）在计算紊流边界层的厚度变化、边界层中速度和切应力的分布时，假

定紊流边界层与从前缘 O 点开始相同。

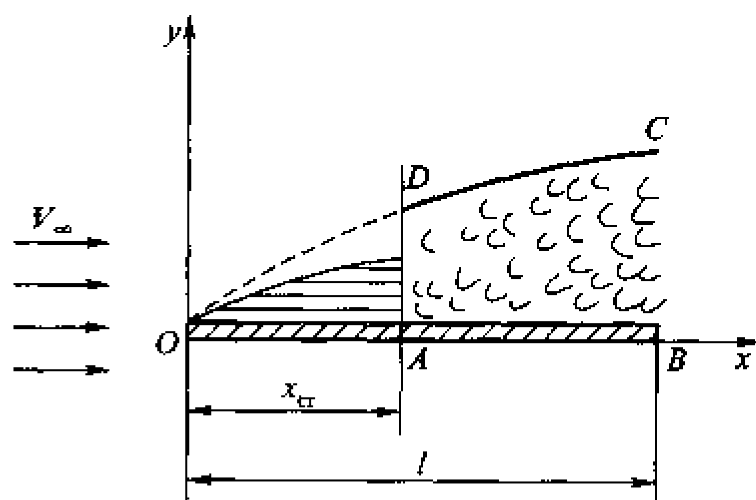


图 11-8

于是得到平板混合边界层的摩擦阻力为

$$F_f = F_{f_T} - F_{f_{TOA}} + F_{f_{LOA}}$$

式中 F_{f_T}——假设全板长 l 均为紊流边界层时的摩擦阻力；

$F_{f_{TOA}}$——x_{cr}段为紊流边界层时的摩擦阻力；

$F_{f_{LOA}}$——x_{cr}段为层流边界层时的摩擦阻力。

在 OA 段上，当为层流边界层时

$$F_{f_{LOA}} = C_{f_l} x_{cr} b \frac{\rho V_\infty^2}{2}$$

当为紊流边界层时

$$F_{f_{TOA}} = C_{f_T} x_{cr} b \frac{\rho V_\infty^2}{2}$$

式中 b 为平板宽度。OA 段上层流和紊流边界层摩擦阻力之差

$$\Delta F_f = F_{f_{LOA}} - F_{f_{TOA}} = -x_{cr} b \left(C_{f_T} - C_{f_L} \right) \frac{\rho V_\infty^2}{2}$$

两边同除以 $bl \dfrac{\rho V_\infty^2}{2}$，得到由于存在层流段而引起的 C_f的变化

$$\Delta C_f = -\frac{x_{cr}}{l}\left(C_{f_T} - C_{f_L} \right)$$

$$= -\frac{\left(C_{f_T} - C_{f_L} \right)\dfrac{V_\infty x_{cr}}{\nu}}{\dfrac{V_\infty l}{\nu}}$$

$$= -\frac{A^*}{Re_l}$$

式中 $A^* = (C_{f_T} - C_{f_L})\frac{V_\infty x_{cr}}{\nu} = (C_{f_T} - C_{f_L}) Re_{x_{cr}}$

A^* 值取决于由层流边界层转变为紊流边界层的 $Re_{x_{cr}}$，由实验得到的 A^* 值见表 11－1。

表 11－1　混合边界层的 A^* 值

$Re_{x_{cr}}$	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A^*	1 050	1 700	3 300	8 700

于是，二维平板混合边界层的摩擦阻力因数为

$$5\times10^5 \leqslant Re_l \leqslant 10^7 \text{ 时，} C_f = \frac{0.074}{Re_l^{0.2}} - \frac{A^*}{Re_l} \tag{11-27}$$

$$5\times10^5 \leqslant Re_l \leqslant 10^9 \text{ 时，} C_f = \frac{0.455}{(\lg Re_l)^{2.58}} - \frac{A^*}{Re_l} \tag{11-28}$$

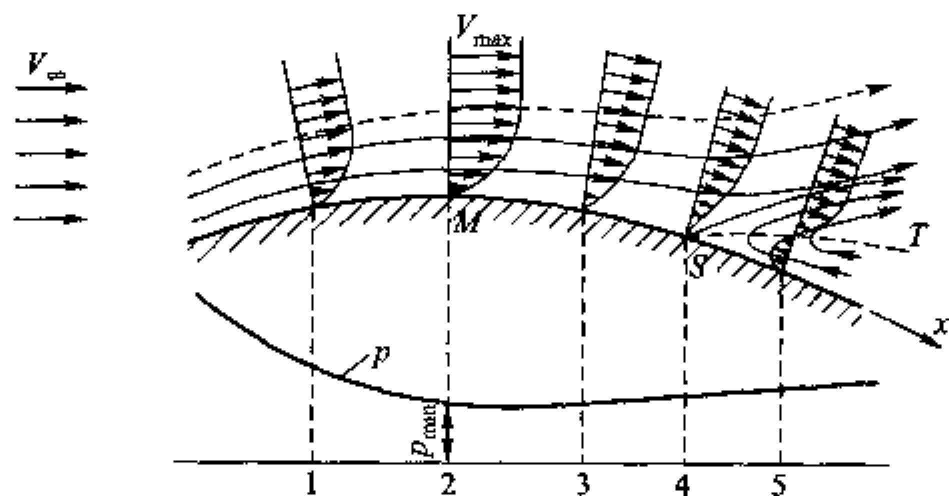
当 $Re_{x_{cr}} = 5\times10^5$，$A^* = 1\ 700$ 时，式(11－28)表示为图 11－7 中的曲线⑤。

§ 11－8　曲面边界层及其分离

上述研究的不可压缩流体纵向绕流平板，沿流动方向边界层中没有压强梯度，边界层外边界上速度相同。但在工程实际中，对流体机械和机翼翼型的绕流，以及管道内外热交换时的绕圆柱管道流动等，物体的壁面都是曲面。绕流时，边界层外边界上沿流动方向速度不断变化，边界层内的压强也将随之发生相应的改变。因此，曲面边界层与平板边界层的差别主要在于：边界层的外边界上，曲面边界层 $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$，平板边界层的 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$。所以曲面边界层又称为沿流动方向存在压力梯度的边界层。

因为一般曲面边界层的厚度比曲面的曲率小得多，应用曲线坐标系，将壁面弧长作 x 轴，可以将平板边界层的微分方程与动量方程近似地用于曲面边界层，但由于计算的复杂性，此处将不作讨论。本节主要说明曲面边界层分离的机理。

流体绕流曲面物体时(如图 11－9 所示)，在绕过前驻点后，物体迫使流体速度不断增加，根据伯努利方程，压强不断减小，至 M 点后，随过流断面增加，流速逐渐减小，压强不断增加。在 M 点处，边界层的外边界上速度最大，压强最低。



1	2	3	4	5
$\frac{\partial p}{\partial x}<0$	$\frac{\partial p}{\partial x}=0$	$\frac{\partial p}{\partial x}>0$	$\frac{\partial p}{\partial x}>0$	$\frac{\partial p}{\partial x}>0$
$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$	$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$	$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$	$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$	$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}<0$
$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}<0$	$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$	$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$	$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$	$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$

图 11-9

下面分析边界层中速度、压强的分布规律，以及边界层内流动的物理现象，说明曲面边界层分离的原因。

这里将应用边界层的微分方程加以讨论。因$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，边界层中压强的分布与边界层外边界上的压强分布相同，所以边界层内的压强沿流动方向随速度变化而升降。

在曲面壁上，$y=0$，$v_x=v_y=0$，于是由边界层微分方程的第一式得到

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

又由边界层外边界上的势流运动，有

$$p+\frac{1}{2}\rho V^{*2}=C$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho V^*\frac{\partial V^*}{\partial x}$$

根据曲面形状，将边界层内的流动分三种情况讨论：

(1) M 点以前(不包括 M 点)

由于过流断面随曲面逐渐减小，边界层外边界上的速度逐渐增加，压强减小，即

$$\frac{\partial V^*}{\partial x}>0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x}<0$$

所以边界层内的流动有

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} > 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

得到

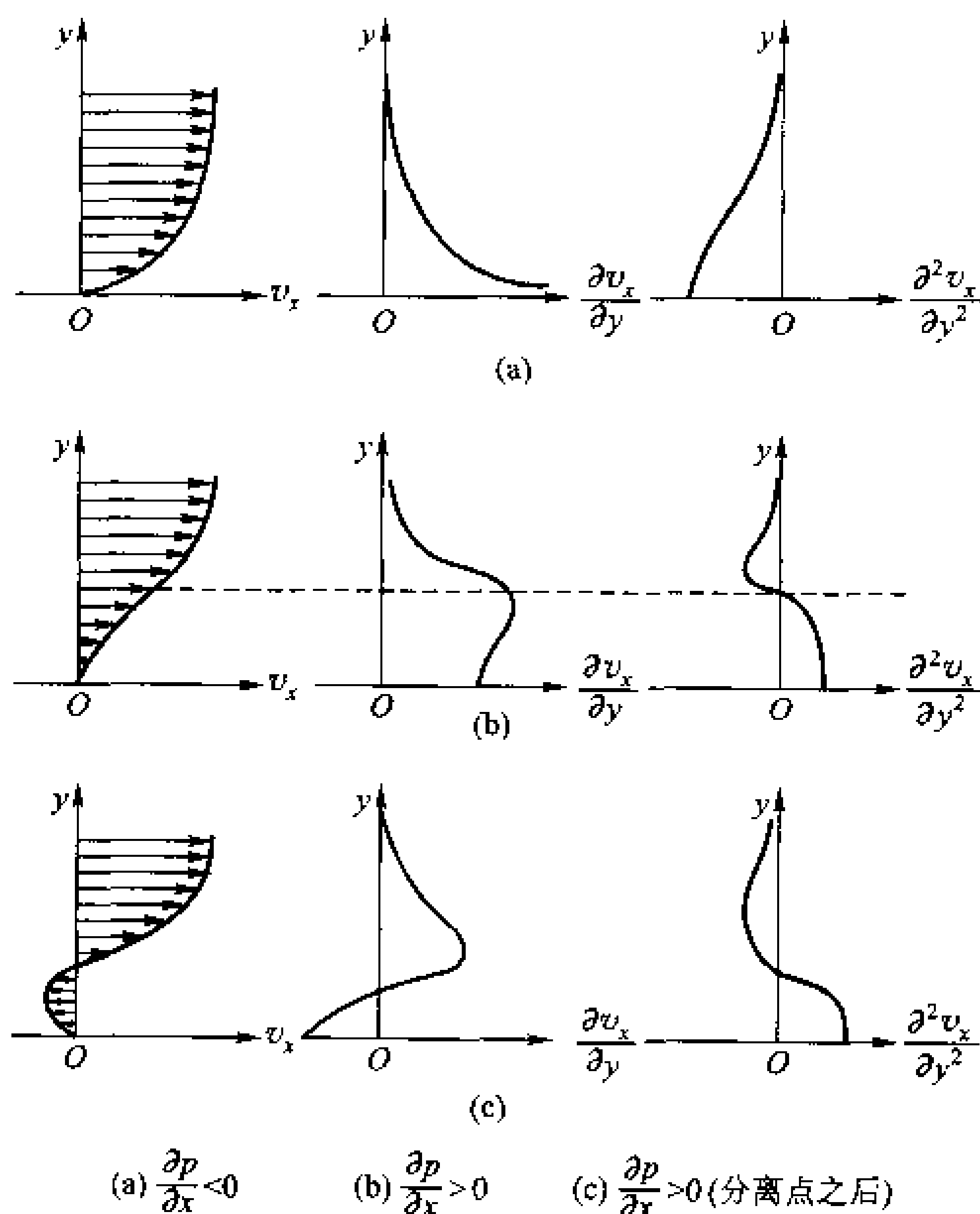
$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} < 0, \qquad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} > 0$$

说明边界层内的速度分布曲线沿 x 方向凸出，随 y 增大，$\frac{\partial v_x}{\partial y}$逐渐减小，当 $y \to \infty$时，$\frac{\partial v_x}{\partial y} \to 0$（见图 11-10(a)所示）。

在这一区域内，边界层内流体微团运动具有加速的特性，因此，尽管边界层内粘性流体（特别在临近边壁处）受边壁滞止作用，消耗动能，但由于降压增速，流体的部分压强能转换为动能，所以有足够的动能克服粘性力阻滞。在这一区域中边界层一般不会发生分离现象。

(2) M 点处

在该点处边界层外边界上速度达到最大值，压强最低，所以边界层内$\frac{\partial p}{\partial x}$



(a) $\frac{\partial p}{\partial x}<0$ (b) $\frac{\partial p}{\partial x}>0$ (c) $\frac{\partial p}{\partial x}>0$（分离点之后）

图 11-10

$=0$，有$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$。

(3) M 点以后

这一区域中，沿流动方向过流断面不断扩大，边界层外边界上的速度逐渐减小，压强增加，即

$$\frac{\partial V^*}{\partial x}<0,\ \frac{\partial p}{\partial x}>0$$

所以边界层内流动有

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}<0,\ \frac{\partial p}{\partial x}>0$$

得到$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}>0$

说明边界层内的速度曲线沿 x 方向内凹(如图 11－10(b))，在固体壁面附近随 y 增大$\frac{\partial v_x}{\partial y}$渐增，但 y 到某一值后，随 y 增大至外边界附近，$\frac{\partial v_x}{\partial y}$又逐渐减小趋近于零。因此，在 $y=0$ 到 $y=\delta$ 之间，速度曲线出现**拐点**，$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0$。

沿流动方向，开始阶段，仍有$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$，流体保持沿 x 方向流动。但在这一区域中，流体的动能不仅逐渐转变为压强能，同时粘滞力的阻滞作用又不断消耗动能。沿 x 方向，$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}$逐渐减小，到 S 点时，$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$，靠近壁面处流体的动能已被全部耗尽，流体微团停滞不前，造成流体微团在 S 点处堆积。这时，S 点以后，沿 x 方向，$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}<0$（见图 11－10(c)），压强继续升高。由于主流的减速，边界层厚度逐渐增加，边界层内的流体已不能从势流区获得能量补充。相反，在反向压差作用下，壁面附近产生逆向回流，排挤上游来的液流，使其与壁面分离，S 点是**分离点**。在离物体壁面较远处的流体微元，由于粘性力阻滞较小，仍有较大的动能继续向下游流动。在主流和逆流之间，有一条流体微团速度为零的 ST 线(图 11－9)，成为其间的间断面。

边界层分离点后面的回流区出现强烈的旋涡，又不断地被主流带走，在物体后部形成尾涡区。

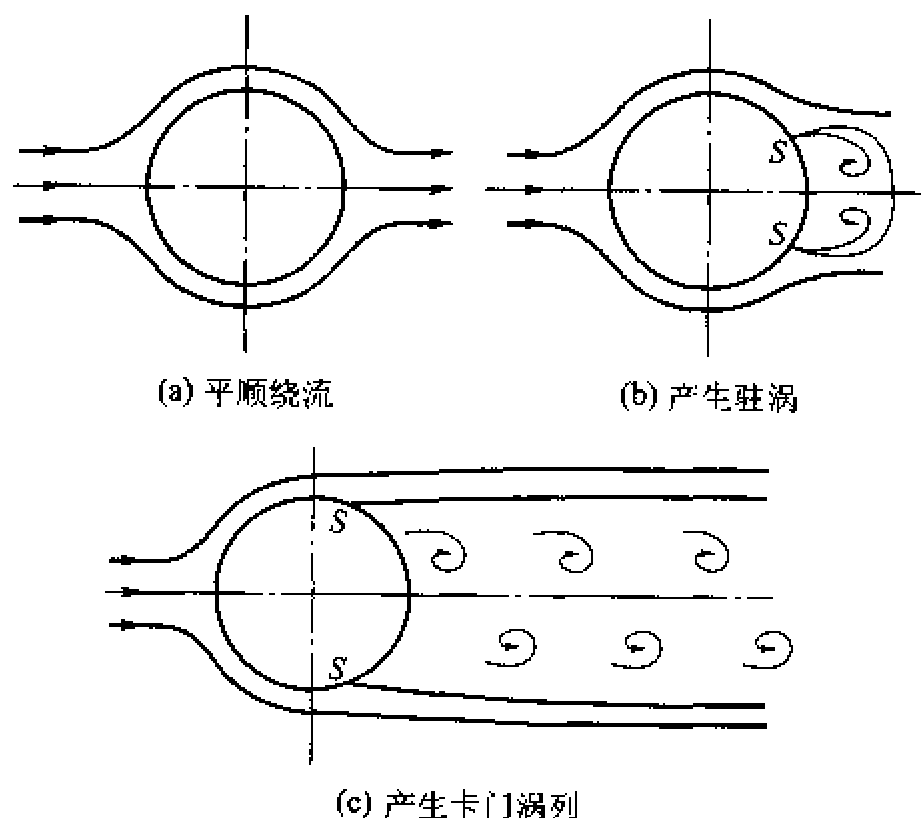
尾涡区中的强烈旋涡消耗能量，使物体后面的压强不能恢复，造成物体前后明显的压差，增加物体的**绕流阻力**，称为**压差阻力**。在工程上，为推后或避免边界层分离面引起绕流压差阻力，常将物体作成具有圆头和细长尾部的流线型。

§ 11 - 9　不良流线型体的绕流、卡门涡和绕流阻力

流体绕流物体时，若在较高的雷诺数下不发生分离，称该物体为**流线型体**。绕流流线型体的阻力主要是摩擦阻力．流线型体上的压强分布可以用势流理论求得。

但是，粘性流体绕流**不良流线型物体**时，都将产生边界层分离的绕流脱体现象，增大阻力并引起振动。为进一步说明边界层分离现象，鉴于热交换器中普遍采用着圆管，这里以圆柱体为例，分析流体在不同雷诺数下，绕流圆柱体的现象。

当流体以很小的雷诺数绕圆柱体流动时，与理想流体绕流圆柱体几乎相同，流体在前驻点处速度为零，然后沿圆柱对称向两侧绕流，在柱体前半部分是增速减压流动，在后半部分为减速增压流动，至后驻点汇合，速度又变为零。流动中，流体的惯性力极小，整个流场都是层流，不产生分离现象(如图 11 - 11a)，因此没有压差阻力，只存在不大的摩擦阻力。



(a) 平顺绕流　(b) 产生驻涡

(c) 产生卡门涡列

图　11 - 11

随着雷诺数增大，惯性力变得不能忽略，圆柱体后半部分的压强梯度增加，$Re\approx20$ 时，在 S 点处流体逐渐堆积，引起层流边界层分离，并在分离点

后面生成一对驻涡(见图 11－11b)。

继续增大雷诺数，柱体后部的压强梯度继续增加，分离点前移，柱体后部的尾迹拉长、涡对增大并逐渐变得不稳定，在 $Re>40$ 时，在圆柱体两侧的**涡对**，周期性地交替离开圆柱体，离体后在分离点后面又不断形成涡旋，周期性交替离体的旋涡在尾迹中成为交叉排列二行涡列(如图 11－11c)，称为**卡门涡街**(或卡门涡列)。

卡门涡街在大多数情况下是不稳定的，卡门证明，当 $Re=150$ 时，卡门涡街的稳定性条件是 $h/l=0.2806$ (h 为两列旋涡的间距，l 为相邻两旋涡间距离)。

当绕流一根圆柱体时，在 $Re_d=200\sim5\,000$ 范围内，卡门涡的交替**脱体频率**按下式计算

$$f_k=St\frac{V_\infty}{d} \tag{11-29}$$

式中　St——斯特劳哈尔数；

　　　d——圆柱体直径。

由图 11－12 可见，$Re_d\approx50\sim2\times10^5$ 范围内，斯特劳哈尔数从 0.12 增大到 0.21，在雷诺数大于 10^3 后，St 数基本等于常数 0.21，利用这一特点，如果测得管道内与流动方向垂直的圆柱形检测杆上卡门涡的脱落频率，由式(11－29)求得流速 V_∞，就可确定管道内流体的流量。

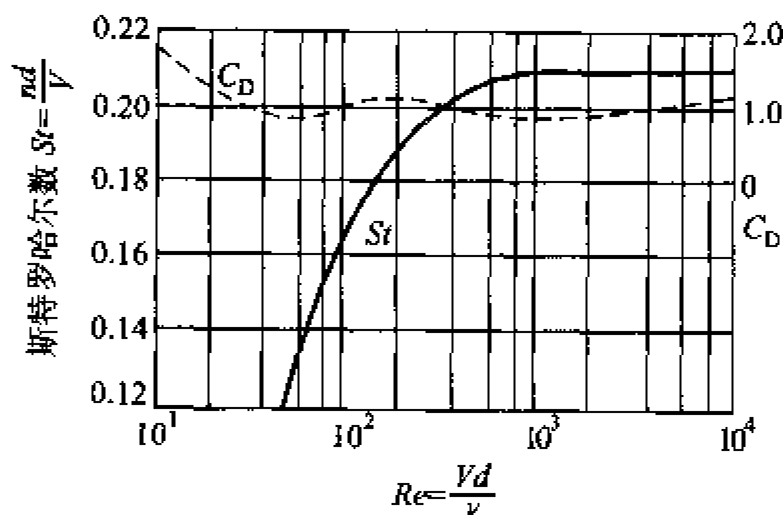


图　11－12

在雷诺数增大的过程中，边界层分离点逐渐前移到达极限位置，随雷诺数继续增加，分离点将出现突然后移，涡街的宽度突然缩小。这是由于这时边界层由层流突然转变成紊流，紊流边界层与主流间由于掺混而发生剧烈的动量交换，增强了主流对边界层内流体的加速作用，提高了边界层流体克服粘性阻滞的能力，从而使分离点后移、旋涡区域变小，绕流得到改善。

卡门涡街在大多数情况下都是不稳定的，当 $Re_d>5\,000$ 时，由于尾迹中

紊动加剧，不能清楚地看到卡门涡街。

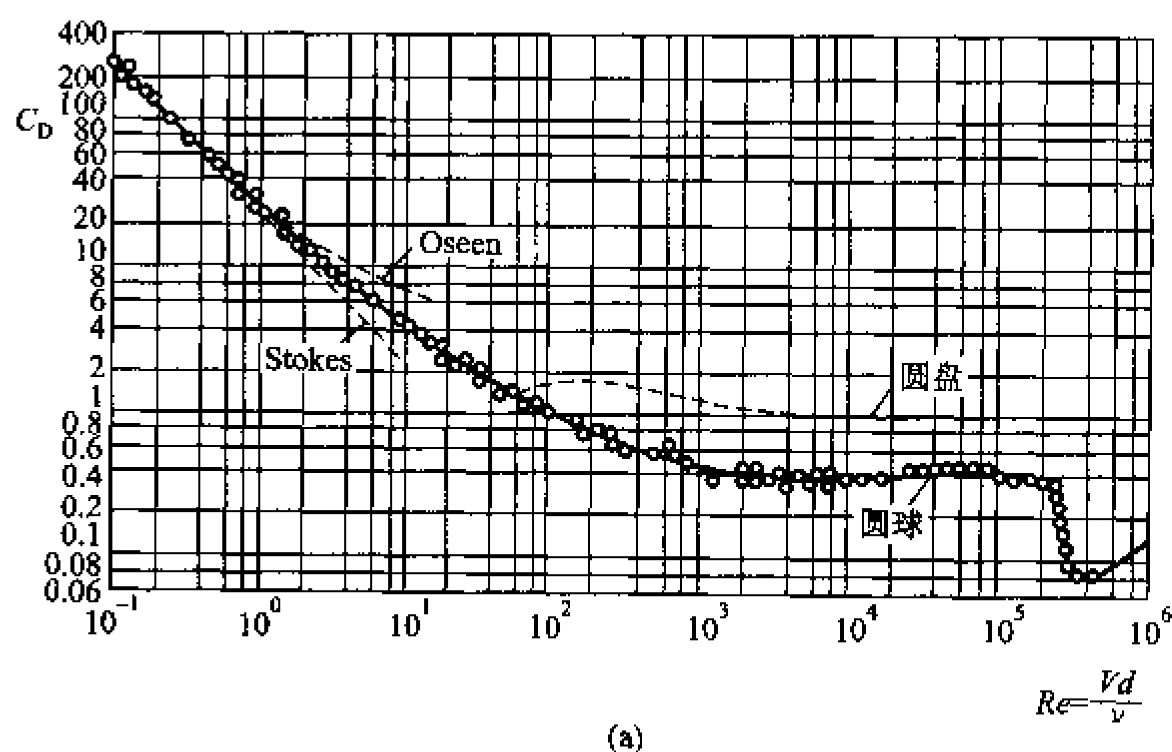
物体绕流时的阻力由压差阻力和摩擦阻力两部分组成，通常阻力 F_D可以写成

$$F_D = C_D A \frac{\rho V_\infty^2}{2}$$

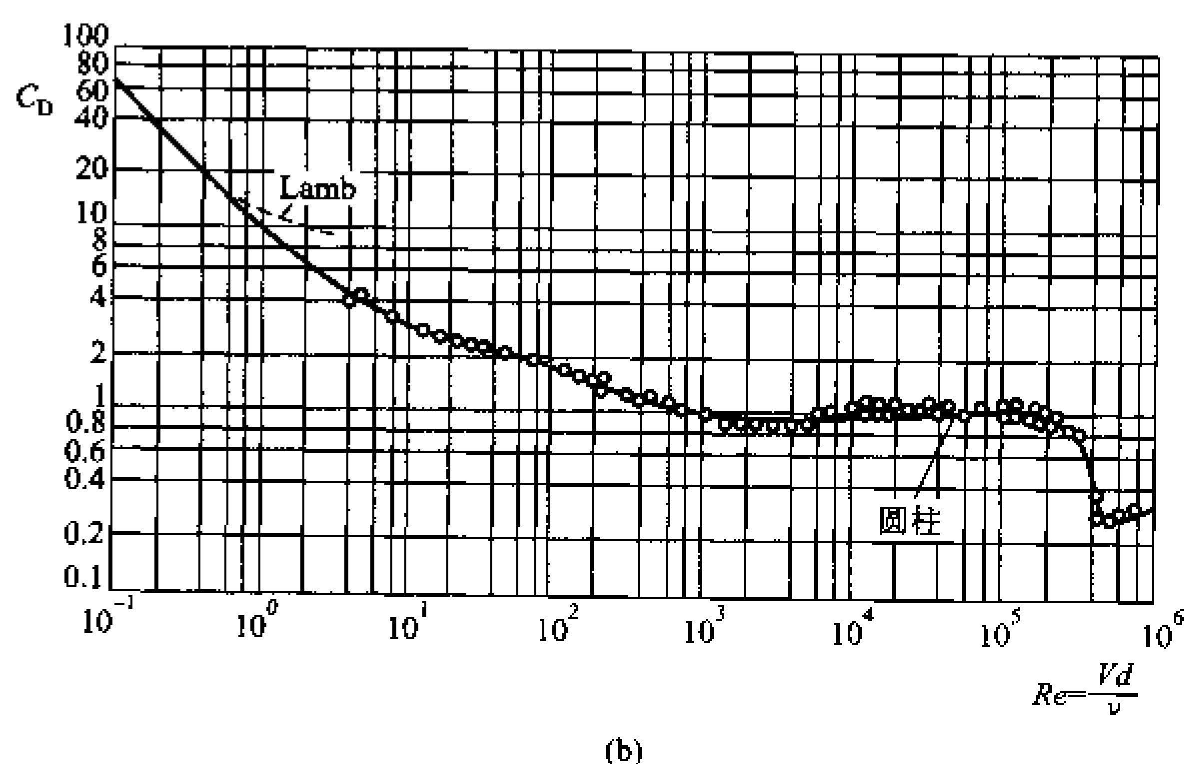
绕流阻力因数 C_D为

$$C_D = \frac{F_D}{A \frac{\rho V_\infty^2}{2}} \tag{11-30}$$

式中 A 为绕流物体在自由来流方向垂直面上的投影面积。



(a)



(b)

图　11－13

在边界层没有分离时，C_D随 Re_d增大下降较快。但当出现分离后，雷诺数增大时，随分离点前移，压差阻力稍有增加，摩擦阻力减小，这时 C_D随 Re_d增大继续减小，但比无分离时缓慢。当 $Re_d > 10^4$ 后，摩擦阻力已在总阻力中变得微不足道，阻力主要由压差阻力组成，因分离点不再前移，C_D基本成为一个定值。在 $Re_d = 2\times10^5$ 左右，边界层转变为紊流，分离点突然后移，这时虽然摩擦阻力由于变紊流而增加，但由于压差阻力显著下降，发生 C_D的突然下降，出现所谓"阻力危机"的情况(见图 11－13)。

对卡门涡流的实验研究发现，涡流脱体时，流体施加给圆柱体一个垂直于主流的周期性交变作用力。交变的频率与**涡流脱落**频率相同。显然，脱落前后圆柱体的绕流情况是不一样的，刚脱落涡流一侧的柱面，绕流改善，侧面总压力降低。正准备脱落涡流的一侧，绕流受阻，侧面总压力较高，因而形成一个作用在圆柱上，方向总是指向刚脱落涡流侧面的作用力。这种方向交变的作用力，频率由式(11－29)计算，可以达到每秒数百到上千次。如果这个频率与物体的**共振频率**相等时，将会引起**谐振**。卡门涡流脱落时还将使空气振动，发生声响效应，引起啸叫和振动。野外的输电线在大风中发出的嘘叫声就是由卡门涡流脱落造成的。如果设计不当，潜水艇潜望镜在水中移动时也将因振动而无法工作。高大烟囱有可能在大风中因谐振而破坏。1940 年美国华盛顿州塔可马吊桥被风吹毁也是这个原因。

工业上许多换热设备都由圆管做成，安装圆管的横向空间中某一体积的气柱，也有自己的声振频率，若设计不当，卡门涡流脱落频率与气柱的声振频率相近时，就会诱发声波谐振，产生严重的噪声。上述声振频率一旦再与管子频率相合，更会造成设备的严重破坏。

在一些工程的弹性构件中，旋涡脱落现象诱发的大振幅谐振将可能对桥梁、野外电缆、天线、烟囱、热交换器等产生摧毁性的作用。设计者的重要任务之一就是要避免谐振发生，并尽可能减小绕流阻力。首先应设法避免边界层的分离，在不发生分离的情况下，边界层应尽量保持为层流。一旦发生分离，则应在将要发生分离处设法使边界层由层流转变为紊流，以延缓分离，或使分离点后移。发生分离的原因是沿流向流体压强增大和动能不足，因此，在分离点附近用抽吸流体减压，或沿壁面用缝隙喷射流体，使流体加速，都可以消除或延缓分离，达到减小阻力的目的，这些方法称为**边界层控制**。

§11－10 管道入口起始段

流体从一个大容器流入管道时，如果入口处圆滑过渡，则在入口的 $a-a$

截面处(图 11 - 14)流速均匀分布。管壁与流体的分子引力，使壁面上粘附着一层流体，由于流体的粘性作用，在近壁处形成使流体减速的边界层，沿流动方向边界层增厚，并逐渐向管轴扩展。根据流动连续原理，边壁处粘性阻滞作用使流体减速，必将有边界层外中间部分流体的加速运动，这种从入口处开始的流体速度的重新组合，形成沿流动方向各过流断面速度分布不断变化，边界层逐渐增厚，最后在离入口某一距离 l_e的 $c-c$ 断面处，边界层厚度达到管轴中心，从这以后，管中过流断面上的速度分布不再变化。我们将速度不断变化的 $a-a$ 到$c-c$ 断面之间称为入口起始段，l_e称为入口起始段长度。速度不再变化的 $c-c$ 断面以后的流动称为完全发展了的流动。

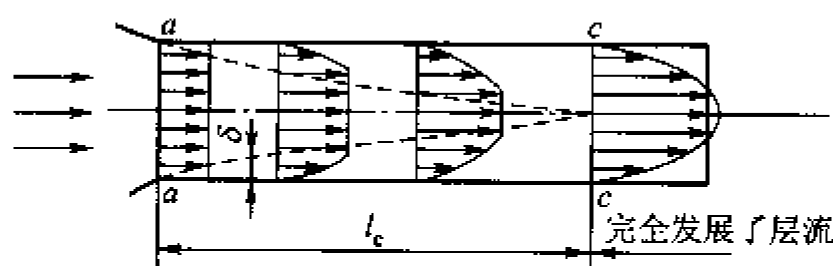


图　11 - 14

入口段中流速分布的不断改变及速度的重新组合，引起附加损失，因此，管道入口段中的能量损失将与完全发展了的流动不同。无疑，对于换热器和流体传动中广泛采用的短管道，研究入口段中的流动速度，压力分布以及损失规律有着重要意义。

一般，入口段断面中心处流速等于完全发展了的流动中心处流速的 99%左右处，认为是入口段流动已完全发展的判别标准。然而，由于不同学者取用的标准不同，常常得到不同的入口起始段长度。

入口处起始段既可以是层流，也可以是紊流。希累尔(Schiller)应用动量积分方程，取管轴心处的流速 $v=0.89\ v_{max}$时，作为入口段终了的标准，得到**层流入口**段长度为

$$l_e = 0.028\ 75\ dRe \qquad (11-31)$$

1891 年布西内斯克(Boussinesq)采用 N - S 方程，取管轴心处流速为完全发展了流动轴心速度的 98%，作为入口段终了的标准，得到层流**入口段长度**为

$$l_e = 0.065\ dRe \qquad (11-32)$$

兰哈尔(Langhaar)得到层流入口段长度为

$$l_e = 0.058\ dRe \qquad (11-33)$$

上述在不同的理论和标准下由不同的学者得到的层流入口段长度，都已为实验证实。

对于紊流，由于流体质点剧烈紊动掺混，从入口处的均匀流速，到对数曲

线速度分布的完全发展紊流，入口起始段长度由下式确定

$$l_e = 1.36\ dRe^{1/4} \tag{11-34}$$

尼古拉兹实验得到，当 $Re = 9 \times 10^5$ 时，测得 $l_e = 40\ d$，而由式(11－34)算得 $l_e = 41.8\ d$，两者十分接近。因此，紊流入口段长度采用下式计算

$$l_e = (25 \sim 40)d \tag{11-35}$$

对于尖锐入口的管道，流体进入管道时先收缩后扩大，增强了入口起始段效应，因此入口起始段长度将增加。

管路入口段中，除了粘性摩擦引起的能量损失外，还由于流体入口段效应的速度变化引起附加能量损失，因此入口起始段内的压强损失可写成

$$\Delta p' = \lambda \frac{l_e}{d}\frac{1}{2}\rho V^2 + \xi'_e \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{11-36}$$

式中第一项表示粘性摩擦的压力损失，第二项表示入口段效应的附加损失。于是，压强损失因数

$$\lambda'_p = \frac{\Delta p'}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \lambda \frac{l_e}{d} + \xi'_e \tag{11-37}$$

式中 $\Delta p'$——压强损失，$\Delta p' = p_1 - p_2$；

p_1——管道入口处的压强；

p_2——入口段终了处的压强；

ξ'_e——入口段效应附加压强损失因数。

如果考虑从很大容器速度为零到入口处形成均匀流速的压强损失包括在内，则压强损失

$$\Delta p = p_0 - p_2 = \lambda \frac{l_e}{d}\frac{1}{2}\rho V^2 + \xi'_e \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{11-38}$$

压强损失因数

$$\lambda_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \lambda \frac{l_e}{d} + \xi_e \tag{11-39}$$

式中 p_0——容器中流体表面上的压强和液位能头之和；

ξ_e——附加压强损失因数，$\xi_e = \xi'_e + 1$。

1. 层流入口段的能量损失

入口段内为层流流动，当 $l \geqslant l_e$时，压强损失因数为

$$\lambda_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{64}{Re}\frac{l}{d} + \xi_e \tag{11-40}$$

层流入口段的附加压强损失因数 ξ_e 与雷诺数无关．对于进口圆滑的管道，ξ_e 的理论计算值约为 2.2～2.4，瑞曼的实验得到 $\xi_e=2.248$，两者相符。对于锐缘进口，$\xi_e\approx 2.7$。

考虑入口段效应的压强降为

$$\Delta p=\left(\frac{64}{Re}\frac{l}{d}+\xi_e\right)\frac{1}{2}\rho V^2$$

$$=\left(1+\frac{\xi_e}{\frac{64}{Re}\frac{l}{d}}\right)\frac{64}{Re}\cdot\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho V^2$$

$$=C_e\frac{32\mu l}{d^2}V \tag{11－41}$$

式中 C_e——层流入口段效应**流量修正因数**。

$$C_e=1+\frac{\xi_e}{\frac{64}{Re}\frac{l}{d}} \tag{11－42}$$

断面平均流速为

$$V=\frac{d^2\Delta p}{C_e 32\mu l} \tag{11－43}$$

流量

$$q_V=\frac{\pi d^4\Delta p}{C_e 128\mu l} \tag{11－44}$$

从式(11－44)可见，由于入口起始段效应增加了能量损失，流量减小了。如果管道 $l\gg l_e$ 时 $C_e\approx 1$，入口起始段效应可以忽略。但对短管，必须考虑入口段效应。

当 $l\leqslant l_e$ 时，即管长小于进口段长度时，式(11－40)中的附加压强损失因数由下式确定

$$\xi_e=1+3\left(\frac{1}{Re}\frac{l}{d}\right)^{1/4} \tag{11－45}$$

2. 紊流入口段的能量损失

圆管入口段中为紊流流动。对于 4 000 < Re < 10^5 的紊流光滑管区，当 $l>l_e$ 时，考虑入口段效应时的压强损失因数为

$$\lambda_p=\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}=\frac{0.316\,4}{Re^{1/4}}\cdot\frac{l}{d}+\xi_e \tag{11－46}$$

式中**紊流入口段**效应附加压强损失因数 ξ_e 与 Re 无关。对于入口圆滑的管道，ξ_e 的理论值约为 1.07。对于锐缘进口的管道，ξ_e 还应加上 0.38～0.5。

考虑入口段效应时的压降由式(11-46)得到

$$\Delta p = \left(\frac{0.3164}{Re^{1/4}}\frac{l}{d} + \xi_e\right)\frac{1}{2}\rho V^2$$

$$= \left(1 + \frac{\xi_e}{\frac{0.3164}{Re^{1/4}}\frac{l}{d}}\right)\frac{0.3164}{Re^{1/4}}\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho V^2$$

$$= C_e \frac{0.158\rho^{3/4}\mu^{1/4}V^{7/4}l}{d^{5/4}} \tag{11-47}$$

式中 C_e——紊流入口段效应流量修正因数。

$$C_e = 1 + \frac{\xi_e}{\frac{0.3164}{Re^{1/4}}\frac{l}{d}} \tag{11-48}$$

断面平均速度为

$$V = \frac{d^{5/7}\Delta p^{4/7}}{0.348 C_e^{4/7}\rho^{3/7}\mu^{1/7}l^{4/7}} \tag{11-49}$$

流量

$$q_V = 2.253\frac{d^{19/7}\cdot\Delta p^{4/7}}{C_e^{4/7}\rho^{3/7}\mu^{1/7}l^{4/7}} \tag{11-50}$$

当 $l = l_e$，$l/d = 1.359\ Re^{1/4}$时，计算得到 $C_e = 3.492$，$C_e^{4/7} = 2.043$。因此，对于短圆管道的紊流流动，在流量计算中，入口起始段效应的影响同样不能略去不计。

当 $l \leqslant l_e$即管道长小于进口段长度时，式(11-46)中的附加损失因数由下式确定

$$\xi_e = 1 + 0.07\left(\frac{1}{Re^{1/4}}\frac{l}{d}\right)^{0.36} \tag{11-51}$$

§11-11 小雷诺数平行流绕球体的阻力

在热能工程中，煤粉颗粒、烟气中的尘粒以及蒸汽中的水滴等，都可以近似地看作为小圆球体，而在热能装置或大气中的离析沉降和输送中，常常遇到小球体与周围流体间相对运动速度很小的情况，即小雷诺数绕球体的流动。

当雷诺数很小时，流体对球体起控制作用的是粘性力，惯性力与之比较要小得多，因此研究中可以略去非线性的惯性项不计。这样，对于恒定不可压平行流绕流球体，略去质量力和惯性项后，N-S方程简化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \ \nabla^2 v_x \\
\dfrac{\partial p}{\partial y} = \mu \ \nabla^2 v_y \\
\dfrac{\partial p}{\partial z} = \mu \ \nabla^2 v_z
\end{cases}
\tag{11 - 52}
$$

连续方程式为

$$
\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{11 - 53}
$$

1851 年斯托克斯首次求解了恒定平行流在小雷诺数下绕球体运动时的阻力问题。虽然他讨论的是球体在静止流体中的运动，但它与平行流绕流静止球体时的运动情况完全相同。

研究球体绕流时，采用球坐标比直角坐标更为方便。讨论中认为小雷诺数绕流时球面上不发生边界层分离。现令坐标原点取在球心，球体的半径为 r_0，直径为 d，球外任意被讨论点至坐标原点的距离用 r 表示，为研究方便，将直角坐标系变成如图 11 - 15 所示放置。

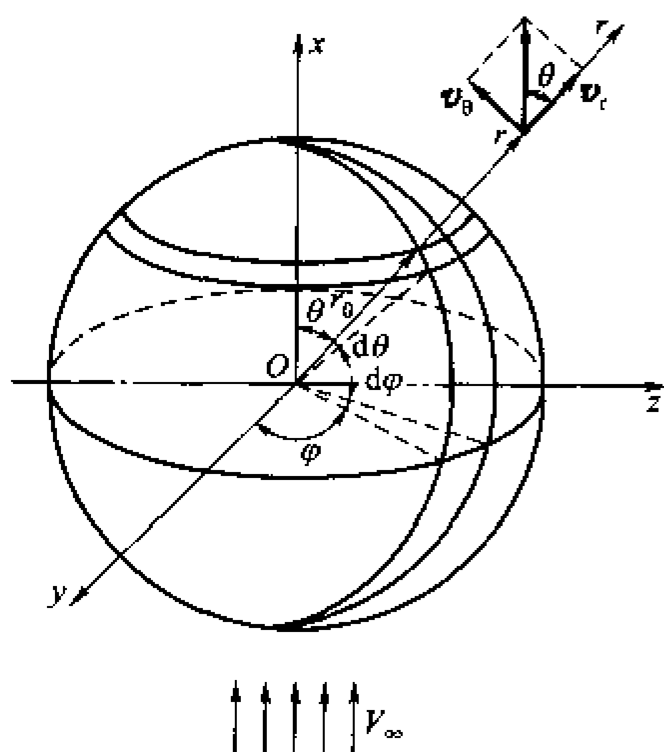


图　11 - 15

因为沿 x 轴向的平行流绕静止球体是对 x 轴的轴对称流动，所以在 r，θ，φ 球坐标系中，径向流速 v_r，切向流速 v_θ 和压强 p 都只是 r 和 θ 的函数，速度分量 $v_\varphi = 0$，即

$$
v_r = v_r(r,\theta),\quad v_\theta = v_\theta(r,\theta),\quad v_\varphi = 0,\quad p = p(r,\theta)
$$

考虑轴对称条件，略去惯性项和质量力，球坐标系中的 N－S 方程可以写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right.\\ \left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}v_\theta-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)\\ \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\mu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right.\\ \left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\end{aligned}\tag{11-54}$$

连续方程式变为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}=0\tag{11-55}$$

粘性流体绕球体流动时球面上和无穷远处的边界条件为

当 $r=r_0$ 时，$v_r(r_0,\theta)=0$，$v_\theta(r_0,\theta)=0$

当 $r=\infty$ 时，$v_r=V_\infty\cos\theta$，$v_\theta=-V_\infty\sin\theta$，$p=p_\infty$

式中 V_∞ 和 p_∞ 分别为无穷远处平行流的速度和压强。

我们的任务是根据上述边界条件，从式(11－54)和(11－55)解出 v_r，v_θ，然后计算作用在球体上的合力。为此，我们令

$$\left.\begin{aligned}v_r(r,\theta)&=f(r)\cos\theta\\ v_\theta(r,\theta)&=-g(r)\sin\theta\\ p(r,\theta)&=\mu h(r)\cos\theta+p_\infty\end{aligned}\right\}\tag{11-56}$$

将式(11－56)代入式(11－54)和(11－55)中，简化后得到三个常微分方程式

$$\left.\begin{aligned}h'&=f''+\frac{2}{r}f'-\frac{4(f-g)}{r^2}\\ \frac{h}{r}&=g''+\frac{2}{r}g'+\frac{2(f-g)}{r^2}\\ f'&+\frac{2(f-g)}{r}=0\end{aligned}\right\}\tag{11-57}$$

上面微分方程组的边界条件为

当 $r=r_0$ 时，$f(r_0)=0$，$g(r_0)=0$

当 $r=\infty$ 时，$f(\infty)=V_\infty$，$g(\infty)=V_\infty$

将式(11－57)中的第三式改写成

$$g=\frac{1}{2}f'r+f\tag{11-58}$$

上式的一次和二次微分分别为

$$g' = \frac{1}{2}f''r + \frac{3}{2}f' \tag{11-59}$$

$$g'' = \frac{1}{2}f'''r + 2f'' \tag{11-60}$$

将式(11-58)，(11-59)和(11-60)代入式(11-57)中的第二式，得

$$h = \frac{1}{2}f'''r^2 + 3rf'' + 2f' \tag{11-61}$$

对上式微分

$$h' = \frac{1}{2}f^{(4)}r^2 + 4f'''r + 5f'' \tag{11-62}$$

将式(11-58)和(11-62)代入式(11-57)的第一式，经整理后得

$$r^3f^{(4)} + 8r^2f''' + 8rf'' - 8f' = 0 \tag{11-63}$$

式(11-63)是欧拉型的微分方程，其特解永远可写成下面形式

$$f = r^k$$

代入式(11-63)得

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0$$

解上面代数方程得

$$k = 0,\ 2,\ -1 \text{ 和 } -3$$

由此求得微分方程(11-63)的通解为

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \tag{11-64}$$

式中 A，B，C，D 为积分常数。对式(11-64)分别求一次，二次和三次微分

$$\left.\begin{aligned} f' &= -\frac{3A}{r^4} - \frac{B}{r^2} + 2Dr \\ f'' &= \frac{12A}{r^5} + \frac{2B}{r^3} + 2D \\ f''' &= -60\frac{A}{r^6} - \frac{6B}{r^4} \end{aligned}\right\} \tag{11-65}$$

将 f，f'，f''和f'''分别代入式(11-58)和(11-61)中，得

$$g = \frac{-A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2 \tag{11-66}$$

$$h = \frac{B}{r^2} + 10Dr \tag{11-67}$$

根据上述球面上和无穷远处的边界条件可确定积分常数为

$$A = \frac{1}{2}r_0^3V_\infty,\quad B = -\frac{3}{2}r_0V_\infty,\quad C = V_\infty,\quad D = 0$$

代入式(11－64)，(11－66)和(11－67)中有

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\frac{r_0^3}{r^3}V_\infty - \frac{3}{2}\frac{r_0}{r}V_\infty + V_\infty \\ g &= -\frac{1}{4}\frac{r_0^3}{r^3}V_\infty - \frac{3}{4}\frac{r_0}{r}V_\infty + V_\infty \\ h &= -\frac{3}{2}\frac{r_0 V_\infty}{r^2} \end{aligned}\right\} \tag{11-68}$$

将 f，g 和 h 代入式(11－56)，最后得到方程(11－54)和(11－55)的解为

$$\left.\begin{aligned} v_r &= V_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_0}{r} + \frac{1}{2}\frac{r_0^3}{r^3}\right) \\ v_\theta &= -V_\infty \sin\theta\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r_0}{r} - \frac{1}{4}\frac{r_0^3}{r^3}\right) \\ p &= p_\infty - \frac{3}{2}\mu\frac{r_0 V_\infty}{r^2}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{11-69}$$

式中 p_∞ 为无穷远处的压强。在球体前后两个驻点 S_1（$\theta = 180°$）和 S_2（$\theta = 0°$）处的压强为

$$p_{S_1} = p_\infty + \frac{3}{2}\frac{\mu V_\infty}{r_0}$$

$$p_{S_2} = p_\infty - \frac{3}{2}\frac{\mu V_\infty}{r_0}$$

前后驻点处的压强不相等，说明流体对圆球作用有 x 方向的合力。在球体表面上，$v_r = v_\theta = 0$，有 $\frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$，$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$，$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$，所以压应力和切应力分别由式(7－18)和(7－19)根据边界条件得到

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} = -p_\infty + \frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{r_0}\cos\theta \\ \tau_{r\theta} &= \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) = -\frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{r_0}\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{11-70}$$

在球面上取微元带形面积 $\mathrm{d}A = 2\pi r_0 \sin\theta \times r_0\mathrm{d}\theta = 2\pi r_0^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta$，于是球面上压应力的合力和切应力的合力在 x 轴向的分量分别为

$$F_\sigma = \iint_A \sigma_{rr}\cos\theta\mathrm{d}A$$

$$F_\tau = \iint_A \tau_{r\theta}\sin\theta\mathrm{d}A$$

考虑到对微元带形面积，θ 的积分范围从 0 到 π，得到

$$F_\sigma = \int_0^\pi\left(-p_\infty + \frac{3}{2}\mu\frac{V_\infty}{r_0}\cos\theta\right)\cos\theta \times 2\pi r_0^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2\pi\mu r_0 V_\infty$$

$$F_\tau = \int_0^\pi \left(-\frac{3}{2}\mu \frac{V_\infty}{r_0}\sin\theta \right)\sin\theta \times 2\pi r_0^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = 4\pi\mu r_0 V_\infty$$

所以球体对绕流的总阻力为

$$F_D = F_\sigma + F_\tau = 6\pi\mu r_0 V_\infty = 3\pi\mu d V_\infty \tag{11-71}$$

这就是小雷诺数绕球体流动阻力的**斯托克斯公式**。

式(11-71)可改写为

$$F_D = C_D \frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho V_\infty^2}{2} \tag{11-72}$$

阻力因数 C_D为

$$C_D = \frac{F_D}{\dfrac{\pi d^2}{4}\dfrac{\rho V_\infty^2}{2}} = \frac{24}{\dfrac{V_\infty d}{\nu}} = \frac{24}{Re_d} \tag{11-73}$$

实验证明，只有当雷诺数很小时($Re_d < 1$)，由上面公式求得的阻力因数才是正确的，当雷诺数较大时，理论值与实验值相差很大。事实上，斯托克斯忽略惯性力影响的假设，只有在球体表面上才是正确的。当离开球体表面时，惯性力的影响就不能完全略去，这时将出现与原来假定间的矛盾。对此，1910年奥辛(Oseen C.W)提出了部分地考虑惯性项影响的近似解法(适用于 $Re_d < 2$，推导从略)，但**奥辛解**在较大雷诺数时也与实验值偏离较远，**斯托克斯解**偏小，而奥辛解则偏大(见图 11-13)，其原因在于雷诺数增大时，粘性流体对球体的绕流将不可避免地发生与球面分离，从而改变了球体周围的压应力和切应力的分布。

现在转而讨论直径为 d 的圆球在静止流体中的自由下落。球体从静止起始，在重力作用下速度逐渐增大，随之，对球体的流体阻力也逐渐增加。下落至某一位置处时，圆球的重力 G 将与流体作用在球体上的浮力 F_b和阻力 F_D达到平衡状态，即

$$G = F_b + F_D \tag{11-74}$$

这时，圆球在流体中将以等速度 V_D自由沉降，称 V_D为球体的**自由沉降速度**。

若球体的重力　$G = \dfrac{1}{6}\pi d^3 \rho_{sp} g$

流体的浮力　$F_b = \dfrac{1}{6}\pi d^3 \rho g$

流体的阻力　$F_D = C_D \dfrac{1}{4}\pi d^2 \dfrac{\nu}{2}\dfrac{V_D^2}{g}$

代入式(11-74)得球体沉降速度

$$V_D = \sqrt{\frac{4gd(\rho_{sp} - \rho)}{3C_D\rho}} \tag{11-75}$$

式中阻力因数 C_D在 $Re<10^3$ 范围内，随 Re 增加，C_D减小。$Re\leqslant 1$ 时，$C_D=\dfrac{24}{Re}$；在 $Re=10\sim 1\ 000$ 时，$C_D=\dfrac{13}{\sqrt{Re}}$。在 $Re=10^3\sim 2\times 10^5$ 区域中，C_D几乎与 Re 无关，其平均值 $C_D=0.48$。

球体颗粒在气体中沉降时，因为气体的密度远小于球体的密度，所以计算中可以用下面的公式进行

$$V_D=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{gd}{C_D}\frac{\rho_{sp}}{\rho}} \tag{11-76}$$

式中 C_D在不同 Re 下的取值与上述相同。

若球体被垂直上升的气流带走，则球体上升的绝对速度

$$V_{sp}=V-V_D$$

显然，当 $V=V_D$时，$V_{sp}=0$，球体将悬浮在运动流体中静止不动，这时流体的上升速度 V 称为球体的悬浮速度。

§ 11－12 自由紊流射流

从管嘴或孔口喷射出的一束流体，由于脱离了原来限制它流向的管子，在充满流体的空间中继续做扩散运动，流体的这种流动称为自由**射流**。它与管道中流动的不同之处在于，管流周界是固体，而射流除某些附壁射流外，射流的周界全部是流体。除雷诺数很小的射流外，工程技术中遇到的一般都是紊流，称为**自由紊流射流**。锅炉中燃料喷射入燃烧室，热机的喷油装置等喷出的流体都是射流。这里不讨论可压缩的高速气体射流。

1. 自由紊流射流的一般特性

如果射流从喷嘴射出后，进入温度、密度都与射流相同的静止流体中，这样的射流称为**自由淹没射流**。射入不同性质流体中的射流称为非淹没射流。

所讨论的射流雷诺数超过临界值，作紊流流动。因此，射流不但沿喷管轴线 x 方向流动，而且由于流体微团剧烈的横向脉动，使射流与周围流体不断地相互掺混，进行质量和动量交换，带动周围的静止流体一起运动。随射流不断向前运动，被射流带动的质量逐渐增多，射流将一部分动量传递给带入的流体，速度逐渐降低。射流的宽度也因之不断扩大，最后射流的能量全部消失在空间流体中。上面的分析说明射流能够抽引周围流体进入射流一起运动，称为引射能力。图 10－16 给出了自由淹没射流的速度分布和结构。

射流以均匀流速 v_0 从管嘴流出，流动中不断抽引周围流体，射流的宽度

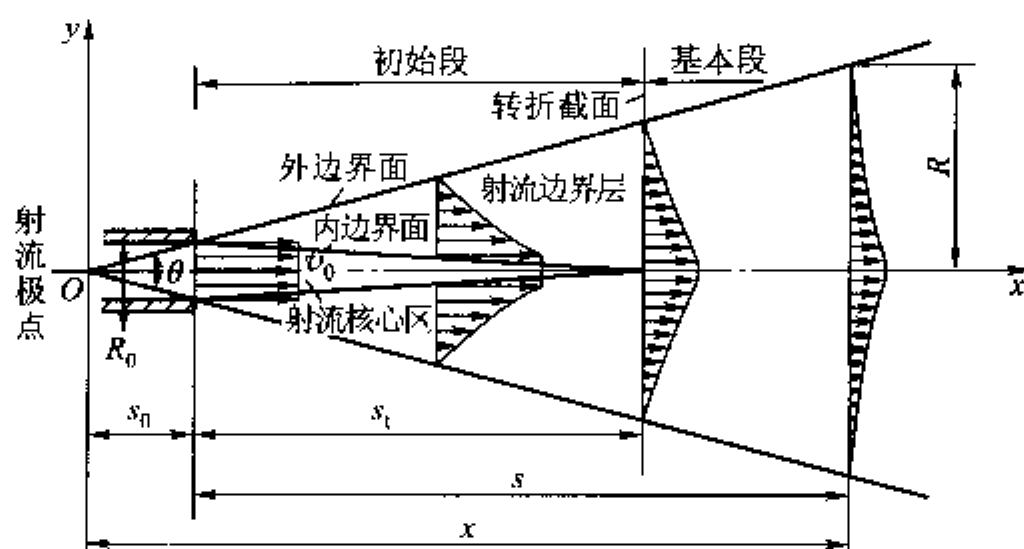


图 11 - 16

不断扩大，主体速度逐渐降低，射流中心处保持射流初始速度 v_0 的核心区域逐渐缩小。射流与静止流体的交界面(速度为零)称为射流的外边界，轴向速度保持初始值 v_0 的核心区边界称为内边界，内外边界之间的区域称为射流边界层。**射流核心区**完全消失的横截面称为转折截面，在该截面处射流边界层扩展到射流轴心线，在转折截面左侧，射流中心线上仍保持初始速度，在转折截面之后，射流中心速度开始下降。转折截面离开管嘴出口的距离用 s_t 表示。

管嘴出口到转折截面间的射流称为初始段，其特点是射流核心区在初始段中。转折截面以后的射流区段称为基本段，基本段中的轴向流速沿流动方向逐渐减小，直至为零，射流消失在周围流体介质中，射流的基本段中全部是射流边界层。

射流边界层的内、外边界线都是直线，射流外边界线的交点称为**射流极点**，其位置在管嘴内，该点与喷嘴出口间的距离为 S_0。外边界线之间的夹角 θ 称为**射流极角**，又称为**射流扩散角**。

射流在流动扩散过程中，将存在横向分速度 v_y，但在射流边界层的任何截面上，横向分速度远小于轴向分速度 v_x，通常认为射流的速度就是 v_x，也正由于此，**射流的宽度**小于射流的长度。此外，实验证明沿射流边界层横截面上的压强近似不变，它等于周围静止流体的压强，因此可以认为，整个射流区内各点的压强相同。这样，根据动量定理，在射流的任意截面上，沿 x 方向的动量保持不变，等于射流在管嘴出口处的动量，即

$$\int \rho v^2 \mathrm{d}A = \rho_0 v_0^2 A_0 = \rho_0 \pi R_0^2 v_0^2 = \text{常数} \tag{11-77}$$

式中 A_0——管嘴出口处的横截面积；

R_0——管嘴半径；

ρ_0——管嘴出口处流体的密度。

2. 圆形断面的自由紊动射流

对于**圆形断面射流**，根据图 11－17 所示，$dA = 2\pi r dr$，式(11－77)可写成

$$2\pi\int_0^R \rho v^2 r dr = \pi\rho_0 v_0^2 R_0^2$$

因为射流与周围流体的温度和密度相同，即 $\rho = \rho_0$，可以将上式写成无量纲形式

$$2\int_0^{R/R_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\frac{r}{R_0}d\left(\frac{r}{R_0}\right) = 1$$

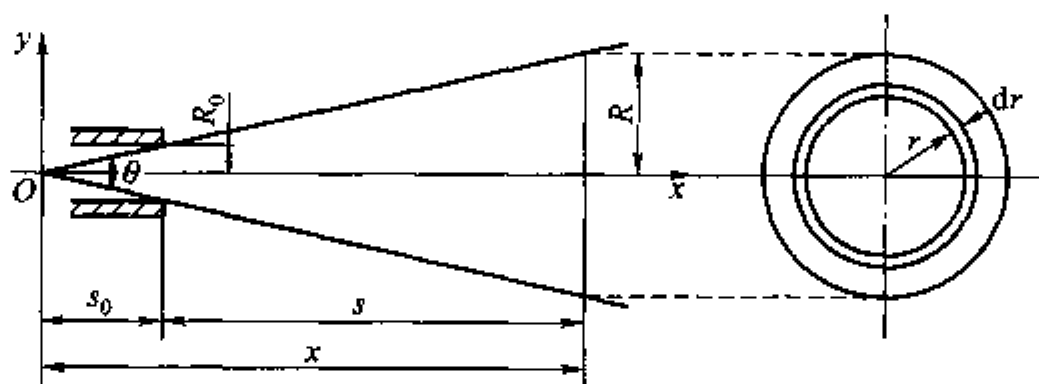


图 11－17

将上式中无量纲纵坐标$\frac{r}{R_0}$改写成$\frac{r}{R}\cdot\frac{R}{R_0}$,其中$\frac{R}{R_0}$只决定于该横截面至射流极点的距离 x,而与该点在横截面上的位置(r)无关。同样，无量纲速度$\frac{v}{v_0}$，可改写为$\frac{v}{v_m}\cdot\frac{v_m}{v_0}$，其中$\frac{v_m}{v_0}$也与该点在横截面上的位置无关。这样，上式可改写成

$$2\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^2\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\frac{r}{R}d\left(\frac{r}{R}\right) = 1 \qquad (11-78)$$

式中 v_m——射流截面轴心线上的速度。

根据实验结果整理得到速度分布$\frac{v}{v_m}$的经验公式，以及 v_m和 R 随 x 的变化关系，可以求出定积分

$$\int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\frac{r}{R}d\left(\frac{r}{R}\right) = 0.0464$$

代入式(11－78)计算得到

$$\frac{R}{R_0} = 3.28\frac{v_0}{v_m} \qquad (11-79)$$

在转折截面上 $v_m = v_0$，因此，转折截面上无量纲半径恒为常数

$$\frac{R}{R_0} = 3.28$$

即在转折截面上，射流宽度等于喷管直径的 3.28 倍。

射流的外边界线是一条直线，因此，射流宽度正比于 x 距离，于是 $R/x = \tan\frac{\theta}{2}$。对于不同的喷嘴形式，射流扩散角有不同的数值，因此 R/x 有不同的常数值。这里引入反映喷嘴形式的系数 a，使 R/ax = 常数。根据实验结果分析，得到轴向对称射流有 $R/ax = 3.4$，或 $R = 3.4ax$。

对于圆形截面喷管，a 的平均值等于 0.07～0.08，得到射流扩散角 $\theta = 27° \sim 30°30'$。a 通常由试验确定，对于一定的喷嘴形状，其数值与流出管嘴时初始速度沿截面的分布情况和射流的初始紊动强度有关。

以 $R = 3.4ax$ 代入式(11－79)中得到

$$\frac{v_m}{v_0} = 3.28\frac{R_0}{R} = \frac{3.28R_0}{3.4ax} = 0.966\frac{R_0}{ax} \tag{11-80}$$

对于转折截面有 $v_m = v_0$，得转折截面至射流极点的距离

$$x_T = 0.966\frac{R_0}{a} \tag{11-81}$$

一般工程计算中，习惯于以喷嘴出口截面的中心作为起始点，即 $s = x - s_0$，或 $x = s + s_0$，代入式(11－80)得到

$$\frac{v_m}{v_0} = 0.966\frac{R_0}{ax} = \frac{0.966}{\frac{as}{R_0} + 0.294} \tag{11-82}$$

由上述计算得到的射流中心速度与试验值很好地吻合。

流过任一截面上的流量

$$q_V = 2\pi\int_0^R vr\mathrm{d}r = 2\pi R_0^2 v_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\frac{v_m}{v_0}\int_0^1\frac{v}{v_m}\frac{r}{R}\mathrm{d}\left(\frac{r}{R}\right)$$
$$= 2q_{V_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\frac{v_m}{v_0}\int_0^1\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\right]^2\frac{r}{R}\mathrm{d}\left(\frac{r}{R}\right)$$

式中　q_{V_0}——从喷嘴流出的最初流体流量，$q_{V_0} = \pi R_0^2 v_0$。

采用同样方法，经积分整理，并由实验修正得到

$$\frac{q_V}{q_{V_0}} = 2.13\frac{v_0}{v_m} \tag{11-83}$$

将式(11－82)代入上式得

$$\frac{q_V}{q_{V_0}} = 2.20\left(\frac{as}{R_0} + 0.29\right) \tag{11-84}$$

上述式中 $a \approx 0.07$，得到射流扩展角 $\theta \approx 28°$，等速核心区的收缩角 $\alpha \approx 12°$。

3. 平面自由紊流射流

对于矩形截面的自由射流(图 11－18 所示)，取射流的宽度为 1，则式(11－77)变为

$$2\int_0^b \rho v^2 \mathrm{d}y = 2\rho_0 v_0^2 b_0$$

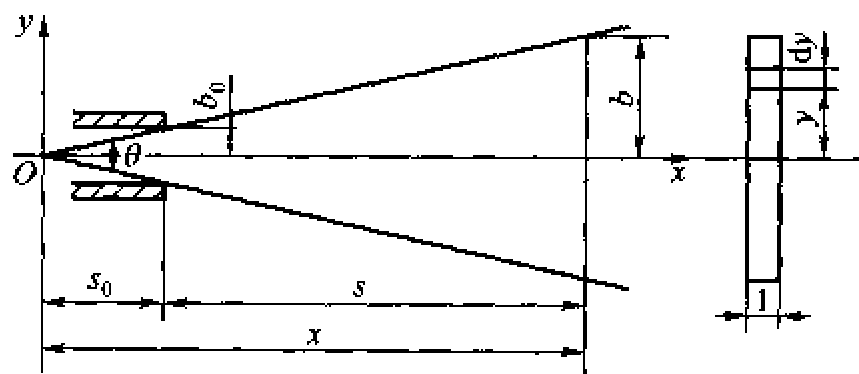


图 11－18

由于 $\rho = \rho_0$，上式可写成无量纲形式

$$\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^2 \frac{b}{b_0}\int_0^1 \left(\frac{v}{v_m}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{y}{b}\right) = 1 \tag{11-85}$$

同样，根据实验结果的经验公式，以及 v_m和 b 随 x 的变化关系，可计算定积分

$$\int_0^1 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{y}{b}\right) = 0.2847$$

代入式(11－85)，得

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{1.875}{\sqrt{b/b_0}}$$

在转折截面上，$v_m \approx v_0$，则 $b = 3.51 b_0$。

对于**平面射流**，由实验结果分析得到 $b \approx 2.4ax$，代入上式，得

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{1.21}{\sqrt{ax/b_0}} \tag{11-86}$$

在转折截面上 $v_m = v_0$，得转折截面至射流极点的距离

$$x_T = 1.46\frac{b_0}{a} \tag{11-87}$$

工程计算中，常以喷嘴出口截面的中心作为起始点，即

$S = x - S_0$ 或 $x = S + S_0$，代入(11－86)式得到

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{1.21}{\sqrt{\frac{as}{b_0} + 0.417}} \tag{11-88}$$

对于矩形截面的平面射流，$a=0.1\sim0.11$，射流扩散角 $\theta\approx27^{\circ}\sim30^{\circ}$。

从式(11－80)，(11－81)和(11－86)，(11－88)可以得出，无论是圆形截面轴对称射流，或是矩形截面平面射流，当增加射流的初速度 v_0 和喷管出口尺寸时，都会使射流的轴向速度 v_m 增加，即可增加射流的射出能力。

由于矩形截面射流中，轴向速度 v_m 的减小与射出距离 x（或 s）的平方根成反比，而圆形截面射流 v_m 的减小与 x（或 s）成反比，所以在射流初速 v_0 和喷管出口尺寸相同的条件下，扁矩形截面射流具有更大的射出能力。即在同样的射出条件下，扁矩形截面的射流可以射出更远的距离。

例　题

例 11－1　已知一盒形拖车，宽 2.5 m、高 3 m、长 10.5 m，该拖车在空气($\rho=1.24\ \mathrm{kg/m^3}$、$\nu=0.14\ \mathrm{cm^2/s}$)中以 27 m/s 的速度行驶，从前缘起，边界层全部为紊流，求拖车两边和顶部的摩擦阻力；若拖车的阻力因数 $C_D=0.45$，试确定施加于拖车上的压差阻力。

解　在拖车尾端处的雷诺数

$$Re_1=\frac{lV_0}{\nu}=2.025\times10^7$$

当 $Re_1>10^7$ 时，阻力因数可用下式计算

$$C_f=\frac{0.455}{(\lg\ Re_1)^{2.58}}=\frac{0.455}{(\lg 2.025\times10^7)^{2.58}}=0.002\ 69$$

拖车两边和顶部所受的摩擦阻力

$$F_f=C_f\rho\frac{v^2}{2}Bl=108.5\ \mathrm{N}$$

当阻力因数 $C_D=0.45$ 时，施加在拖车上的总阻力

$$F_D=C_D\rho\frac{v^2}{2}A=1\ 525.4\ \mathrm{N}$$

因此拖车上的压差阻力为

$$F_p=F_D-F_f=1\ 416.9\ \mathrm{N}$$

可见，在这种情况下，压差阻力约是拖车全部阻力的 93%，而摩擦阻力仅为总阻力的 7%。

例 11－2　一平板长 $L=10$ m，宽 $b=2$ m，设水流($\nu=10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，$\rho=10^3\ \mathrm{kg/m^3}$)沿平板表面并垂直于板的长度。试求在下列流速下平板一面受的摩擦力：(1) $V_0=0.01\ 145$ m/s；(2) $V_0=0.5$ m/s；(3) $V_0=6$ m/s。

解　(1) 先算出其雷诺数

$$Re_l = \frac{V_0 B}{\nu} = 22\ 900 < 5 \times 10^5$$

所以为层流边界层，故可用下式计算阻力因数

$$C_f = \frac{1.372}{\sqrt{Re_l}} = \frac{1.372}{\sqrt{22\ 900}} = 9.07 \times 10^{-3}$$

平板一面受阻力为

$$F_f = C_f LB \frac{\rho V_0^2}{2} = 0.011\ 9\ \mathrm{N}$$

(2) $Re_l = \dfrac{V_0 B}{\nu} = 10^6 > 5 \times 10^5$

所以为混合边界层，有

$$C_f = \frac{0.074}{Re_l^{1/5}} - \frac{1\ 700}{Re_l} = 1.2 \times 10^{-3}$$

于是

$$F_f = C_f LB \frac{\rho V_0^2}{2} = 3\ \mathrm{N}$$

(3) $Re_l = \dfrac{V_0 B}{\nu} = 1.2 \times 10^7 > 5 \times 10^5$

此时转变点

$$X_{cr} = \frac{Re_{cr}\nu}{V_0} = 0.08\ \mathrm{m} \ll b$$

即前端层流部分已很小，此时可以近似地按紊流边界层计算，有

$$C_f = \frac{0.074}{Re_l^{1/5}} = \frac{0.074}{(1.2 \times 10^7)^{1/5}} = 2.84 \times 10^{-3}$$

所以

$$F_f = C_f LB \frac{\rho V_0^2}{2} = 1\ 022.4\ \mathrm{N}$$

请读者计算一下情况(2)时的转变点 x_{cr}，并与情况(3)比较之。

习　题

11-1　何谓边界层？它对于研究绕物体的流动和决定物体阻力有何作用？试区别边界层与粘性底层的概念。

11-2　何为层流边界层、紊流边界层和混合边界层？试与管流流态比较之。

11-3　设平行流流过平板时的边界层速度分布为

$$v = V_0 \frac{y(2\delta - y)}{\delta^2}$$

假定为不可压缩恒定流动，试导出边界层厚度 δ 与 x 的关系式，并求平板一面上的阻力。平板长为 l，宽为 b。

11-4　假设平板层流边界层中的速度分布为

$$\frac{v_x}{V_0}=2\frac{y}{\delta}-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+\left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

设流体为不可压缩恒定流动，试求边界层厚度 δ 和摩擦阻力因数 C_f。

11－5　一长为 $l=2$ m，宽 $b=0.4$ m 的平板，以恒速 $V_0=5$ m/s 在 20 ℃的水（$\nu=10^{-6}$ m²/s，$\rho=998.2$ kg/m³）中运动，若边界层内的速度分布为

$$v_x=V_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/11}$$

边界层厚度 δ 与沿板长方向坐标 x 的关系为

$$\delta=0.216\left(\frac{\nu}{V_0}\right)^{1/7}x^{6/7}$$

试求平板上的总阻力

11－6　试列举减小粘性阻力的措施，并阐明为什么能减小阻力。

11－7　速度 $V_0=1$ m/s 的水流流过长 1 m，宽 1 m 的光滑平板，试求边界层的最大厚度和平板两面所受的阻力。以层流边界层和紊流边界层两种情况进行计算，水温为 20 ℃（$\nu=10^{-6}$ m²/s，$\rho=998.2$ kg/m³）。

11－8　一块宽 15 cm，长 50 cm 的光滑平板，置于流速为 60 cm/s 的油中，已知油的相对密度为 0.925，运动粘度 $\nu=0.79$ cm²/s，试求光滑平板一面上的摩擦阻力。

11－9　一块边长为 $a=1$ m，$b=2$ m 的长方形平板置于水流中，试求当 b 边平行于流动方向时的阻力和 a 边平行于流动方向时的阻力之比。分别对层流和紊流边界层两种情况进行计算。

11－10　沿平板流动的两种介质，一种是标准状态的空气（$\nu_a=1.321\times10^{-5}$ m²/s），流速为 30.3 m/s；另一种是 20 ℃的水（$\nu_w=10^{-6}$ m²/s），流速为 1.5 m/s。试求在同一位置处边界层厚度之比。就层流和紊流边界层两种情况讨论之。

11－11　长 10 m 的平板，20 ℃水（$\nu_w=10^{-6}$ m²/s）的流速为 0.5 m/s，试决定平板边界层的流动状态。若为混合边界层，则转变点在什么地方？（设 $x_{cr}/L\leqslant5\%$ 时，认为是紊流边界层）。试分别决定这一平板为层流边界层和紊流边界层时，水的流速应为多少？

11－12　空气在温度为 20 ℃（$\nu_a=1.5\times10^{-5}$ m²/s），压强为 9.81×10^4 Pa 的条件下以速度为 12 m/s 流经光滑平板，已知平板长度为 1 m，试求

(1) 由平板前缘到 2.5 cm 及 70 cm 处的边界层厚度 δ_1 及 δ_2

(2) 平板的阻力因数 C_f。

11－13　有一水滴形潜艇，其尺寸为 $L\times H\times B=135\times11\times8$ m³，水下航行速度最大为 60 km/h，试根据相当平板的概念计算在此航速时的摩擦阻力。浸湿面积的近似计算公式为

$$S=L\left[0.685H+4\delta B\right]$$

式中 δ 为艇的方形因数，这里取 $\delta=0.50$，水温 20 ℃（$\nu_w=10^{-6}$ m²/s，$\rho=998.2$ kg/m³）。

11－14　球形尘粒相对密度为 2.5，在 20 ℃的大气（$\nu_a=1.5\times10^{-5}$ m²/s，$\rho=1.2$ kg/m³）中等速沉降，使用斯托克斯公式计算等速沉降的最大粒径为多少？相应沉速为多少？

11－15　使小钢球在油中自由降落，可以测定油的动力粘度。已知油的密度 $\rho=0.899$ kg/m³，直径 $d=3$ mm 的小钢球密度 $\rho_s=7.79\times10^3$ kg/m³，若测得球的沉降速度 $v=11$ cm/s，求油的动力粘度 μ 值。

11－16 直径 $d=20$ cm 的圆柱在水中运动，由于产生卡门涡而振动，当运动速度 $V=3.6$ m/s 时振动最强烈。求圆柱的自振频率。$\nu_{水}=1.145\times10^{-6}$ m²/s。

11－17 空气以 8 m/s 的速度从直径 200 mm 的圆柱形喷口喷出，求射程 1.5 m 处的轴线流速(取 $a=0.08$)。

11－18 平面射流的喷口长 2 m，高 0.05 m，喷口速度 10 m/s，求距孔口射程 2 m 处的轴线流速(取 $a=0.11$)。

11－19 某锅炉喷燃器的圆形喷口，直径为 500 mm，喷口风速为 30 m/s，求离喷口 2 m，2.5 m 和 5 m 处的轴线速度。若喷口为高 500 mm 的平面射流，上述各点的轴线流速又为多少？设圆喷口的 $a=0.08$，平面喷口 $a=0.11$。

第12章

可压缩流体的一元流动

在前面的研究中，我们假定流体是不可压缩的，即认为密度是常数，这样，大大地简化了所研究的内容。一般情况下，这种研究对于液体和低速气体是正确的。

当气体流动的速度接近或超过声速时，其运动参数的变化规律将与以前研究的不可压缩流体的流动有本质的不同。其原因在于压力的变化引起了流体密度的变化，同时将出现温度的变化，即气体的基本状态将产生本质的变化。因此，在这种情况下，必须考虑热力学过程。

可压缩流体的流动是研究气体动力学的运动规律及其在工程实际中应用的一门科学，本章只研究一元气体动力学，主要任务在于研究可压缩流体在管道和喷管中的运动规律，介绍其流动特征和推导必要的计算公式。

气体的一元流动如图12-1所示，断面积沿管轴变化，即$A=A(x)$。位于每个断面上的流动参数都是均匀的，即$p=p(x)$，$\rho=\rho(x)$，$v=v(x)$。如果运动参数不随时间改变，称为恒定流动，否则称为非恒定流动。本章重点讨论恒定流动。

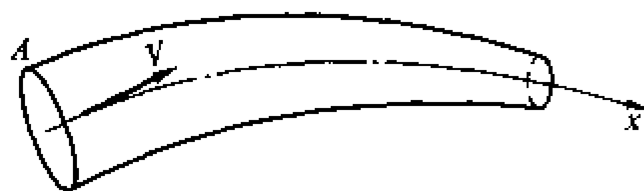


图 12-1

当然，研究结果一般情况下可应用到某些流动状态不均匀的截面上去，此时只要取截面上运动参数的平均值即可。

对于不可压缩流体的一元流动，基本运动参数实际上都包含在伯努利方程中，速度和面积成简单的反比关系。可是，在可压缩流体一元流动中，密度的变化使速度和面积之间的关系变得复杂了。

§12-1 基 本 概 念

1. 气体的状态方程

通常，我们将只与系统状态有关的参数称为状态参数。首先，由以前的力学知识我们知道，对于流体，压强 p、体积 V、密度 ρ 等为其状态参数。从热力学角度，还必须引入新的状态参数——温度 T。

当所讨论的气体与周围环境产生功或热交换时，由**热力学第一定律**引入一个可度量系统内所贮能量的状态参数，称为**内能** E。单位质量气体所具有的内能，称为**比内能** e。

为确定系统状态的稳定平衡与否，由**热力学第二定律**引入状态参数熵 S，对于单位质量气体的**熵**记为 s。

所引入的状态参数之间存在着以下关系

$$p = p(V, T)$$

$$E = E(V, T)$$

$$S = S(V, T)$$

它们通常称为“热状态方程”，或“量热状态方程”，简称为状态方程。

对于不同的物质，状态方程的形式是不同的，其具体形式须由分子运动学或直接由实验予以确定。

一般情况下，完全**气体的状态方程**可由压强 p、温度 T 和密度 ρ 表示，其形式为

$$p = \rho RT \tag{12-1}$$

$$pV = MRT$$

或者写成

$$pv = RT$$

其中，R 称为**气体常数**，数值由气体的物理性质确定。表 12-1 给出了工程中几种常用气体的 R 值。v 为单位质量气体所占的体积，通常称为比体积，即

$$v = \frac{1}{\rho}$$

表 12 - 1　常用气体常数

气体种类	气体常数 $R/(N\cdot m\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1})$	密度 $\rho/(kg\cdot m^{-3})$	比定压热容 $c_p/(N\cdot m\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1})$	比定容热容 $c_V/(N\cdot m\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1})$	等熵指数(理想气体)$\gamma=\frac{c_p}{c_V}$
空气	287	1.205	1 003	716	1.40
氮	287	1.16	1 040	743	1.40
氧	260	1.33	909	649	1.40
氦	2 077	0.166	5 220	3 143	1.66
氢	4 120	0.083 9	14 450	10 330	1.40
甲烷	520	0.668	2 250	1 730	1.30
二氧化碳	188	1.84	858	670	1.28
水蒸气	462	0.747	1 862	1 400	1.33

注：c_p，c_V，γ 都为 20 ℃标准海平面时的值。

式(12 - 1)称为克拉贝龙方程。

凡准确满足式(12 - 1)的气体定义为 **"完全气体"**。因此，式(12 - 1)定义了一族完全气体，其中每一个 R 值对应于一种气体。

"完全气体"概念的引入，对于可压缩流体的研究十分有用。因为完全气体是热力学中一种最简单的工作流体，为了详细地研究各种热力学过程，必须首先对完全气体进行详细研究。另外，在气体动力学中我们只涉及气体，它们往往都接近于完全气体的状态。

2. 气体的内能及其对外所作的功

任何气体的内能是温度和体积的函数。因此，温度可以作为气体内能的度量参数。

气体与其他物体一样，也将遵守能量守恒定律。对于气体可以具体地叙述为：传给气体的热量，一部分增加内能，另一部分用来对外作功。即

$$dQ = de + dW \tag{12-2}$$

式中　dQ——传输给气体的热量；

de——气体内能的增量；

dW——气体对外所作的功。

显然，对于膨胀气体，对外作功；对于压缩气体，外界对气体作功。

3. 比定容热容，比定压热容

单位质量的气体温度升高 1 K 所须的热量称为**比热容**，记为 c。

在气体状态变化过程中，当体积保持不变时，其比热容称为**比定容热容**，记为 c_V。当压力保持不变时，其比热容称为**比定压热容**，记为 c_p。

在空气动力学的研究中，常常出现两者的比值，我们称之为**比热容比**，记为

$$\gamma = c_p / c_V$$

对于理想气体，γ 又称为等熵指数，它是一个十分常用的数值。

常用气体的 c_p，c_V，γ 值已列入表 12－1 中。

4. 热力学过程

气体的状态变化规律与热力学过程有直接的关联，因此，其状态变化过程又称为热力学过程。通常，将热力学过程分为：

(1) 等温过程

气体状态变化过程中，温度始终保持不变的热力学过程称为**等温过程**。

由于 T = 常数，因而有 pv = 常数，即

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

温度保持为常数，说明在等温过程中气体的内能不变。

(2) 绝热过程

在气体流动过程中，与外界环境间没有热交换的热力学过程称为绝热过程，这种流动称为绝热流动。

此时，式(12－2)中的 $\mathrm{d}Q = 0$。

(3) 等熵过程

通常将绝热可逆过程称为等熵过程，这种流动称为**等熵流动**。

显然，等熵过程是对于理想气体而言的，即忽略了这种气体的粘性，认为流体流动过程中没有因克服粘性摩擦力而产生热量。

对于等熵流动，由热力学研究可知，存在下述关系

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = 常数 \qquad (12-3)$$

或　pv^γ = 常数

对于等温压缩过程，有

$$\frac{p}{\rho} = 常数 \qquad (12-4)$$

或　pv = 常数

等熵流动中 $p-v$ 关系曲线见图 12－2。

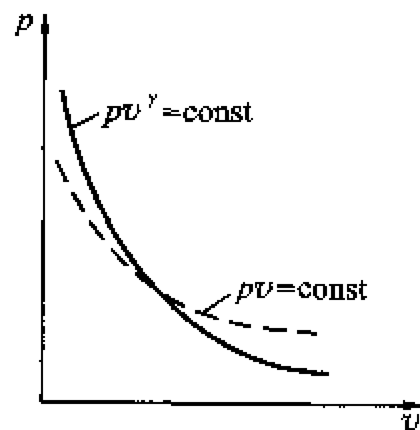


图　12－2

5. 声速和马赫数

在气体动力学中，**声速**是一个重要的参数。当气体流速较大时，压缩性将起明显的作用，这个作用的大小常常以声速来判断。

所谓声速就是微小扰动在气体中的传播速度，这已为实验所证实。在气体动力学中，以 c 来表示声速。

首先以图 12－3 所示装置研究一个非恒定运动，图中所示为一活塞在充满静止空气的管道中运动。活塞在运动之前，整个管内的空气处于静止状态；其状态参数为：压强 p，密度 ρ，温度 T。当活塞突然以微小速度 $\mathrm{d}V$ 运动时，首先使紧靠活塞的一层气体受到压缩，其压强和密度将产生一微小增量 $\mathrm{d}p$，$\mathrm{d}\rho$，由于空气的可压缩性，该微层气体的体积缩小，致使该扰动向前传播，使下一层气体受压，压强和密度出现增值，于是又继续传至更下一层气体。这样，微小扰动就逐层一直传播下去，结果在管内气体中形成一个微弱的压缩波 mn（如图 12－3a 所示），它以很快的速度向右传播，这个速度就是声速 c。微小扰动波 mn 是微小扰动与未受扰动的分界面。在 mn 以前是未受扰动的气体，参数为 p，ρ，T；波后为已受扰动压缩了的气体，参数为 $p+\mathrm{d}p$，$\rho+\mathrm{d}\rho$，$T+\mathrm{d}T$。波后的气体以与活塞相同的微小速度 $\mathrm{d}V$ 向前运动。显然，这个微小扰动传播的方向与流体质点的运动方向是一致的，它属于纵波，流体介质只能传递纵波。

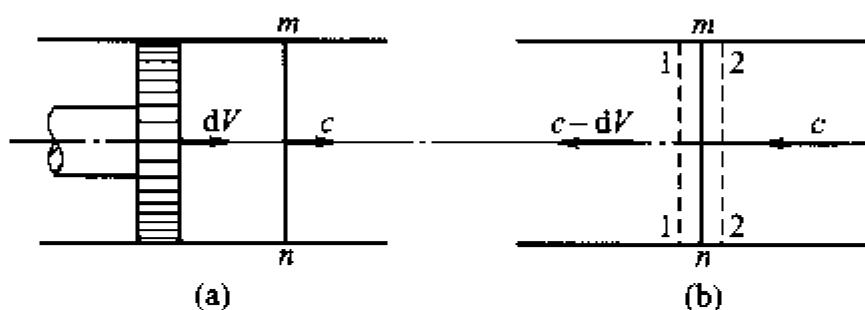


图 12－3

下面推导在气体介质中微小扰动传播速度（即声速 c）的表达式。

因为这种运动实际上是非恒定运动，为了简化起见，可以假想研究者处于 mn 波面上一同以 c 向前运动，即将研究的坐标系取在波面上，这样就把非恒定运动变成为恒定运动处理，此时，相当于气体以速度 c 流向波面，自右向左运动，经过波面时，速度由 c 降为 $c-\mathrm{d}V$，相应的压强自 p 变为 $p+\mathrm{d}p$，密度为 $\rho+\mathrm{d}\rho$，如图 12－3（b）所示。在 mn 面邻近的两侧取控制体 1－1，2－2。设管道截面积为 A，则由连续性原理知，$\mathrm{d}t$ 时间流入、流出该控制体的气体质量应相等，即

$$c\rho A \mathrm{d}t = (c - \mathrm{d}V)(\rho + \mathrm{d}\rho)A\mathrm{d}t$$

略去二阶微量可得

$$\rho \mathrm{d}V = c\mathrm{d}\rho$$

对控制体1122列动量方程可得

$$\rho q[(c - \mathrm{d}V) - c] = [p - (p + \mathrm{d}p)]A$$

式中流量 $q = cA$

整理得 $\mathrm{d}p = \rho c \mathrm{d}V$

由两等式消去 dV，得

$$c^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$$

或

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \qquad (12-5)$$

由于气体所受到的是微小扰动，更确切地说气体中的压强、密度和温度等参数的变化极小。因而每个质点所经历的过程可以近似看作绝热、可逆过程，即**等熵过程**。现在，为了计算波速，假设整个过程是严格等熵的。

由等熵过程关系式(12－3)可求得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

代入式(12－5)可得

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

由完全气体状态方程(12－1)可得

$$\gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT$$

最后得

$$c = \sqrt{\gamma RT} \qquad (12-6)$$

与物理学比较可知，(12－6)式即为声速公式。由此可以看出，微小扰动在可压缩流体中的传播速度就是声速。

由式(12－6)可以看出，在某种可压缩流体中的声速仅决定于该介质的绝对温度。声速与绝对温度的平方根成正比。对于常用的空气，在正常温度和压强下，$\gamma = 1.4$，$R = 287\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$声速计算式为

$$c \approx 20.1\sqrt{T} \qquad (12-7)$$

当 $T = 273$ K 时，$c = 332$ m/s。

当然，在不同性质的介质中，声速的大小亦不相同，为分析比较方便，在表12－2中列出了常见的几种介质在0 ℃时的声速。

表 12－2 常见介质中的声速(0 ℃)

介 质	空 气	二氧化碳	氮	氢	水
声速/(m/s)	332	262	340	1 280	1 450

由式(12－5)可以看出，声速的大小与流体介质的可压缩性大小有关，可压缩性大，即流体容易压缩，声速就越小，微小扰动传播越慢；反之，流体的可压缩性小，扰动传播快，声速就大。所以，水中的声速大于空气中的声速，在极限情况下，即流体不可压缩，$d\rho = 0$ 时，$c = \infty$。另外，流体的可压缩性随其状态参数的变化而变化，声速也取决于状态参数，因此，状态参数不同的各点，声速也不同。我们在谈到声速时，应明确理解为微小扰动相对于运动气体在某一瞬时，某一地点的传播速度，通常称为局部声速或当地声速。

在运动流体中，仅当以流速和其本身的声速相比较时，才是可压缩性效应的一个重要度量。两者的比较是式(8－18)所引入的一个无单位因数

$$Ma = \frac{V}{c} \tag{12-8}$$

称为马赫数，它是空气动力学中一个十分重要的参数。

由前面的分析可以看出，在一个给定的流动中，从一点到另一点 Ma 值将是变化的，一则是因为各点的速度 V 值不同，另外，因为各点的状态不同，各点的 c 值也不同。分析说明，c 的当地值与该处的 V 值有关。在一个绝热流动中，Ma 值总是随着 V 值的增加而增大。

6. 冲击波

冲击波通常简称为**激波**。

气体作超声速流动时，还有一个重要的特点，即在某些情况下还会产生激波。在亚声速气流中不会产生激波，激波与通常说的等熵流动，微小扰动传播等不同。

激波是当超声速气流流过障碍物时(如飞行的子弹、炮弹、超声速飞机等)，在其前方，气流受急剧压缩，压力，密度突然明显增加，这种变化形成一个扰动波，它以极高的速度传播开来，波面所到之处气体的参数将急剧变化，这种极强的压强扰动波就称为冲击波。从另一个角度，也可以把激波看成一个极薄的气体层(或一个面)，当气流流过该气体层时，流动参数将发生突然、急剧的变化。激波的强度常以压强的变化值来衡量，通常称为“**激波强度**”。显然，激波强度越大，参数变化越大。

若气流通过激波时，速度方向不变，这种激波称为**正激波**(或正冲波)；若气流通过激波后，速度的方向发生变化，则称为斜激波(或斜冲波)。

由于激波厚度极薄，气体流过激波时，在短距离、短时间内急剧压缩，各参数发生突变，热量来不及与外界交换，致使气体的熵增加。因此，超声速气流在这种情况下，经历了一个不可逆的绝热过程。在这个过程中，有机械能损失，即能头损失，这种损失是超声速流动所特有的，通常称为波阻。这种波阻不同于以前讨论过的其他诸如旋涡、摩擦等阻力，它的大小取决于冲击波的形状，气流通过正冲击波时波阻最大。

§12-2　微小扰动在空气中的传播

在这一节中，我们将分析**微小扰动**在空气中的传播特征，从而进一步说明马赫数在空气动力学研究中的重要作用。

我们假设在充满均匀气体的空间中，某一点 O 处有一微小**扰动源**，它可以是静止的，也可以作等速直线运动，它不断地均匀地向周围发出微小**扰动波**(如，一个飞行中的飞机所发出的声波就是一个典型的例子)。

研究由点 O 产生的微小扰动在静止气体中的传播情况。设点源 O 的运动速度为 v，其扰动传播速度即为声速 c，我们分为以下四种情况讨论。

(1) 扰动源静止不动，即 $v=0$。在这种情况下，微小扰动将以声速 c 自扰动源 O 向各方传播，其波面是一个空间球面，如图 12-4 所示。

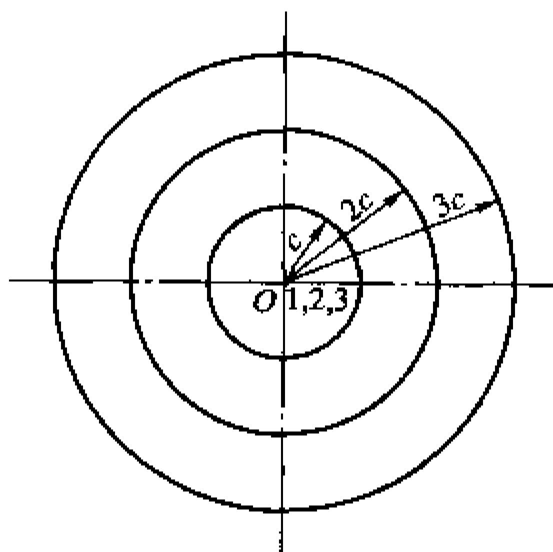


图　12-4

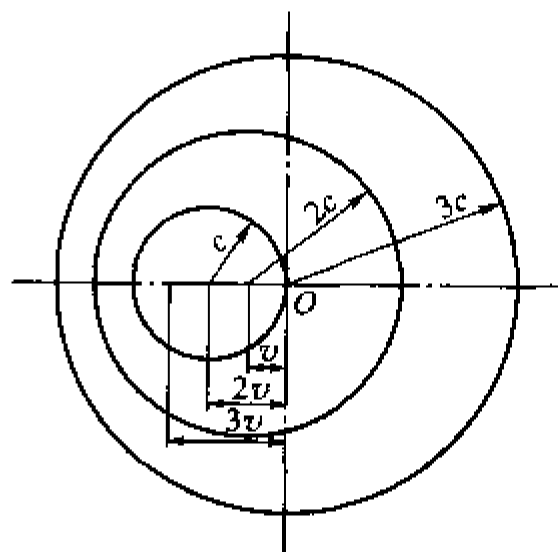


图　12-5

(2) 扰动源以小于声速的速度 v 向左作等速直线运动，即，$v<c$ 称为**亚声速**，经过一段时间后，例如 $t=1, 2, 3, \cdots$，扰动源位于左方 1，2，3，…

点，前进距离为 v，$2v$，$3v$，…，此时，扰动源运动瞬时发出的扰动波在 $t=3$ 的时刻已到达 $3c$ 的位置，而在 $t=1$、$t=2$ 时刻发出的扰动波已到达 $2c$，c 的位置，如图 12 - 5 所示。可以看出，在这种情况下，扰动将始终走在扰动源的前面，即在扰动源尚未到达时，空气已被扰动了。在亚声速运动中，其微小扰动可以传到空间任何一点。

（3）扰动源的运动速度等于声速，即 $v=c$。这种情况下，扰动源将同它所产生的扰动同时到达同一空间的任何位置，即出现了一个与扰动波相切的分界面，在该面左面，空气静止不动，而在界面的右面，气体受到了扰动。如图 12 - 6 所示。

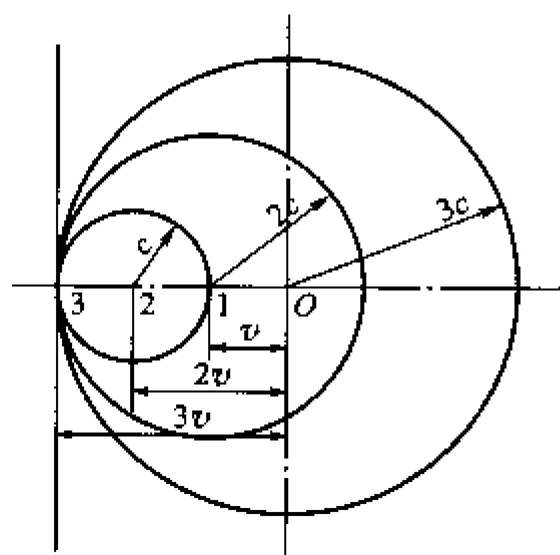


图　12 - 6

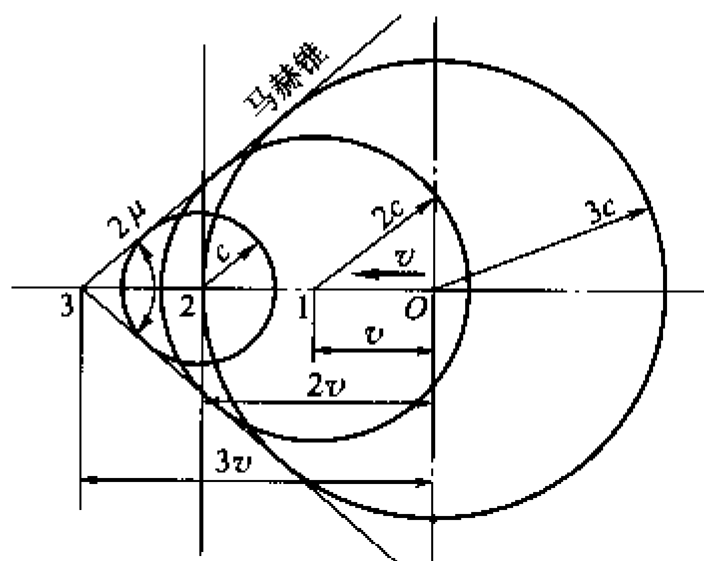


图　12 - 7

（4）扰动源以大于声速的速度运动，即 $v>c$。此时，扰动源将永远走在所产生的扰动之前。在相继运动中所产生的扰动波面形成了一个空间圆锥面，通常称为**马赫锥**，锥顶就是扰动源。显然，锥外的空气未受扰动，而锥内的气体已被扰动，如图 12 - 7 所示。马赫锥半顶角 μ 称为**马赫角**，由几何关系可知

$$\sin\mu=\frac{c}{v}=\frac{1}{Ma}$$

显然，Ma 越大，μ 越小，即马赫数越大，马赫角越小。极限情况为 $\mu=90^\circ$，即 $v=c$，如(3)中所述。

由上述分析可以看出，随着 Ma 的不同，扰动的传播特征是截然不同的。为了研究方便起见，通常按 Ma 的大小，将气体流动划分为以下几类：

$Ma<1$，**亚声速流动**；

$Ma\approx1$，跨声速流动(兼有亚声速区和超声速区)；

$1<Ma<3$，**超声速流动**；

$Ma>3$，高超声速流动。

在不可压缩流体中，由于声速接近无穷大，因此扰动将立刻传至各处，扰动源永远不会到达扰动波的前方。在可压缩流体中，当 $Ma \ll 1$ 时，扰动的传播特征与不可压缩流体中的传播特征相近，因此，对于低速流动气体，可以按不可压缩流体来处理。

§12-3 气体一元恒定流动基本方程

气体作为流体的一种，应遵循流体动力学基本方程，本节所给出的只是针对一元气体流动最简单的基本形式。

1. 连续性方程

现在研究可压缩流体作恒定流动的一个流束，取断面 A_1，A_2，如图 12-8 所示。A_1，A_2 面上的平均流速分别为 V_1，V_2；密度分别为 ρ_1，ρ_2。对于恒定流动，流过 A_1，A_2 面的流体质量应相等，即

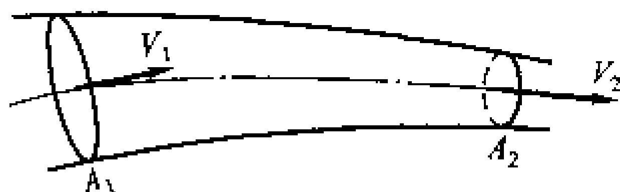


图 12-8

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

一般情况 $\rho VA = 常数$

对该式取对数然后微分得

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \tag{12-9}$$

该式即为可压缩流体的一元恒定流动连续性方程的微分表达式。

2. 能量方程

对忽略粘性和质量力的恒定气体流动，应用理想流体运动微分方程式(4-3)可得

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

对于所讨论的一元流动，设流动方向为 x，则 $v_x = V$，$v_y = v_z = 0$，方程进一步简化为

$$V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

或

$$V\mathrm{d}V+\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p=0$$

此式积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\text{常数} \tag{12-10}$$

对于作等熵流动的完全气体，由式(12-3)有

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\text{常数}$$

代入前式得

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\text{常数} \tag{12-11}$$

该式即为可压缩理想流体作一元恒定、等熵流动的能量守恒关系式，它是热量形式的能量方程式，也称为可压缩流体的伯努利方程。

由于
$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{p}{\rho}$$

代入式(12-11)可得

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{12-12}$$

或
$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\frac{RT}{\gamma-1}=\text{常数}$$

此式与不可压缩流体能量方程的区别在于$\frac{RT}{\gamma-1}$项，它表示单位质量气体所具有的内能。由热力学第一定律，有下述关系

$$c_p=c_V+R$$

$$H=c_pT+\text{常数}$$

$$e=c_VT+\text{常数}$$

式中，H为焓，或称热焓，它取决于e和p。于是

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{c_p}{c_p-c_V}\frac{p}{\rho}=\frac{c_p}{R}\frac{p}{\rho}=c_pT=H$$

将此关系式代入式(12-11)可得

$$H+\frac{V^2}{2}=\text{常数} \tag{12-13}$$

或 $$dH + VdV = 0$$

该式为可压缩流体能量方程，它适用于可逆和不可逆两种绝热过程。因为在绝热过程中，气体与外界无热交换，消耗于摩擦所作的功全部转换为热能，故其总能量不变。

对于完全气体，由上述关系知

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{c_V}{c_p-c_V}\frac{p}{\rho}=c_V\frac{p}{\rho}=c_VT=e$$

代入式(12-11)得

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+e=常数 \tag{12-14}$$

此式表明，一元恒定等熵流动的热量形式的能量方程，表示在气体一元恒定等熵流动中，沿流束任何一截面上单位质量气体的机械能和内能之和保持不变。由此也可以看出，气体的流速和内能也与温度有关。

又由于

$$\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma RT=c^2$$

式(12-11)又可以写成

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=常数 \tag{12-15}$$

§12-4 理想气体一元等熵流动的特征

由上节所得到的基本方程式，可以得出气体在管中作一元流动时各参数间的基本关系式，这些关系式是设计和计算的基础。

现在来具体分析气体一元等熵流动，找出流动断面间的参数关系。

通常，用以下三种特定状态来说明这种特征。

1. 滞止状态

我们假定在一元等熵流动中，气体在某一断面处速度等熵地降为零，这种状态称为**滞止状态**，显然，由式(12-14)可以看出，在滞止状态下，气体的内能达到最大值，在这个截面上对应的压强、温度等参数也是最大值，分别用 p_0，T_0，ρ_0 等表示，并称之为**滞止参数**。例如，在绕流物体时，在驻点处的气体就处于滞止状态。

在滞止状态下，方程(12-11)、(12-13)和(12-15)分别为

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_0=c_pT_0=\text{常数} \tag{12-16}$$

$$H+\frac{V^2}{2}=H_0=\text{常数} \tag{12-17}$$

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1}=\text{常数} \tag{12-18}$$

由以上三式可以看出，气体的滞止温度由气体的总能量所确定。在滞止状态下，动能全部转变为热能，并以滞止焓 H_0 来表示。

滞止状态下的压强和密度，可由等熵条件确定

$$p=\rho RT$$

由于

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

可得

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma=\left(\frac{\dfrac{p}{RT}}{\dfrac{p_0}{RT_0}}\right)^\gamma=\left(\frac{p}{p_0}\right)^\gamma\left(\frac{T_0}{T}\right)^\gamma$$

$$\frac{p_0}{p}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{12-19}$$

由此

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{12-20}$$

又由式(12 - 18)

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1}=\text{常数}$$

两边同乘以 $\frac{\gamma-1}{c^2}$ 可得

$$\frac{c_0^2}{c^2}=\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2 \tag{12-21}$$

利用等熵关系

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

可得

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{12-22}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{12-23}$$

这里必须指出，T_0，c_0 的数值对整个流动是常数。由于 T_0 在滞止状态为最大值，故滞止声速 $c_0=\sqrt{\gamma RT_0}$ 也为最大值。

2. 最大速度状态

现在假定流动出现另一种极限情况，即气体的能量全部转变为动能，压强为零，速度达到最大值 V_{max}，称为最大速度。由状态方程 $\frac{p}{\rho}=RT$ 可以看出，此时 $T=0$，即 $H=0$，而且声速 $c=0$。

由方程(12－15)

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{V_{max}^2}{2}$$

或者

$$\frac{V_{max}^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1}$$

得

$$V_{max}=c_0\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{12-24}$$

可想而知，气流达到最大速度时，其温度 T 为零，分子的运动全部停止，声速也为零。实际上，这种状态是不可能达到的，它相当于气流流入完全真空($p=0, T=0$)的空间。因此，式(12－24)所求得的最大速度只在理论上成立，在某些情况下，可以用它间接地表示气流的总能量值。

3. 临界状态

由式(12－15)可以看出，对于任一等熵流动，其当地声速 c 随气体的流速增加而减小。假设气流速度自零增加到 V_{max}，当地声速相应地自 c_0 减小为零，如图(12－9)所示。

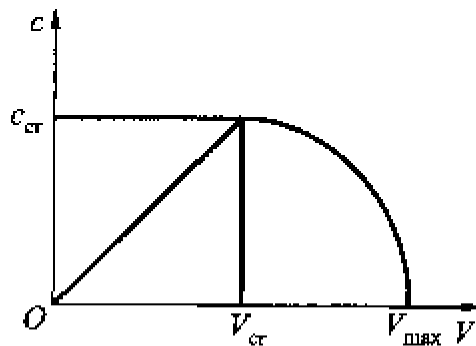


图 12－9

可以看出，在两种极限情况的中间，必存在着某一截面，其流速恰好等于当地声速，这时的速度称为**临界速度**，记为 V_{cr}，相应的参数称为**临界参数**，分别记为 p_{cr}，ρ_{cr}，T_{cr}，c_{cr}。

由式(12－15)知：

$$\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{V^2}{2}=\frac{c_{cr}^2}{\gamma-1}+\frac{V_{cr}^2}{2}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{c_{cr}^2}{2}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{V_{cr}^2}{2} \tag{12-25}$$

可以看出，临界速度也可以间接表示气流总能量的大小。

滞止参数和临界参数的关系也可以由式(12－15)求得

$$\frac{c_0^2}{\gamma-1}=\frac{c_{cr}^2}{\gamma-1}+\frac{V_{cr}^2}{2}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_{cr}^2$$

即

$$c_{cr}=c_0\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \tag{12-26}$$

由此可得

$$\frac{T_{cr}}{T_0}=\left(\frac{c_{cr}}{c_0}\right)^2=\frac{2}{\gamma+1} \tag{12-27}$$

由等熵关系可得

$$\frac{p_{cr}}{p_0}=\left(\frac{T_{cr}}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{12-28}$$

$$\frac{\rho_{cr}}{\rho_0}=\left(\frac{T_{cr}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{12-29}$$

由关系式(12－24)和(12－26)可以求得 c_{cr}与 V_{max}关系为

$$c_{cr}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}V_{max} \tag{12-30}$$

由导出的各关系式可以看出，对于气体的某种实际流动状态，存在与之相对应的滞止参数和临界参数。

例如：对于空气，$\gamma=1.4$，$R=287$ Nm/kgK，$c_{cr}=18.3\sqrt{T_0}$ m/s，各参数的比值为

$$\frac{T_{cr}}{T_0}=0.833\,3$$

$$\frac{p_{cr}}{p_0}=0.528\,3$$

$$\frac{\rho_{cr}}{\rho_0}=0.633\,9$$

4. 无量纲速度

为研究方便，我们将气流速度与临界声速的比值称为无单位速度，或速度

因数，记为

$$M_{cr}=\frac{V}{c_{cr}}$$

显然，M_{cr}类似于马赫数 Ma，它表示某点气流速度接近于该气流临界声速的程度。

由关系式(12－25)可得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{Ma^2}=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{M_{cr}^2}$$

最后得

$$M_{cr}=\frac{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}}{\sqrt{1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2}} \tag{12-31}$$

或

$$Ma=\frac{\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}}{\sqrt{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2}}M_{cr} \tag{12-32}$$

式(12－32)所确定的 Ma 与 M_{cr}之间的关系表示于图(12－10)中(该图是针对空气而作出的,即 $\gamma=1.4$)。

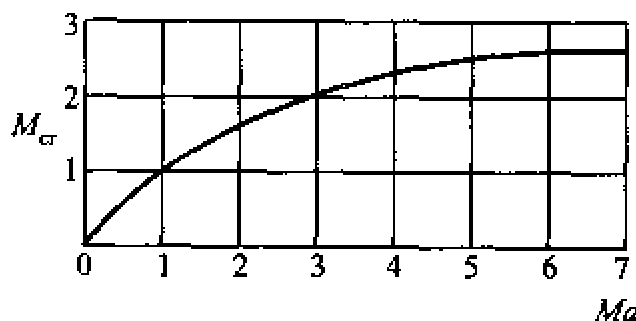


图 12－10

由图可以看出，当 $M_{cr}<1$ 时，$Ma<1$，气流为亚声速；当 $M_{cr}=1$ 时，$Ma=1$，气流是声速；当 $M_{cr}>1$ 时，$Ma>1$，气流为超声速。

利用 M_{cr}可以将式(12－21)、(12－22)和(12－23)改写为

$$\frac{T}{T_0}=1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2 \tag{12-33}$$

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{12-34}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{12-35}$$

由公式(12－33)、(12－34)和(12－35)可以看出，对于一元等熵流动，只

要知道滞止参数和无单位速度 M_{cr}(或知道 Ma)，则沿流束各截面上的温度、压强和密度都可以求得。

§ 12-5　绝热气流的压缩性影响

当气流作等熵流动时，滞止密度与任一截面密度的比值为式(12-23)，即

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

按二项式定理展开

$$\frac{\rho_0}{\rho}=1+\frac{1}{\gamma-1}\frac{\gamma-1}{2}Ma^2+\frac{\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{\gamma-1}-1\right)}{2}\left(\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^2+\cdots=1+\frac{Ma^2}{2}+\frac{2-\gamma}{8}Ma^4+\cdots$$

按此展开式，对于空气 $\gamma=1.4$，可得$\frac{\rho_0}{\rho}$与 Ma 的关系如表 12-3 所示。

表 12-3　$\frac{\rho_0}{\rho}-Ma$ 关系

Ma	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\frac{\rho_0}{\rho}$	1	1.005	1.020	1.046	1.072	1.126	1.171	1.232	1.398	1.560	1.560

由表 12-3 可见，对等熵气流，气体的压缩性随 Ma 的增加而明显增大，在 Ma 值趋于零时，$\frac{\rho_0}{\rho}$趋于 1。因此，在小 Ma 数时，即气流速度较小时，可以按不可压缩气体来处理。通常情况下，当 $V>50$ m/s 时，要考虑压缩性影响。

§ 12-6　气流速度与断面形状间的关系

对于理想气体一元恒定等熵流动，由连续性方程(12-9)

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dV}{V}+\frac{dA}{A}=0$$

和动量方程(12－10)

$$VdV+\frac{1}{\rho}dp=0$$

即

$$\rho=-\frac{dp}{VdV}$$

得

$$-\frac{d\rho}{dp}VdV+\frac{dV}{V}+\frac{dA}{A}=0$$

各式除以 VdV 得

$$\frac{d\rho}{dp}=\frac{1}{V^2}+\frac{dA}{A}\frac{1}{VdV}$$

即

$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{V^2}+\frac{dA}{A}\ \frac{1}{VdV}$$

乘以 V^2 得

$$\frac{V^2}{c^2}=1+\frac{dA}{A}\frac{V}{dV}$$

$$M^2a-1=\frac{dA}{A}\ \frac{V}{dV}$$

最后得

$$\frac{dA}{A}=(Ma^2-1)\frac{dV}{V} \tag{12-36}$$

类似的推导还可以得到

$$\frac{dA}{A}=\frac{1-Ma^2}{\gamma Ma^2}\ \frac{dp}{p} \tag{12-37}$$

式(12－36)和(12－37)为流速变化率和压力变化率与截面变化率的关系式。下面来讨论这两个关系式。

1. $Ma<1$，即气流作亚声速流动。由式(12－36)可以看出，$\frac{dV}{V}$与$\frac{dA}{A}$具有相反的符号，而由式(12－37)可以看出，$\frac{dp}{p}$与$\frac{dA}{A}$具有相同的符号。可见，对于亚声速变截面流动，截面积增加时，流速减小，压强增加，变化规律符合不可压缩流体流动规律。

2. $Ma>1$，即气流作超声速流动。$\frac{dV}{V}$与$\frac{dA}{A}$具有相同的符号，而$\frac{dp}{p}$与$\frac{dA}{A}$

具有相反的符号。可见，当截面积增加时，在超声速流动的情况下，压强减小，流速增加。反之，截面积减小时，压强增加，流速减小，这是超声速扩压管的条件。变化规律如表 12-4 所示。

表 12-4 压强速度随截面变化的关系

截 面 变 化	压力、速度变化	
$dA<0$	亚声速 $Ma<1$ 加速、减压	超声速 $Ma>1$ 减速、增压
$dA>0$	减速、增压	加速、减压

对于超声速气流的这种规律，我们可以作如下解释

由式(12-10)得

$$VdV=-\frac{1}{\rho}dp=-\frac{d\rho}{\rho}\frac{dp}{d\rho}=-c^2\frac{d\rho}{\rho}$$

即
$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{V}{c^2}dV=-\frac{V^2}{c^2}\frac{dV}{V}=-Ma^2\frac{dV}{V} \tag{12-38}$$

由式(12-38)可以看出，在降压气流中，即 $dp<0$，$dV>0$ 时，对于亚声速气流，即 $Ma<1$，密度的减小率小于流速的增加率，所以要使气流加速，必须减小截面积。对于超声速气流，即 $Ma>1$，密度的减小率大于流速的增加率，所以要使气流加速，必须增加截面积。而在升压减速($dp>0, dV<0$)的气流中，情况恰好与上述相反。

3. $Ma=1$，即流速等于声速时，$dA=0$，$dV=0$。由上述分析可以看出，当气流自亚声速变为超声速时，必须使截面积先收缩而后扩大；而当气流自超声速变为亚声速时，也必须使截面积先收缩而后扩大。两者都有一个最小截面，对于这个截面 $dA=0$，称为喉部截面，其速度为 $V=c=c_{cr}$，压强和密度记为 p_{cr}和 ρ_{cr}。喉部截面参数与滞止截面参数间关系由式(12-27)、(12-28)和式(12-29)表示。

由上述分析可以看出，无论是气流自亚声速变为超声速，还是自超声速变为亚声速，除以其断面变化保证外，还必须使喉部流速达到声速，即在喉部必须保证 $Ma=1$，否则，达不到设计要求。

沿缩放喷管，气流速度和压强变化关系如图 12-11 曲线所示。

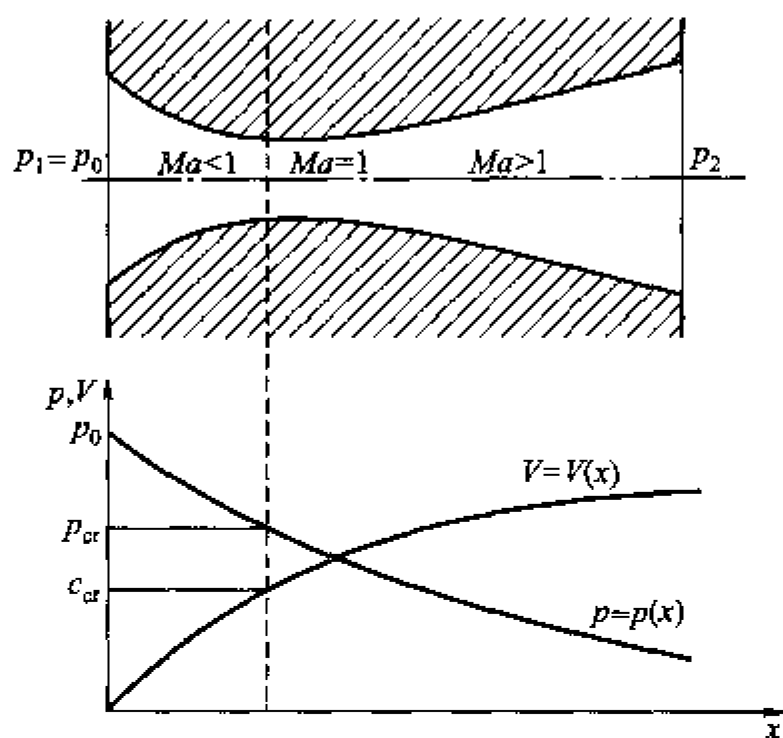


图 12-11

§12-7 气体从管嘴的等熵出流

变断面的短管嘴，通常指喷管，用于加速气流。在动力机械装置，如汽轮机、喷气式飞机等中广泛采用。

本节以理想气体为对象，研究收缩管嘴和缩放管嘴的基本设计关系式。

1. 收缩管嘴

收缩管嘴用来使气流加速，从而得到 $Ma\leqslant 1$ 的速度，喷管通常较短，流速较高，来不及进行热交换，因此可以认为是绝热过程。我们的讨论对象为理想气体，故可以看作为等熵流动。

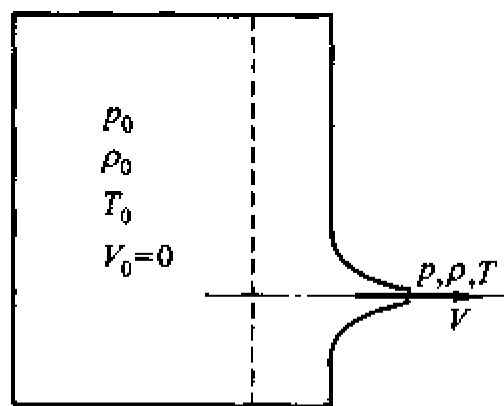


图 12-12

图 12-12 所示为某种理想气体自大容器从收缩管嘴出流。由于容器很大，可以将其中气流速度看作为零，即 $V_0=0$，容器内各参数为滞止参数，记为 p_0，ρ_0，T_0，喷管出口处流动参数为 p，ρ，T，V。

下面来确定管嘴气体的出流速度和流量。为此，列出容器内与管口出口断面之间的能量方程

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

解得

$$V=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(1-\frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho}\right)} \tag{12-39}$$

又由等熵关系式

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

最后得

$$V=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \tag{12-40}$$

由该式可见，在收缩管嘴中，气体可以一直膨胀到零压力极限状态，即 $p=0$，得最大速度

$$V_{\max}=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}}=c_0\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{12-41}$$

其中，c_0 为滞止声速。

设管嘴出口截面积为 A，则通过喷管的质量流量为

$$q_m=\rho VA$$

将等熵关系式

$$\rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

和 V 的表达式代入可得

$$\begin{aligned} q_m&=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}\\ &=\rho_0A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} \end{aligned} \tag{12-42}$$

式(12－42)表示，当滞止状态给定，即滞止参数 p_0，ρ_0，T_0 给定时，流过收缩管嘴的质量流量仅取决于**出口压强**的变化，变化规律可按式(12－42)绘出曲线，如图 12－13 所示。

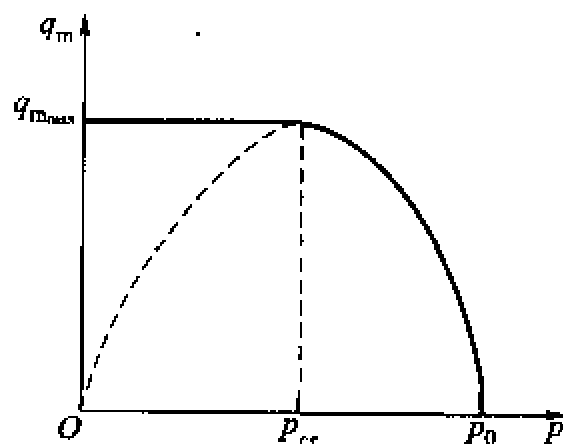


图　12－13

现在，我们按式(12－42)或图 12－13 来讨论质量流量随压强 p 的变化规律。

(1) 当出口压强 $p=0$ 时，流量 $q_m=0$。这时，由式(12－40)可知，**出流速度**达到最

大值，$V=V_{\max}$，实际上这是不可能的。

(2) 当出口压强与滞止压强相等，即 $p=p_0$ 时，质量流量等于零，$q_m=0$，出流速度也为零，即 $V=0$，这时没有出流。

(3) 由(1)、(2)知，在 $0<p<p_0$ 这个压强范围内，流量的变化自零增加到一个最大值 $q_{m_{\max}}$，然后再减少到零。最大流量 $q_{m_{\max}}$ 可由 $\frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}p}=0$ 求得，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]=0$$

结果为

$$p=p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=p_{cr} \tag{12-43}$$

由前面的分析知，p_{cr}为临界压强，即当出口压强为临界压强时，通过收缩管嘴的流量达到最大值，如图 12-13 所示。这时，出口断面上对应的流速达到临界声速 c_{cr}，它实际上就是当地声速，即

$$V=c_{cr}=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_0}{\rho_0}} \tag{12-44}$$

将 p_{cr}值代入式(12-42)可以得到最大流量为

$$\begin{aligned}q_{m_{\max}}&=\rho_0A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}-\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]}\\&=\rho_0A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{-1}-1\right]}\\&=A\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}p_0\rho_0\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{12-45}$$

对于空气，$\gamma=1.401$。

$$q_{m_{\max}}=2.145A\sqrt{p_0\rho_0g}=6.718\sqrt{p_0\rho_0}$$

$$V=c_{cr}=1.08\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$$

(4) 当出口外压强(又称背压)继续降低时，流量不按图示虚线降低，而保持 $q_{m_{\max}}$不变，实际流量如图中实线所示，这种现象称为壅塞现象。其原因在于，亚声速气流在收缩管内不可能增速到超声速，在管口的末端最大只能达到声速 c_{cr}，气流在管内的膨胀只能到达 p_{cr}。无论背压再如何减小，出口断面上的压强将保持不变，这时气流只能在流出管外后才能继续膨胀，因而流量将保持不变。

在管端外压强继续降低的状态，其流量仍然用式(12-45)计算。

当气流自锐缘孔口出流时，流速和流量计算也可以采用以上的公式，式中的 V 应用出口收缩断面上的流速，A 为收缩断面面积，$A=\varepsilon A_0$，ε 为相应的收缩因数，其值可在表 12-5 中查取，表中 p_2/p_1 为孔口前后之压比。

表 12-5　$\varepsilon - p_2/p_1$ 关系

p_2/p_1	0.676	0.641	0.606	0.559	0.529	0.037
ε	0.680	0.700	0.710	0.730	0.740	0.850

在实际工程计算中，气体经短管嘴出流的流速和流量可以由各种表格查取。

2. 缩放喷管

设计合理的**缩放喷管**又称为**拉瓦尔**(Laval)**喷管**。这是通过先收缩而后扩张的喷管形式获得超声速气流的办法，由瑞典工程师拉瓦尔首先研制成功，故人们以他的名字命名。

缩放喷管的形状如图 12-14 所示。

这种喷管在工程中应用很广，只要设计合理，在最小截面上气流可以达到当地声速。在以后的扩张部分中气体继续膨胀，达到超声速。其出口断面上的气流速度可以按式(12-40)计算，流量由最小截面上的参数所决定。最大流量仍由式(12-45)计算，其中 A 为最小截面(即喉部)面积。

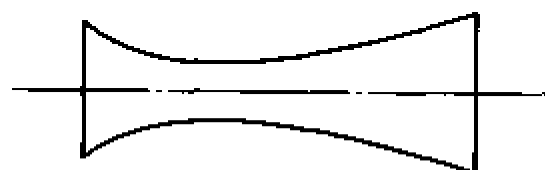


图　12-14

设计拉瓦尔喷管主要在于根据出口所需要的速度和流量设计合理的最小截面积和扩张段线型，以使其在喉部达到声速，从而在出口处获得超声速。

另外，在出、入口压强的某些比值情况下，管内会产生激波，破坏喷管的正常工作，造成不应有的能量损失，将在十三章中讨论。

为分析、比较方便，现将几种常见气体的临界值列于表 12-6 中。

表 12-6　常见气体的临界值

气体名称	临界压力 p_{cr}	临界温度 T_{cr}	临界密度 ρ_{cr}	临界速度 $V_{cr}=c_{cr}$	临界流量 $q_{cr}=q_{max}$
空气	$0.523p_0$	$0.833T_0$	$0.634\rho_0$	$0.913c_0=3.35\sqrt{\dfrac{p_0}{g\rho_0}}$	$0.578A_{cr}c_0\rho_0 g=2.145A_{cr}\sqrt{p_0\rho_0 g}$

续表

气体名称	临界压力 p_{cr}	临界温度 T_{cr}	临界密度 ρ_{cr}	临界速度 $V_{cr}=c_{cr}$	临界流量 $q_{cr}=q_{max}$
燃气	$0.54p_0$	$0.585T_0$	$0.629\rho_0$	$0.927c_0=3.35\sqrt{\dfrac{p_0}{g\rho_0}}$	$0.584A_{cr}c_0\rho_0g=2.105A_{cr}\sqrt{p_0\rho_0g}$
过热蒸汽	$0.546p_0$	$0.870T_0$	$0.628\rho_0$	$0.932c_0=3.33\sqrt{\dfrac{p_0}{g\rho_0}}$	$0.585A_{cr}c_0\rho_0g=2.09A_{cr}\sqrt{p_0\rho_0g}$
干饱和蒸汽	$0.577p_0$	$0.936T_0$	$0.613\rho_0$	$0.967c_0=3.23\sqrt{\dfrac{p_0}{g\rho_0}}$	$0.585A_{cr}c_0\rho_0g=1.99A_{cr}\sqrt{p_0\rho_0g}$

§12-8　实际气体在管道中的恒定流动

前面讨论的是理想气体的流动规律，本节将考虑实际气体中粘性对流动的影响。由于实际气体存在粘性，因此，当实际气体流动时，必然有摩擦存在，其结果将消耗部分机械能，不可逆地转变为热能。而实际气体流动必将与周围产生热交换，形成非绝热流动，可见，实际流动中的热力学过程是十分复杂的。不同的热力学过程状态有很大差异，计算方法和结果也存在很大差别。本节中我们将就等截面管道中的绝热和等温两种热力学过程进行分析。

1. 管道中有摩擦的一元绝热流动

在许多情况下，由于管道较短，气体流动的过程中来不及与周围环境进行热交换，这种流动可以近似看作是**绝热流动**。

这里我们仍假定所研究的气体为完全气体。研究的重点在于分析摩擦作用对气体流动规律的影响，找出沿流程压强降落的规律。

首先，我们推导实际气体有摩擦的一元恒定绝热流动的运动微分方程。

图 12-15 为气体在作一元恒定流动的管道中取出的长度为 dx 的微元管段，研究该段气体沿流动方向所受力的平衡。

该段气体所受的表面力如图 12-15 所示，气体的表面力和惯性力相平衡，即

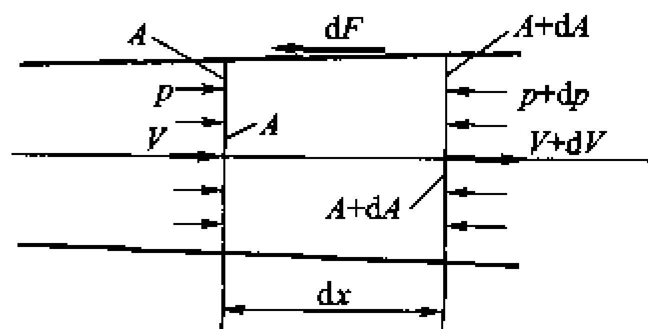


图　12-15

$$pA-(p+\mathrm{d}p)(A+\mathrm{d}A)+\left(p+\frac{\mathrm{d}p}{2}\right)\mathrm{d}A-\mathrm{d}F=\rho\left(A+\frac{\mathrm{d}A}{2}\right)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

展开并略去高阶微量后得

$$-A\mathrm{d}p-\mathrm{d}F=\rho AV\mathrm{d}V$$

除以 ρA 可得

$$V\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{\mathrm{d}F}{\rho A}=0$$

式中 $\mathrm{d}F/\rho A$ 为实际气体在管道中流动的摩擦损失项。按前面阻力损失计算的表达形式，可以将单位重力流体的摩擦损失表示为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\rho gA}=\lambda\frac{\mathrm{d}x}{D}\frac{V^2}{2g}$$

则上式变为

$$V\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\lambda\frac{\mathrm{d}x}{D}\frac{V^2}{2}=0 \tag{12-46}$$

将关系式

$$H=c_pT=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$$

代入通用能量方程式(12 - 13)得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}-\frac{\gamma-1}{\gamma}V\mathrm{d}V$$

又由连续性方程式(12 - 9)有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{\mathrm{d}V}{V}-\frac{\mathrm{d}A}{A}$$

代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\left(\frac{V^2}{\gamma}-\frac{p}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}V}{V}-\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}A}{A}-V\mathrm{d}V$$

将此式代入式(12 - 46)得

$$\left(\frac{V^2}{\gamma}-\frac{p}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}V}{V}-\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}A}{A}+\lambda\frac{\mathrm{d}x}{D}\frac{V^2}{2}=0$$

因为

$$\frac{p}{\rho}=RT=\frac{c^2}{\gamma}$$

代入上式得

$$(V^2-c^2)\frac{\mathrm{d}V}{V}-c^2\frac{\mathrm{d}A}{A}+\lambda\frac{\gamma V^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{D}=0$$

或

$$(M^2a-1)\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{\mathrm{d}A}{A}-\lambda\frac{\gamma M^2a}{2}\frac{\mathrm{d}x}{D} \qquad (12-47)$$

式(12-47)和式(12-36)相比较可以看出，摩擦作用的存在相当于将截面减小。在收缩管中($dA<0$)，摩擦作用使亚声速气流加速更快，压强下降加快；使超声速气流的速度下降更快，压强增加加快。而在扩张管中($\mathrm{d}A>0$)，摩擦使亚声速气流减速缓慢，压强上升缓慢；使超声速气流加速减慢，压强降低减慢。对等截面管而言，摩擦作用相当于使气体在收缩管中流动。所以，当实际气体沿等径管流动时，气流速度由亚声速连续变为超声速或由超声速连续变为亚声速都是不可能的。无论进口是亚声速还是超声速气流，出口处的极限只能是声速。

还可以看出，在缩放型喷管中，由于摩擦的作用，在最小断面上的速度永远也不等于当地声速，即达到声速的断面不是最小断面。当 $Ma=1$ 时，式(12-47)为

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=\lambda\frac{\gamma}{2}\frac{\mathrm{d}x}{D}$$

该式说明，$Ma=1$ 的截面将出现在扩张段内，其位置与阻力系数 λ 有关。

现在来讨论压强降落规律。

将状态方程、连续性方程和绝热流动条件

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

代入(12-46)式，可得

$$\mathrm{d}p-\frac{V^2}{g\gamma RT}\mathrm{d}p+\lambda\frac{\mathrm{d}x}{D}\frac{\gamma p}{2}Ma=0$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\lambda}{D}\frac{p}{2}\gamma M^2a}{M^2a-1} \qquad (12-48)$$

分析式(12-48)可以看出：

(1) 若 $Ma=1$，该式分母为零，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$为无穷大，这是不可能的，说明管中流速不可能达到 $Ma=1$。

(2) 若 $Ma<1$，由于分子为正值，则沿流程$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$为负值，而且随着压力下降，气体膨胀温度降低，流速加快，只有在出口处才可能达到极限速度，即 $Ma=1$。

(3) 若 $Ma>1$，则沿流程$\frac{dp}{dx}$为正值，随压强升高，温度升高，流速降低，其极限也在出口断面上，以 $Ma=1$ 为止。

当出口断面达到 $Ma=1$ 时，无论外界压强如何下降，都不会影响管内流动，即处于壅塞状态，最大流量 $q_{m_{max}}$ 值保持不变。

流量近似计算可采用下面公式

$$q_m = A\sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\lambda RT\frac{L}{D}}} \tag{12-49}$$

该式推导从略，它适用于绝热、等温等各种热力学过程。

在等径直管有摩擦绝热流动中，极限情况只能出现在管路末端，即只有在管端才可能出现 $Ma=1$ 的情况。因此，在这种情况下，对管长必须有所限制，这就是所谓“极限管长”，现在就来讨论这个问题。

对于等截面管，$dA=0$，则式(12－47)变为

$$(Ma^2-1)\frac{dV}{V} = -\lambda\frac{\gamma Ma^2}{2}\frac{dx}{D} \tag{12-50}$$

又由一元恒定流动能量方程(12－13)和运动方程(12－10)，在等熵的条件下可得

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{Ma^2(\gamma-1)}\frac{dT}{T}$$

又由关系式

$$Ma = \frac{V}{c}$$

即

$$V^2 = Ma^2c^2 = Ma^2\gamma RT$$

将该式微分得

$$2V dV = 2Ma\gamma RT dMa + Ma^2\gamma R dT$$

与原式相除得

$$2\frac{dV}{V} = 2\frac{dMa}{Ma} + \frac{dT}{T}$$

由所得二式消去$\frac{dT}{T}$得

$$\frac{dV}{V} = \frac{\frac{dMa}{Ma}}{\frac{\gamma-1}{2}Ma^2+1}$$

代入(12－50)式，整理后得

$$\lambda\frac{\mathrm{d}x}{D}=\frac{2(1-Ma^2)\mathrm{d}Ma}{\gamma Ma^3\left(\frac{\gamma-1}{2}Ma^2+1\right)}$$

$$=\frac{2\mathrm{d}Ma}{\gamma Ma^3}\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}Ma}{Ma\left(\frac{\gamma-1}{2}Ma^2+1\right)}$$

取上、下限：$X=0$，$Ma=Ma_1$；$X=L$，$Ma=Ma$，积分此式可得

$$\lambda\frac{L}{D}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{Ma_1^2}-\frac{1}{Ma^2}\right)+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left[\left(\frac{Ma_1}{Ma}\right)^2\frac{(\gamma-1)Ma^2+2}{(\gamma-1)Ma_1^2+2}\right]$$

由前面的分析知，流动的极限情况为出口处的 $Ma=1$，即此时管路长度最大，由此得

$$L_{max}=\frac{D}{\lambda}\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{Ma_1^2}-1\right)+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left[\frac{(\gamma+1)Ma_1^2}{(\gamma-1)Ma_1^2+2}\right]\right] \tag{12-51}$$

这里应指出，对于亚声速流动，因 Ma_1 可以接近于零，即流速可以极低，由式(12-51)可见，相应的 L_{max} 可以无限长，但对于超声速却只有有限值。

最后，我们来讨论马赫数对流动损失系数 λ 的影响。在前面的分析中，曾把它当作常数来处理，而实际上 λ 是随 Ma 而变化的。由于关系复杂，只能通过实验予以定性地研究，其结果是，当 $Ma\leqslant0.70$ 时，λ 与 Ma 基本上无关，λ 的数值接近于不可压缩流体。因而在这一范围内，沿程损失因数 λ 可按不可压缩流体的相应公式计算；而当 $Ma>0.7$ 以后，λ 随 Ma 的增大而降低，$Ma>0.85$ 以后，λ 的减小十分剧烈。

2. 管道中实际气体的等温流动

当气体在长管道中作低速流动时，气体能与周围环境充分地进行热交换，因此，沿整个管道气体的温度可以看作常数，这种流动可以看作为等温流动。

由方程式(12-46)，按等温流动条件 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}p}{p}$，可仿照绝热流动的推导过程，求得压强降落为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\lambda}{D}\frac{p}{2}Ma^2}{Ma^2-\frac{1}{\gamma}} \tag{12-52}$$

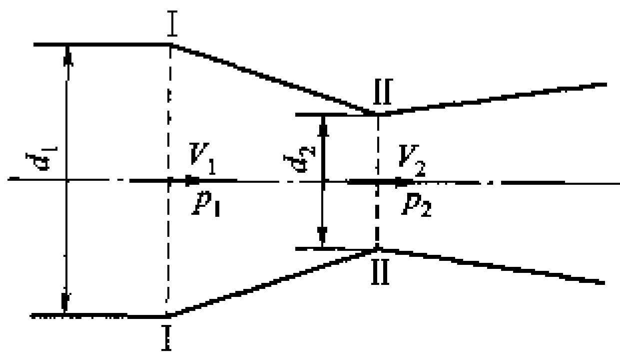
对比式(12-52)与式(12-48)可以看出，管中流速在等温流动时不能超过 $Ma=\sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ 点。其余的分析与绝热流动相同。

等温流动系指低速流动，当 $Ma=\sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ 时，已远离等温的假设，分析无实际意义。

实际气体等温流动的流量计算公式仍可采用式(12-49)。

例　　题

例 12-1　用文丘里流量计测空气流量，入口直径 $d_1=400$ mm，喉部直径 $d_2=125$ mm，入口处绝对压强 $p_1=1.38\times10^5$ Pa，温度 $t_1=17$ ℃，喉部绝对压强 $p_2=1.17\times10^5$ Pa。试求质量流量 Mq_m。设过程为等熵，$\gamma=1.4$，空气 $R=287$ J/kgK。



例 12-1 图

解　不计重力，由等熵能量方程，有

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=\text{const}$$

对Ⅰ-Ⅰ、Ⅱ-Ⅱ两断面列此方程

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{V_1^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{V_2^2}{2}$$

即

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{p_2}{\rho_2}\right)=\frac{V_2^2-V_1^2}{2} \tag{a}$$

对于等熵流动，有 $\frac{p_1}{\rho_1^\gamma}=\frac{p_2}{\rho_2^\gamma}$

所以

$$\rho_2=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}\rho_1$$

及

$$\frac{p_2}{\rho_2}=\frac{p_1}{\rho_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \tag{b}$$

又由质量流量的连续性

$$\rho_1V_1\frac{\pi}{4}d_1^2=\rho_2V_2\frac{\pi}{4}d_2^2$$

故

$$V_2=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\frac{\rho_1}{\rho_2}V_1$$

而

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}$$

所以

$$V_2=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}V_1 \tag{c}$$

将式(b)、(c)代入式(a)，得

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]=\frac{V_1^2}{2}\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{2/\gamma}-1\right]$$

即

$$V_1=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\Big/\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{2/\gamma}-1\right]}$$

因此质量流量为

$$q_m=\rho_1V_1\frac{\pi}{4}d_1^2$$

$$=\frac{\pi}{4}d_1^2\sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\rho_1p_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{2/\gamma}-1\right]}}$$

由气体状态方程$\frac{p_1}{\rho_1}=RT_1$，得

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}$$

所以

$$q_m=\frac{\pi}{4}d_1^2\sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1^2}{RT_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{2/\gamma}-1\right]}}$$

将数据：$d_1=0.4$ m，$d_2=0.125$ m，$p_1=1.38\times10^5$ Pa，$p_2=1.17\times10^5$ Pa，

$T_1 = 273 + 17 = 290$ K，$\gamma = 1.4$，$R = 287$ J/(kgK)代入，得 $q_m = 2.85$ kg/s

例 12－2　空气从一大容器中经侧壁上的收缩喷嘴出流于大气。容器中的绝对压强 $p_0 = 2.07 \times 10^5$ Pa，温度 $t_0 = 15$ ℃，喷嘴直径 $d = 25$ mm，容器外压强 $p = 1.035 \times 10^5$ Pa。求通过喷嘴的质量流量。

解
$$\frac{p}{p_0} = 0.5 < 0.528\,3$$

即 p 小于临界压强 p_{cr}，所以按最大流量公式计算，即将式（12－45）进行整理：

$$q_{m_{max}} = \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$$

由气体状态方程

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$$

所以

$$q_{m_{max}} = \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\gamma \frac{p_0^2}{RT_0}}$$

$$= 0.242 \text{ kg/s}$$

例 12－3　有直径 $d = 150$ mm，长 $L = 300$ m 的管道输送恒温 $t = 20$ ℃的氢气。入口和出口绝对压强分别为 $p_1 = 1.36 \times 10^5$ Pa 和 $p_2 = 1.02 \times 10^5$ Pa，流动损失因数 $\lambda = 0.016$，氢气的气体常数 $R = 4\,120$ J/(kgK)。试求质量流量 q_m 和出口流速 V_2。

解　由等径管道等温流动的流量公式

$$q_m = \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{\lambda RT\overline{L}}}$$

而
$$\overline{L} = \frac{L}{d} = 2\,000$$

所以
$$q_m = 0.26 \text{ kg/s}$$

出口速度

$$V_2 = \frac{q_m}{\rho_2 \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{4 q_m RT}{\pi p_2 d^2}$$

$$= 174.13 \text{ m/s}$$

习　　题

12-1　试证明

(1) 若假定声速传播过程为等温过程，则完全气体的声速应为

$$c_T = \sqrt{RT}$$

(2) 若液体的体积弹性模数为 E，密度为 ρ，则液体中的声速为

$$c_F = \sqrt{E/\rho}$$

12-2　在离开海平面 0～11 km 的范围内，大气温度随高度的变化规律为

$$T = T_0 - ah$$

式中 $T_0 = 288$ K，$a = 0.006\,5$ K/m。现一飞机在 $h = 10\,000$ m 高空飞行，飞行当地马赫数 $Ma = 0.8$，求飞机相对于地面的速度 v_0，取气体常数 $R = 287$ J/kgK。

12-3　某一等熵气流的马赫数 $Ma = 0.8$，并已知其滞止压强 $p_0 = 5 \times 98\,100$ N/m²，温度 $t_0 = 20$ ℃，试求滞止声速 c_0，当地声速 c，气流速度 v 和气流绝对压强 p。

12-4　对于静止的理想气体，试证经过微弱压强扰动后，压强相对变化值为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \gamma \frac{\mathrm{d}v}{c}$$

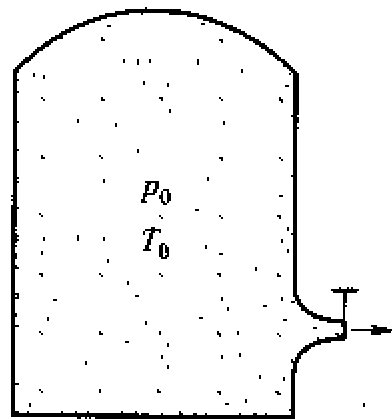
而绝对温度的相对变化值为

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = (\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}v}{c}$$

提示：用类似于求声速的方法证。

12-5　有一充满压缩空气的储气罐，其内绝对压强 $p_0 = 9.8$ MPa，温度 $t_0 = 27$ ℃，打开活门后，空气经渐缩喷管流入大气中，在出口处直径 $d = 5$ cm，试确定在出口处的空气流速 v 和质量流量 q_m（取 $R = 287$ N·m/(kgK)）。

12-6　试计算从一大容器经其侧壁上的小孔流入大气的质量流量 q_m。设容器中绝对压强 $p_0 = 172$ kN/m²，温度 16 ℃，孔径 25 mm，此时收缩因数 $\varepsilon = 0.72$，大气压强为 101 kN/m²。（取 $R = 287$ N·m/(kgK)）

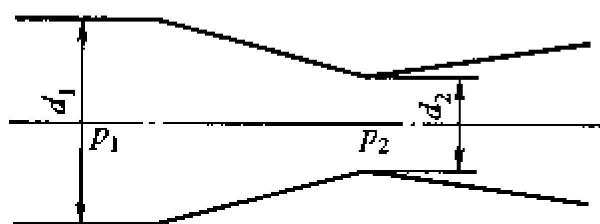


题 12-5 图

12-7　试证对于等熵流动在 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ 的断面上，如果有 $Ma \neq 1$，那么 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ 必为零。

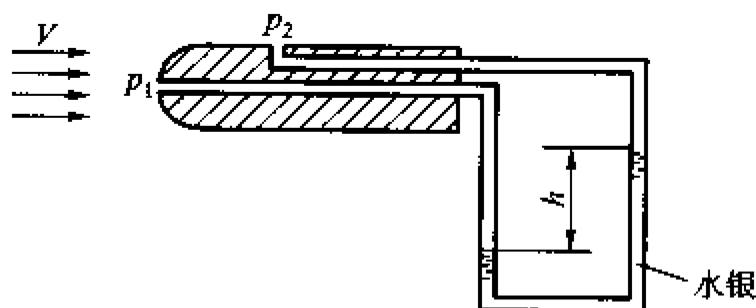
12-8　试计算流过进口直径 $d_1 = 100$ mm，绝对压强 $p_1 = 420$ kN/m²，温度 $t_1 = 20$ ℃；喉部直径 $d_2 = 50$ mm，绝对压强 $p_2 = 350$ kN/m² 的文丘里管的空气质量流量 q_m。设为等熵过程。

12-9　有气流等熵地流过一文丘里管（见题 12-8 图）。此文丘里管进口直径 $d_1 = 75$ mm，压强 $p_1 = 138$ kN/m²，温度 $t_1 = 15$ ℃，当流量 $q_m = 335$ kg/h 时，喉部压强 p_2 不得低于 127.5 kN/m²，问喉部直径 d_2 应为多少？（取 $R = 287$ N·m/(kgK)）

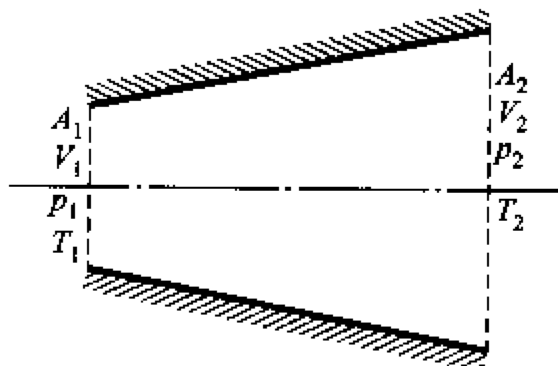


题 12-8 图

12-10　用皮托管测得静压为 35 850 N/m² (表压)，总压强与静压强之差 $h=49.4$ cm 水银柱，由气压计读得大气压为 75.5 cm 水银柱，而空气流的滞止温度为 27 ℃。假设(1)空气是不可压缩的；(2)空气可压缩且为等熵过程。试计算空气流的速度 v。(取 $R=287$ N·m/(kgK))。



题 12-10 图



题 12-11 图

12-11　气体流过一扩压器(如图示)，入口速度、压强、温度分别是 v_1、p_1、T_1，出口温度是 T_2。扩压器的进、出口面积分别是 A_1 和 A_2，气体流过扩压器时，与外界是绝热的。求在理想情况下，扩压器出口截面上的压强 p_2。设气体常数为 R，比热容比为 γ。

12-12　空气在直径为 10.16 cm 的管道中等熵流动，其质量流量为 1 kg/s，滞止温度为 38 ℃。在管道某截面处的静压为 41 360 N/m²，试求该截面处的马赫数 Ma，速度 v 及滞止压强 p_0 ($R=287$ N·m/(kgK))。

12-13　有直径 75 mm，长 900 m 的水平管道输送等温 18 ℃的压缩空气。入口和出口压强分别为 1 240 kN/m² 和 380 kN/m²，沿程损失因数 $\lambda=0.018$，试决定流过此管道的质量流量 q_m (取 $R=287$ N·m/(kgK))。

12-14　气体在等径管道中作等温流动，设气体获得的能量远小于其摩擦损失，试证管道出口处压强 p_2 应为

$$p_2=p_1\sqrt{1-\frac{\lambda L V_1^2}{dRT}}$$

式中 p_1 为管道入口处压强，λ 为沿程损失因数，T 为绝对温度，V_1 为入口流速，L 和 d 分别为管道的长度和直径。

12-15　有一声源在空气中超声速运动。当空气温度 $t=15$ ℃时，所形成的马赫角 $\mu=30°$。试求此声源的运动速度。

12-16　已知某空气流的 $Ma=0.6$，气流温度为 30 ℃，求此空气流的速度 V。

12-17 氮气在内径为20 cm，损失因数 $\lambda = 0.025$ 的等截面管中做绝热流动。在管道进口处的参数为 $p_1 = 300$ kPa（绝对压力），$t_1 = 40$ ℃，$V_1 = 550$ m/s。求管道的最大长度以及出口处的压力、温度和速度。

12-18 空气以 $Ma_1 = 0.4$ 流入并以 $Ma = 0.8$ 流出绝热等截面管道。试问在哪一断面上 $Ma = 0.6$？

第13章

可压缩流体的平面流动

物体以超声速运动，或超声速气流流经物体表面时，将产生激波或膨胀波，这是超声速流动的基本特征，也是分析研究超声速流动的一个十分重要的物理概念。在本章中将分析研究可压缩流体二维流动中这种波的产生、传播规律、性质以及有关主要参数的理论计算方法等。

§13-1 平面马赫波

由§12-2中的叙述可知，当物体运动(扰动源)速度 v 大于气体中声音的传播速度 c 时，由图12-7可见，扰动源永远运动在扰动传播的前面。运动过程中所产生的扰动波面，在任何瞬间都形成为一个空间圆锥面，它是一个以扰动源为顶点的与扰动源运动相反方向张开的圆锥区域，称为马赫锥。马赫锥的半顶角称为马赫角 μ，有

$$\sin \mu = \frac{c}{v} = \frac{1}{Ma} \tag{13-1}$$

显然，马赫角的大小决定于气流的马赫数 Ma。这种以某一点处的扰动源产生球面扰动波所形成的马赫锥，在任何时候，其影响区域只限于马赫锥内，即锥内气体受到扰动，面锥外的气体未受扰动，马赫锥面是扰动区和未受扰动区之间的一个明显的界面。微弱扰动波不能传播至马赫锥外，这也是我们通常只见到超声速飞机向前飞来，但却听不到声音的原因，只有当飞机飞过之后，才能听见声音，即小扰动只能在它下游的马赫锥内传播。

如果产生扰动的是一根无限长的直扰动线，微弱扰动将以圆柱面波的形式用当地声速向外传播。垂直于无限长直扰动线的平面同圆柱面波的交线，就是以声速向外传播的扰动圆。这是二维的微弱扰动传播。这时，在平面上的扰动圆形成的包络圆锥线称为马赫线，又称为平面马赫波。若顺着气体流动的方向

观察，由直扰动线向左伸向下游的称为左伸马赫线(波)，而向右伸向下游的称为右伸马赫线(波)。

当气流经过平面马赫波后，与波前比较，气流速度的大小和方向都将发生变化。

设马赫波前气流速度为 v（见图 13－1），若将气流速度分解成垂直于马赫波的分速度 v_n 和平行于波面的分速度 v_t，由于沿波面方向压力均匀分布，所以波前速度沿波面方向的分速度 v_{t1} 与波后速度沿波面方向的分速度 v_{t2} 相等，即

$$v_{t1} = v_{t2}$$

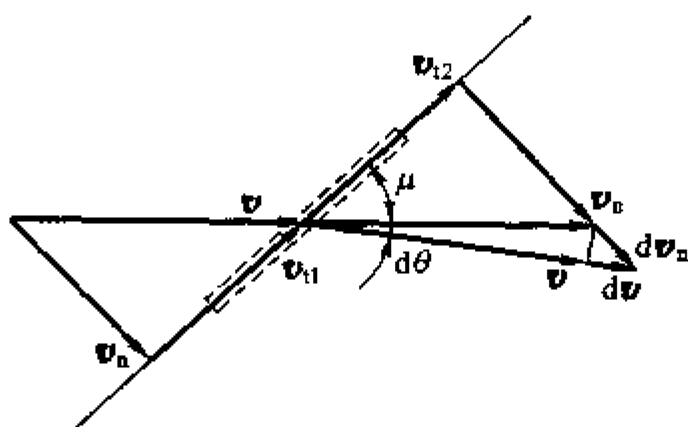


图 13－1

若紧贴波面两侧取一控制体(虚线所示)，垂直于法向分速度的控制面积为 A，对波前波后的控制面写出动量方程式

$$pA - (p + \mathrm{d}p)A = \rho A v_n [(v_n + \mathrm{d}v_n) - v_n]$$

经整理后得

$$\rho \mathrm{d}v_n = -\frac{\mathrm{d}p}{v_n} \tag{13-2}$$

又由控制体的连续方程式

$$\rho v_n A = (\rho + \mathrm{d}\rho)(v_n + \mathrm{d}v_n)A$$

略去二阶微量，得

$$\rho \mathrm{d}v_n = -v_n \mathrm{d}\rho \tag{13-3}$$

将上式代入式(13－2)，有

$$v_n = c$$

即超声速气流在马赫波前的法向速度 v_n 等于声速。

又由图 13－1 中马赫波后的速度三角形，可以得到超声速气流通过马赫波后的速度相对变化量以及其它参数的变化关系式。在讨论中对波的方向我们规定右伸波为正，左伸波为负，并假定是理想完全气体作平面定常绝热流动。

超声速气流通过马赫波时，沿波面方向的分速度 v_t 不变，法向分速度变为 $v_n + dv_n$，速度 v 偏转了 $d\theta$ 角，在 $d\theta$ 角很小的情况下，由图 13－1 中的速度三角形有

$$dv \approx dv_n \sin(\mu + d\theta)$$

或

$$dv \approx dv_n \sin \mu$$

又有

$$dv_n \cos \mu \approx v d\theta$$

则

$$dv = v d\theta \frac{\sin \mu}{\cos \mu} = v d\theta \tan \mu$$

$$= v d\theta \frac{1}{\sqrt{Ma^2 - 1}}$$

规定气流通过马赫波时偏转角逆时针为正，顺时针为负，而规定通过马赫波时右伸波为正，左伸波为负，因此通过马赫波的气流速度的相对变化可以写为

$$\frac{dv}{v} = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \tag{13-4}$$

这样，对于图 13－1 中的左伸马赫波而言，$d\theta$ 顺时针为负，而它是左伸马赫波亦为负，因此式(13－4)取正号，即气流通过马赫波后速度是增加的。而对于右伸马赫波时，右伸马赫波为正，且若 $d\theta$ 是顺时针向为负，则式(13－4)应取负号，即这时气流通过马赫波后速度是减小的。

同样，考虑到沿波面方向的分速度 v_t 不变，由对波面两侧控制面列动量方程得到的式(13－2)及等熵流动的伯努利方程，可以求得通过马赫波时压强的变化，有

$$dp = -\rho v_n dv_n = -\rho v dv$$

将式(13－4)代入，得

$$dp = \mp \frac{\rho v^2}{\sqrt{Ma^2 - 1}} d\theta \tag{13-5}$$

从上式可见，超声速气流通过马赫波(受扰动)时，随速度增加将出现对应压强降低，是膨胀过程，称这样的马赫波为微弱膨胀波，这时压强、密度、温度等都有微量减小；反之，若速度微量减小，将对应发生压强、密度和温度的微量增加，是压缩过程，称这样的马赫波为微弱压缩波。显然，我们对公式正负号的规定与流动的物理过程是一致的。由于通过马赫波时气流参数只有微弱的变化，因此其流动一般仍按等熵流动处理。

从式(13－4)，(13－5)以及相应的流动物理过程得到，在超声速气流中，马赫波的产生是与通过扰动源时气流速度大小和方向的变化以及相应压强、密

度的变化紧密关联，换言之，在超声速气流速度大小和方向或者气流的压强发生变化时，气流中必将伴随产生马赫波。

§13-2 可压缩流体平面流动的基本方程

应当指出，一般情况下的二元超声速等熵气流，不一定是位势流。在等熵气流中，沿每一条流线上，总能量的大小和熵值保持不变。但若流过某一物体时，或在超声速气流流经曲激波时，不同的流线处将发生不同的损失。即使其后流动仍然等熵，然而在不同流线上，总能量和熵有不同的数值，这时气流不再是位势流，流动中将会出现旋涡。

因此，当由一气体流线转到另一流线时，总能量和熵保持不变的等熵气流才是位势流。对于气体高速流动，边界层外的流动通常是位势流，这时可以忽略相邻流体层间的热传导，是一种理想气体的绝热流动。

下面讨论可压缩气体平面恒定势流的基本方程。

1. 等熵势流条件

对于二元恒定流动，在忽略质量力不计的情况下，运动方程为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y \tag{13-6}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y \tag{13-7}$$

为了能从方程中直接区分性质完全不同的有旋与有势流动，将式(13-6)改写为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+2v_y\omega_z-2v_y\omega_z$$

上式中旋转角速度

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

于是有

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y-2v_y\omega_z$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2}{2}+\frac{v_y^2}{2}\right)-2v_y\omega_z$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-2v_y\omega_z \tag{13-8}$$

同理，可将式(13-7)改写为

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)+2v_x\omega_z \tag{13-9}$$

将式(13-8)乘 dx，式(13-9)乘 dy，然后相加得

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right)dy+2\omega_z(v_x dy-v_y dx)$$

即

$$-\frac{dp}{\rho}=d\left(\frac{v^2}{2}\right)+2\omega_z(v_x dy-v_y dx) \tag{13-10}$$

这里我们假定，流体从一流线转到另一流线时，总能量 H_0 和熵 S 是变化的，即

$$H_0=i+\frac{v^2}{2}\neq 常数$$

$$S=\frac{1}{T}\left(i-\frac{p}{\rho}\right)\neq 常数$$

式中 H_0——总能量；

S——熵。

因此，由上面两个公式得到式(13-10)变为

$$Tds-dH_0=2\omega_z(v_x dy-v_y dx) \tag{13-11}$$

由上式可见，若气体在流动过程中没有旋涡，即 $\omega_z=0$，气流中任意各点的滞止焓 H_0 和熵 S 必须都为常数，即若气体由一流线转到另一流线时，其总能量 H_0 和熵 S 不改变，这时等熵气流必然是位势流动。因此，在气体流动中，我们同样可以用滞止焓和熵的相应热力学参数来判别气体流动是否有势。

如果超声速气流在激波形成之前各点上滞止焓和熵都相等，则气体来流是势流。而当有激波形成时，若沿激波面各点有不同的损失，波后气体由一流线转到另一流线时，熵就会发生改变，因此激波后的流动中出现旋涡。当然，若激波是直线时，波后各点熵增加值都相同，这时气流在波后仍将保持位势流动。

2. 气体平面位势流基本微分方程

对平面定常气流，连续方程为

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0$$

展开写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}v_y + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{13-12}$$

设流体具有正压性，则有

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial y}$$

又由运动方程有

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y\right)$$

于是式(13-12)变为

$$-\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y\right)v_x - \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y\right)v_y + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0$$

即

$$\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{v_x v_y}{c^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \left(1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{13-13}$$

对于平面位势流动，引入速度势函数 $\varphi(x,y)$，可以将上述解速度场的问题简化为解速度势函数 φ 的标量场问题。气流速度与势函数的关系为

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

于是式(13-13)变为

$$(c^2 - v_x^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2v_x v_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (c^2 - v_y^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{13-14}$$

式(13-14)是可压缩气体定常平面有势流动的基本微分方程，显然是速度势函数 φ 的二阶非线性偏微分方程。

在气体运动速度不大的情况下，将式(13-14)逐项除以声速 c^2，可以忽略 $\frac{v_x^2}{c^2}$，$\frac{v_x v_y}{c^2}$，$\frac{v_y^2}{c^2}$，则式(13-14)就变成式(6-12)，这是 ρ = 常数情况下速度势函数 φ 的拉普拉斯方程。

对于平面可压缩气体有势流动，只要根据给定的边界条件解得速度势函数 $\varphi(x,y)$，也就是得到了流场中的速度分布 $v(x,y)$。然后根据运动方程、能量方程、状态方程和等熵气流的基本关系式，即可求得流场中的压强 p、密度 ρ 和温度 T 等参数。

§ 13－3　普朗特－迈耶流动
(绕凸钝角的超声速流动)

实际上，求解非线性的平面可压缩势流气体动力学基本微分方程十分困难，除少数特殊的简单流动(如点源、汇、点涡、超声速气流绕凸钝角流动等)可以精确求解外，其余可压缩气流的大量问题只能采用近似方法求解。

这里讨论超声速气流绕凸钝角的流动。定常均匀半无限的平面超声速气流沿一平壁 OA_1 流动，在 A_1 点处壁面向外偏转一微小角度 $d\delta_1$（如图 13－2 所示），A_1 点是对超声速气流产生扰动的扰动源，于是 A_1 点产生一个微弱扰动，在 A_1 点形成一膨胀波 A_1B_1。由于是均匀来流，所以 A_1B_1 是一条直线，马赫波与来流方向间的马赫角 $\mu_1=\arcsin\dfrac{1}{Ma_1}$。气流通过马赫波 A_1B_1 之后发生加速，速度 $v_2>v_1$（$Ma_2>Ma_1$），同时出现压强、密度、温度下降。设壁面在 A_2 点又向外折转一个微小角度 $d\delta_2$，在 A_2 点产生一膨胀波 A_2B_2，其马赫角为 $\mu_2=\arcsin\dfrac{1}{Ma_2}$，经马赫波 A_2B_2 后，速度又增加至 v_3。当气流继续沿着壁面 $A_3A_4\cdots A_n$ 流动时，由于壁面连续不断地向外折转，将在 A_3，A_4，…，A_n 各折转点处产生一系列的膨胀波 A_3B_3，…，A_nB_n，于是得到

$$Ma_1<Ma_2<Ma_3\cdots<Ma_n$$

$$\mu_1>\mu_2>\mu_3\cdots>\mu_n$$

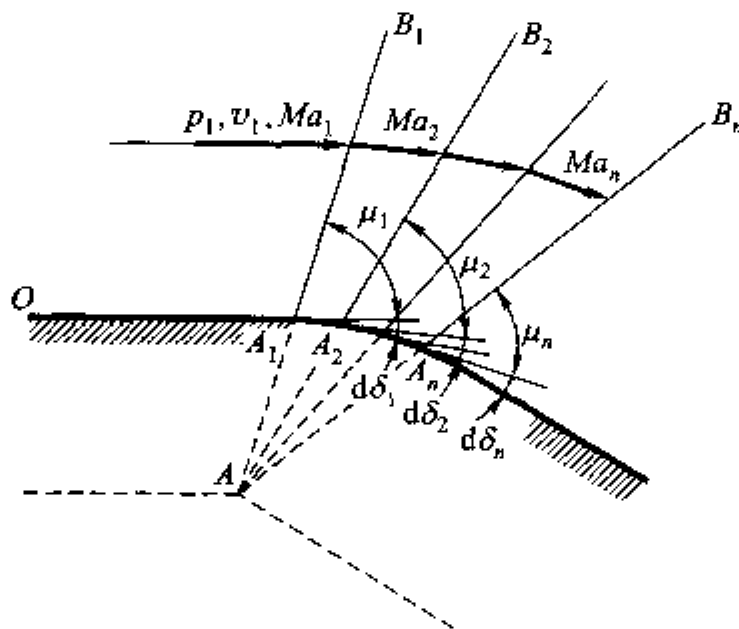


图　13－2

由上可见，超声速气流沿着连续向外折转的壁面流动时产生一系列膨胀波，彼此既不相交也不平行，而是呈辐射状地伸入气流中，气流依次通过这一系列膨胀波时形成了一个气流加速区，速度由 Ma_1（v_1）连续地增大到 Ma_n（v_n），气流压强则由 p_1 下降至 p_n。气流的其它参数如焓、密度、温度等也都相应地降低。这种情况也可以把凸曲壁看成是穿过膨胀波组的一条流线，而这一波组的扰动源是曲壁面的曲率中心 A 点。

显然，气流都是在经过膨胀波时才发生各种参数的变化，而和相邻扰动源之间的距离无关，即气流速度由 Ma_1 增大到 Ma_n，压强由 p_1 下降至 p_n，只和气流方向的总折转角度有关。因此，只要两个参数相同的气流的总折转角度相等，折转后这两个气流将具有相同的参数。这样，如果使图 13－2 中的 A_1，A_2，…，A_n 之间的距离缩小到无穷小直至为零，我们就得到了一个气流绕凸钝角折转壁的情况(如图 13－3 所示)。这时，气流在凸钝角壁面处连续地受到扰动而连续地产生一个膨胀波组，一直到气流方向折转到与 A_1C 壁面平行为止，在 A_1B_1 和 A_1B_n 之间形成一个连续的扰动区，组成一定强度的扇形状波束的膨胀波组，马赫线呈发散状。超声速气流在经过扇形膨胀波束区域时，速

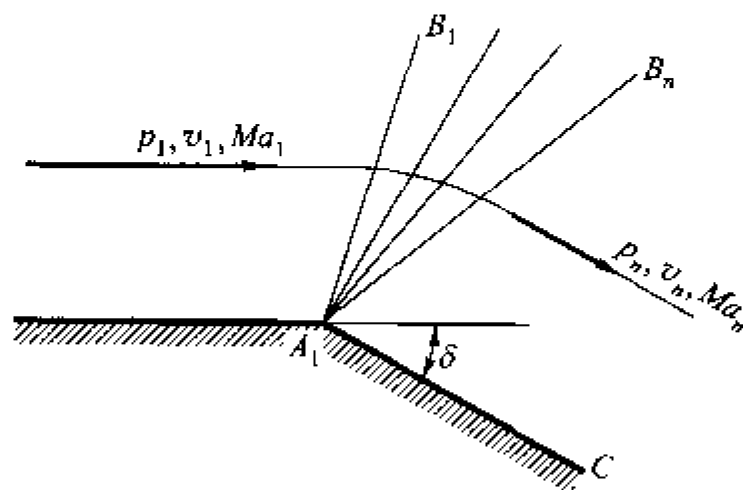


图　13－3

度由 v_1 逐渐增加到 v_n，压强由 p_1 逐渐下降到 p_n。这个变化可以看作由无穷多个微小变化的 dv 和 dp 的合成，所以气流在膨胀波区 $B_1A_1B_n$ 中的所有流线都是连续曲线，而各马赫波与流线间的角度沿着气流方向逐渐变小。

这种对于凸钝角的集中波束，称为普朗特－迈耶(Prandtl-Meyer)扇形膨胀波。对于如图 13－2 所示气流在光滑凸面壁上的膨胀，因为流动等熵，所以是可逆的，即在由任何两条流线作壁面的流道中，若正向流动是膨胀，反向流动就是压缩，反之亦然。

在流动是绝热的情况下，如果忽略粘性的作用，可以认为超声速气流经过膨胀波束的流动是等熵过程。

用与研究超声速气流绕凸钝角壁面流动同样的方法，可以得到超声速气流绕内凹壁面的流动。曲壁上每一点都是扰动源，气流经过时产生一定强度的微弱压缩马赫波组，但必须注意，在这一区域中这些马赫波必须不相交，否则就不是微弱压缩波。

实际上超声速气流引起膨胀波的外在原因并不只限于流动方向的变化，当周围的压强低于气流压强($p_2 < p_1$)时，超声速气流中也将引起膨胀波组。例如超声速气流在直壁端的流动(如图13-4所示)。当直壁端 A 点以后是低压区($p_2 < p_1$)时，与气流绕凸钝角的情况类似，形成以 A 点为扰动中心的膨胀波组，速度增大到 v_2，压强下降到 p_2，气流在 A 点折转一个 δ 角。

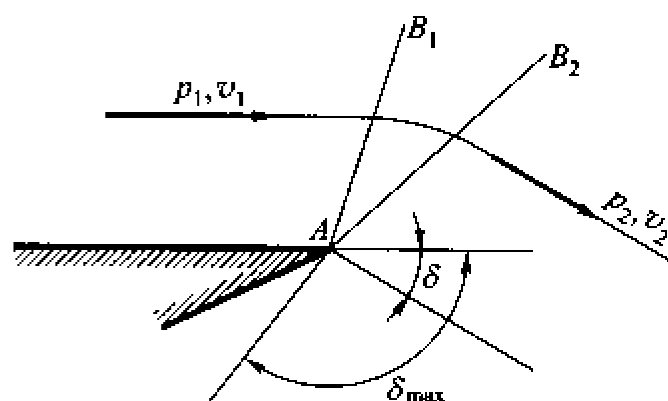


图 13-4

因此，在不同的具体条件下，超声速气流都有可能产生膨胀波，引起流动参数的变化。

超声速气流绕凸钝角壁面的折转流动所产生的等熵膨胀(或与之可逆的等熵压缩)，其 $d\theta$ 与 Ma 之间的微分关系由式(13-4)给出。对于左伸膨胀波为

$$d\theta = -\sqrt{Ma^2 - 1}\frac{dv}{v}$$

按规定，左伸马赫波方向为负，而气流通过马赫波后速度是增加的，即 dv 为正，因此偏转角 $d\theta$ 为负，即通过马赫波后气流方向顺时针偏转 $d\theta$。

由式(12-32)有

$$Ma^2 = \frac{\frac{2}{\gamma+1}}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_{cr}^2} M_{cr}^2$$

式中

M_{cr}——无量纲速度，为气流速度与临界声速的比值，$M_{cr} = \frac{v}{c_{cr}}$；$v$ 增加时，M_{cr}亦增加，当 $v \to v_{max}$时，$M_{crmax} = \frac{v_{max}}{c_{cr}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$，对一定气体，$M_{crmax}$是一常数。如对空气，$\gamma = 1.4$，$M_{crmax} = 2.45$。

将上式代入 $d\theta$ 的微分式，并考虑到$\frac{dv}{v} = \frac{dM_{cr}}{M_{cr}}$，得到

$$d\theta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{M_{cr}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{cr}^2}}\frac{dM_{cr}}{M_{cr}} \tag{13-15}$$

设气流由初始的 Ma_1(M_{cr1})和 θ_1 经扇形马赫波束膨胀到任意 Ma_n(M_{crn})，对应气流的方向角为 θ_n，则对式(13-15)积分得到

$$\int_{\theta_1}^{\theta_n} d\theta = -\int_{M_{cr1}}^{M_{crn}}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{M_{cr}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{cr}^2}}\frac{dM_{cr}}{M_{cr}} \tag{13-16}$$

或写成

$$\theta_n - \theta_1 = -\delta(M_{crn}) + \delta(M_{cr1}) \tag{13-17}$$

式中

$$\delta(M_{crn}) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[\arctan\sqrt{\frac{M_{crn}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{crn}^2}} - \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{M_{crn}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{crn}^2}}\right)\right] \tag{13-18}$$

称 $\delta(M_{cr})$为普朗特-迈耶函数。由式(13-17)可知，$\delta(M_{cr})$具有角度的量纲。对于确定的气体(γ 一定)，$\delta(M_{cr})$只与气流的无量纲速度 M_{cr}有关。

对于右伸膨胀波束，式(13-4)中应取“+”号，则同样推导得到

$$\theta_n - \theta_1 = \delta(M_{crn}) - \delta(M_{cr1}) \tag{13-19}$$

将式(12-31)代入式(13-18)，得到用 Ma 数表示的普朗特-迈耶函数

$$\delta(Ma) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(Ma^2-1)} - \arctan\sqrt{Ma^2-1} \tag{13-20}$$

若 $M_{cr1}=1$，则由式(13-18)可得 $\delta(1)=0$，
于是

$$\delta(M_{cr}) = \mp(\theta_n - \theta_{M_{cr1}}) \tag{13-21}$$

因此，普朗特-迈耶函数表示匀速气流膨胀到 M_{cr}时气流方向偏转的角度，负号为越过左伸膨胀波的流动，正号为越过右伸膨胀波的流动。显然，M_{cr}愈大，$\delta(M_{cr})$值也愈大，当 M_{cr}达到极限值 $M_{cr}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$时，$\delta(M_{cr})$也达到最大值，将这时的 M_{cr}值代入式(13-18)，得到

$$\delta\ (M_{cr})_{max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right) \tag{13-22}$$

对于空气，$\gamma = 1.4$，得 $\delta\ (M_{cr})_{max} = 130.45°$。

对于过热蒸汽，$\gamma = 1.3$，得 $\delta\ (M_{cr})_{max} = 159.20°$。

上述理论分析表明，超声速气流可以绕凸钝角加速，并偏转到相当大的角度而不发生流动分离现象，而在同样的亚声速绕流中，将可能出现分离现象。但是应当看到，普朗特-迈耶理论是在理想流体的假定下得到的。在真实流体情况下，实际存在的表面没有分离的流动偏转角将小于按普朗特-迈耶理论计算得到的值。实际上随气流不断加速的膨胀过程，气温将不断降低，直至气体凝结液化，这时上述理论已不再适用。

在绝热条件下，超声速气流经过马赫波的膨胀过程是等熵的，因此，超声速气流绕凸钝角或外凸曲面壁偏转膨胀时，只要知道壁面的偏转角，亦即知道气流的偏转角，就可以由式(13-16)或式(13-18)及式(13-20)确定气流膨胀后的速度 M_{cr}或 Ma，然后利用气动函数表(参考资料[18]、[20]等)计算压强、密度、温度等参数。

$Ma = 1$ 的等声速气流绕凸钝角膨胀时，膨胀波束所占的扇形区域由 $Ma = 1$ 的膨胀波和最终的马赫数 Ma_n所对应的膨胀波所围成(见图 13-5)，扇形的圆心角为 φ。

由图中得到

图 13-5

$$\varphi + \theta_n - \Delta\theta = \frac{\pi}{2} \tag{13-23}$$

式中

$$\theta_n = \arcsin \frac{1}{Ma_n}$$

$$\Delta\theta = \delta\ (Ma)$$

代入式(13-23)化简后得

$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2a_n-1)}-\arctan\sqrt{Ma_n^2-1}-\arcsin\frac{1}{Ma_n}$$

(13-24)

或

$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}(M_{crn}^2-1)}-\arcsin\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\sqrt{\frac{M_{crn}^2-1}{M_{crn}^2}}$$

(13-25)

在扇形扰动区内，随着气流的膨胀，流线之间的距离将逐渐增大。若以 l_{cr} 表示马赫波前 $Ma=1$ 时两流线间的距离，而 l 表示马赫数为 Ma_n 时两流线间的距离，在所讨论的情况下，l_{cr} 和 l 为流管在对应不同速度下的断面积(垂直于纸面方向取单位长)，根据连续方程有

$$\rho Av=\rho_{cr}A_{cr}c_{cr}$$

于是

$$\frac{l}{l_{cr}}=\frac{A}{A_{cr}}=\frac{\rho_{cr}c_{cr}}{\rho\ v}=\frac{\rho_{cr}}{\rho_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho}\frac{c_0}{v}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

式中 ρ_0，c_0 为滞止参数。将式(12-23)和式(12-29)代入上式，得到

$$\begin{aligned}\frac{l}{l_{cr}}&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\times\sqrt{\frac{1}{Ma^2}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)\frac{2}{\gamma+1}}\\&=\frac{1}{Ma}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}=\frac{1}{M_{cr}}\left[1-\frac{\gamma-1}{2}(M_{cr}^2-1)\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}\end{aligned}$$

(13-26)

任一流线在膨胀过程中到凸钝角顶点 A 的距离变化可以由式(13-26)得到

$$\frac{r}{r_{cr}}=\frac{1}{\frac{\sin\ \theta_n}{l_{cr}}}=\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\qquad(13-27)$$

从上述讨论可见，超声速气流绕凸钝角或外凸曲壁的膨胀虽然是平面流动，但是在扇形膨胀区内的解却是一维的，且这个解对所有的超声速膨胀流都相同，因此可用来计算各种超声速膨胀流动。

§13-4 小扰动线化法

前面曾得到气体流动的基本微分方程式(13-14)，这是二阶非线性偏微分

方程。

用数理方程中的分类方法很容易确定，当气流作超声速流动，即 $Ma>1$ 时，式(13 - 14)是双曲型方程；若气流作等声速流动，即 $Ma=1$，则式(13 - 14)属于抛物型方程。显然，不同类型方程的解法截然不同。

本节主要讨论式(13 - 14)的一种简化求解方法。在实际流动问题中，被超声速气流绕流的物体很薄，且无穷远处气流对物体的冲角也比较小(如薄翼型绕流)，在这一条件下，物体在气流中引起的扰动速度远比无穷远处的均匀来流速度小得多，而实际气体绕薄翼流动可以看作为均匀来流与小扰动的叠加。根据流动的这些特殊条件，可以将二阶非线性的偏微分方程式(13 - 14)简化为线性偏微分方程，从而使方程的求解大为简化，通常称之为小扰动线化理论。

在上述绕薄翼型流动问题中，设无穷远处的气流参数 v_∞，p_∞，ρ_∞ 和 c_∞ 分别为未受扰动气流的速度、压强、密度和声速，而设 v'_x、v'_y，p'，ρ' 和 c' 为气流绕流薄翼型时所引起的相应扰动微量。这种物体对气流的扰动称为小扰动。根据假设，显然有

$$v_\infty \gg v'_x,\quad v_\infty \gg v'_y,\quad p_\infty \gg p',\quad \rho_\infty \gg \rho',\quad c_\infty \gg c'$$

气流受到扰动后的参数为

$$v_x = v_\infty + v'_x,\quad v_y = v'_y$$

$$p = p_\infty + p',$$

$$\rho = \rho_\infty + \rho',$$

$$c = c_\infty + c',$$

将上述参数代入式(13 - 13)，得

$$\left[1-\frac{(v_\infty+v'_x)^2}{(c_\infty+c')^2}\right]\frac{\partial(v_\infty+v'_x)}{\partial x}-\frac{(v_\infty+v'_x)v'_y}{(c_\infty+c')^2}\left[\frac{\partial(v_\infty+v'_x)}{\partial y}+\frac{\partial v'_y}{\partial x}\right]+\left[1-\frac{v'^2_y}{(c_\infty+c')^2}\right]\times\frac{\partial v'_y}{\partial y}=0$$

略去高阶微量 v'^2_x，v'^2_y，$v'_x v'_y$，c'^2，上式简化为

$$\left(1-\frac{v^2_\infty+2v_\infty v'_x}{c^2_\infty+2c_\infty c'}\right)\frac{\partial v'_x}{\partial x}-\frac{v_\infty v'_y}{c^2_\infty+2c_\infty c'}\left(\frac{\partial v'_x}{\partial y}+\frac{\partial v'_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial v'_y}{\partial y}=0$$

由于 v_∞ 和 c_∞ 远大于 v'_x，v'_y 和 c'，所以第二项系数是个微量，可以略去。第一项系数中 $2v'_\infty v'_x$ 和 $2c_\infty c'$ 亦可略去。于是，上式进一步简化为

$$\left(1-\frac{v^2_\infty}{c^2_\infty}\right)\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v'_y}{\partial y}=0$$

或写为

$$(1-Ma_\infty^2)\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v'_y}{\partial y}=0 \tag{13-28}$$

这就是在小扰动条件下，扰动速度所应满足的微分方程。

下面分析扰动速度有势与否。设受扰动的气流是有势的，即

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=0$$

根据小扰动的特点，上式变为

$$\frac{\partial v'_y}{\partial x}-\frac{\partial(v_\infty+v'_x)}{\partial y}=0$$

即

$$\frac{\partial v'_y}{\partial x}-\frac{\partial v'_x}{\partial y}=0 \tag{13-29}$$

上式说明，在小扰动条件下，速度的扰动分量 v'_x 和 v'_y 也满足有势运动条件，因此同样存在速度扰动量的速度势函数 $\varphi'(x,y)$，有

$$v'_x=\frac{\partial \varphi'}{\partial x},\quad v'_y=\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \tag{13-30}$$

将上式代入式(13-28)，得到

$$(1-Ma_\infty^2)\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2}=0 \tag{13-31}$$

这就是小扰动条件下扰动速度势的微分方程，由于方程的二阶导数的系数是已知常数，所以式(13-31)是线性的。当无穷远处为亚声速流时，$Ma_\infty<1$，式(13-31)是椭圆形偏微分方程；当无穷远处为超声速流时，$Ma_\infty>1$，式(13-31)是双曲型偏微分方程。

显然，当由速度势微分方程解出 φ' 后，就可由式(13-20)求得扰动速度 v'_x 和 v'_y，从而得到 v_x，v_y，再由伯努利方程求出压强 p。

§13-5　特征线法

在超声速流场中，扰动沿着马赫线的方向传播，在某点产生的扰动，将沿着由该点发出的扰动波所限定的区域内传播，其间的马赫角将随气流 Ma 数的不同而改变，该区域称为该点的扰动影响区域，而马赫线就是超声速流场中的特征线。对均匀气流，左伸波和右伸波是直线；对非均匀气流，左伸波和右伸波则是曲线。

前而(式(13-18)和式(13-21))已经导出了气流方向偏转的角度与无量纲

速度 M_{cr}之间的关系为

对左伸波

$$\theta = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{M_{cr}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{cr}^2}}+\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{M_{cr}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{cr}^2}}\right)+\theta_0 \tag{13-32}$$

对右伸波

$$\theta = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{M_{cr}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{cr}^2}}-\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{M_{cr}^2-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-M_{cr}^2}}\right)+\theta'_0 \tag{13-33}$$

在图 13－6 上我们取极坐标系。M_{cr}和 θ 分别为矢径和幅角。对于任意给定的 θ_0 和 θ'_0，可以将式(13－32)和(13－33)的函数关系表示在 $M_{cr}-\theta$ 平面内，得到曲线Ⅰ和Ⅱ，显然，由式(13－32)和(13－33)所确定的曲线是外摆线。

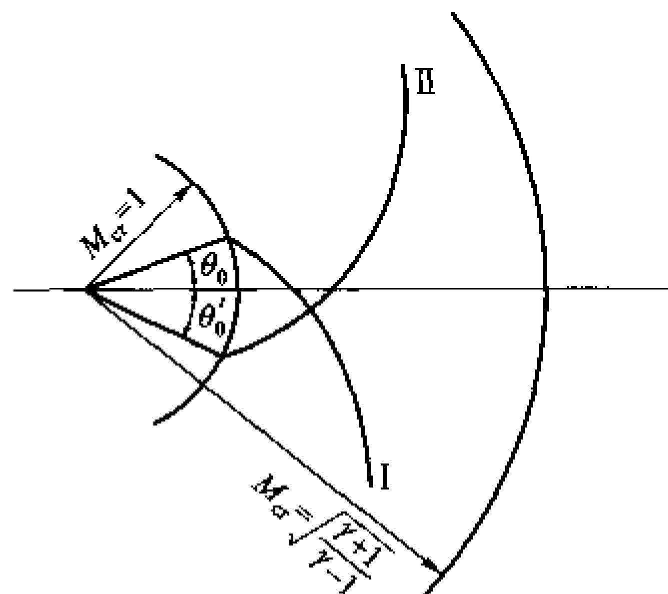


图　13－6

曲线Ⅰ和Ⅱ分别表示超声速气流通过左伸波和右伸波膨胀时在速度平面中的速端曲线，称为速度平面上的特征线。这一速度平面上的外摆线，实际上就是直径为 $\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}-1$ 的圆周在半径 $M_{cr}=1$ 的圆上滚动时，其圆周上任意一点的轨迹。所有的外摆线都被限制在 $M_{cr}=1$（对应 v_{cr}）和 $M_{cr}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$（对应 v_{max}）为半径的环形区域内，即意味着气流速度应大于声速，而小于极限速度。如果给定一系列不同的 θ_0 和 θ'_0，就可得到对应的两族外摆线形成特征线网。

根据上述讨论得到，对于物理平面上任意一条马赫波（如图 13－7a 中的 AB_1），在速度平面上的特征线Ⅰ上就有与之对应的惟一确定的点（如图 13－7b 中的 1 点）。反过来，对于速度平面上的某一点，因为通过该点有两条特征线，所以这一点对应着物理平面上的左伸和右伸两条马赫波。

在物理平面上，气流穿过马赫波时的速度变化是由垂直于马赫波方向的分

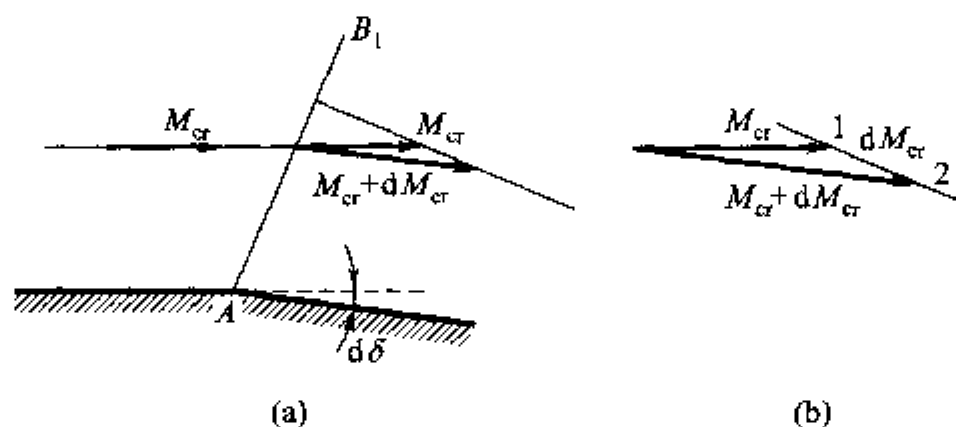


图 13-7

速度的变化引起的。图 13-7b 中 1 点和 2 点之间的线段表示气流经过马赫波 AB_1 时，垂直于 AB_1 的分速度的增量 dM_{cr}，即 $\overline{12}$ 线段垂直于马赫波 AB_1。当 $dM_{cr}\to 0$ 时，速度平面上特征线的割线 $\overline{12}$ 逐渐变为特征线的切线。由此得出结论：物理平面上的左伸马赫波（特征线Ⅰ）方向与速度平面上通过对应点的右伸特征线Ⅱ垂直；而在物理平面上的右伸马赫波（特征线Ⅱ）方向又与速度平面上的左伸特征线Ⅰ相垂直（见图 13-8），这是特征线的两个非常重要的性质。

这两个性质说明速度平面上的特征线与物理平面上的流动之间存在着确定的关系。由于式(13-32)和式(13-33)只取决于气体的物理性质 γ 和气流速度 M_{cr}，而不依赖于平面上的边界条件，所以速端曲线对超声速气流的膨胀流动具有普遍的意义，可以利用速度平面上的特征线进行平面定常超声速流的计算。根据特征线的性质，可以用作图法或解析法，由速度平面上 A' 点的特征线方向 $A'B'$ 和 $A'C'$ 定出物理平面上 A 点的特征线方向 AB 和 AC，并由此解出平面超声速势流问题。因此用特征线法解决气体动力学的问题，主要是寻找气流平面内的特征线。

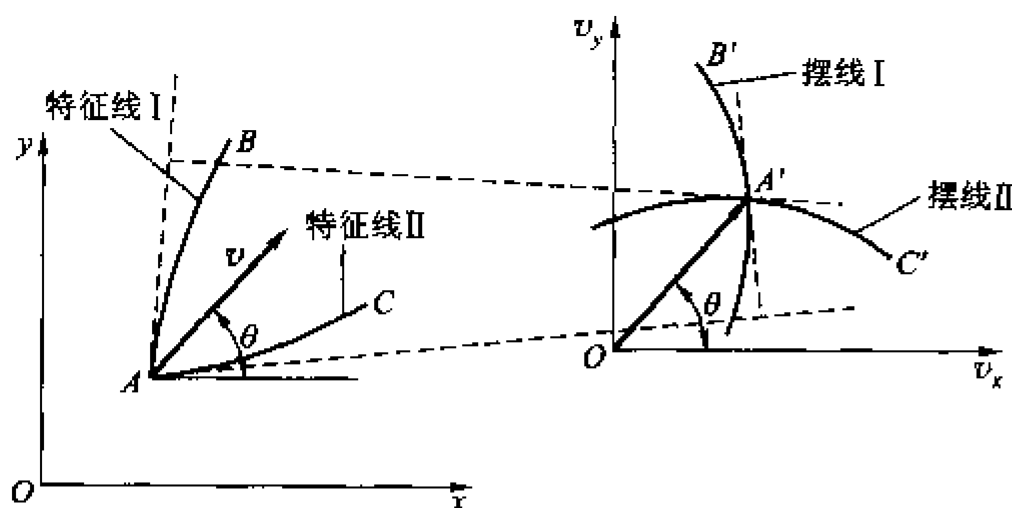


图 13-8

现在用特征线法解超声速喷管中的气体流动问题。

如图 13-9 所示，超声速喷管中，喉部之前收缩管中气流作亚声速运动，逐渐加速直至喉部达到声速，且亚声速入口段的设计使喉部处为均匀声速流动。

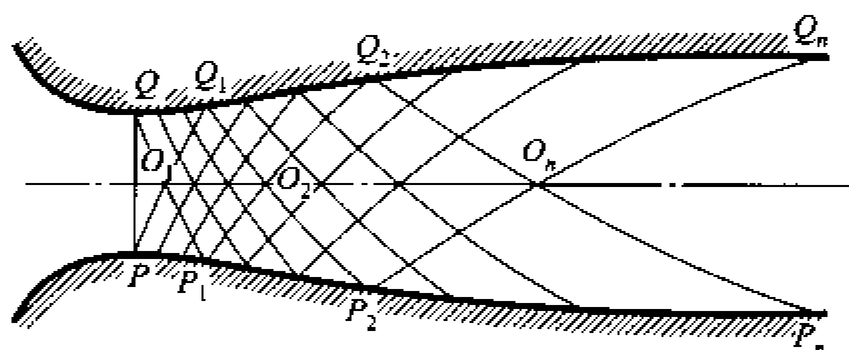


图 13-9

喷管的作用是使气流从 $Ma=1$ 加速到最终所希望的 Ma，因此超声速气流在扩展通道中作膨胀运动。气流在扩展通道内运动时，壁面上的每一点都是一个扰动源，由此产生一系列膨胀波，当气流沿喷管扩展通道流动时，穿过膨胀波系，实现气流的膨胀。对轴对称的喷管而言，在轴平面内喷管中的扰动来自对称的壁面，形成两族膨胀波系 PQ_1，P_1Q_2，P_2Q_n，…，和 QP_1，Q_1P_2，Q_2P_n，…。膨胀波在扩展通道中相互干涉(波的相交)，形成复合的波系。

在喷管喉部之前气流运动已知的情况下，喷管超声速扩展通道的设计可以分解逐步进行。首先解出区域 PQO_1 中的流动；然后根据已解出的特征线 PO_1 和 QO_1 上的气流参数，以及所给出的 PP_1 和 QQ_1 的形状，分别求解区域 PP_1O_1 和 QQ_1O_1 中的流动；再根据所解出的 P_1O_1 和 Q_1O_1 上的气流参数，求解区域 $O_1P_1O_2Q_1$ 中的流动。如此逐步解出 $Q_1O_2Q_2$，$P_1O_2P_2$，$P_2O_2Q_2O_n$，$P_2O_nP_n$，$Q_2O_nQ_n$，…，各区域中的流动。因此，从喷管喉部至出口的设计和计算可以归结为下列四种基元的边界条件问题。

1. 第一种边界条件问题

假设在(x,y)平面上已知任意一条曲线 AB (非特征线)上的气流参数(见图 13-10)，要求确定由曲线 AB 和自 A，B 发出的两族特征线所包围区域内所有点上的流动。

根据物理平面上已知曲线 AB 上 A，M_1，M_2，…，B 各点的速度，在速度平面上绘制得到对应各点 A'，M'_1，M'_2，…，B' 的位置。

速度平面上各点的特征线方向就是沿着通过 A'，M'_1，M'_2，…，B' 点已知的外摆线[由式(13-32)和(13-33)得到]的方向。即 M'_1 点的特征线方向分

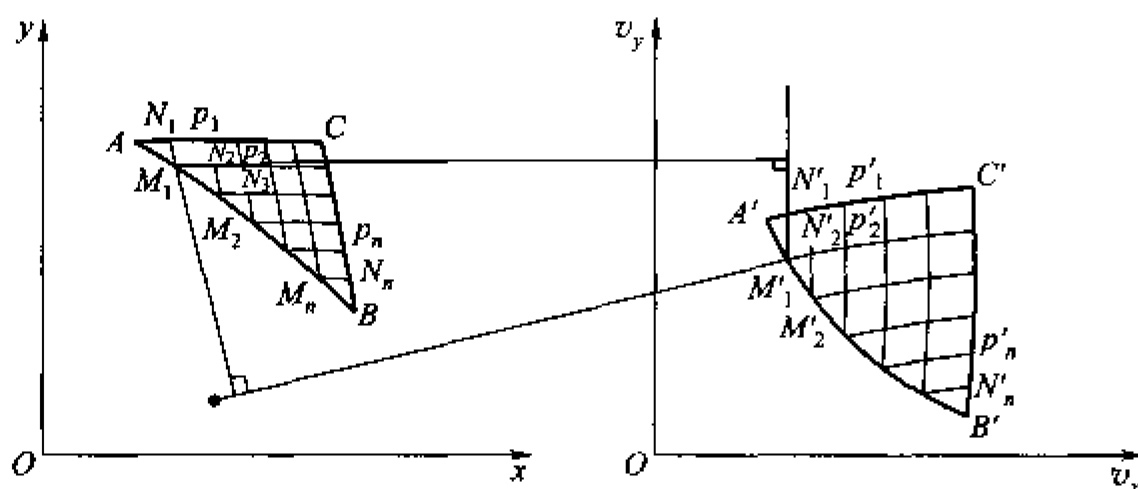


图 13-10

别是不同族外摆线 $M'_1N'_1$ 和 $M'_1N'_2$ 的方向。因此，根据物理平面上和速度平面上特征线间相互垂直的重要性质，就可以由速度平面上各点的特征线方向作图得到物理平面上对应 A，M_1，M_2，…，B 各点的特征线方向。

于是，就可以定出物理平面上 AB 曲线上各相邻点所作不同族特征线间的交点 N_1，N_2，…，N_n。例如 N_1 点就是 A 和 M_1 相邻两点上所作的不同族外摆线(与对应速度平面上对应点的特征线垂直)AN_1 和 M_1N_1 的交点，依此类推。

由于 $A'B'$ 上各点的外摆线都是已知的，因此其相邻各点所作的不同族外摆线的交点 N'_1，N'_2，…，N'_n，就是物理平面上 N_1，N_2，…，N_n 的对应点，它们在速度平面上的坐标值，就是 N_1，N_2，…，N_n 点的速度值。

通过上述图解步骤，我们求得了与 AB 曲线邻近的 N_1N_n 曲线上各点的速度，如果重复上述图解的过程，将又可以求得与 N_1N_n 曲线相邻的 P_1P_n 上各点速度及其它气流参数。可以看出，每计算一次，曲线上的格点就少了一个，因此，最终可以将由曲线 AB 和由 A、B 两点出发的两条不同族的特征线 AC 与 BC 所围成的△ABC 区域中的气流参数解出。显然，起始时 AB 曲线的点取得愈密，所得的结果也将愈为精确。

解出了上述△ABC 区域中稠密网点上的速度，就可作出流线，它是两族特征线间夹角的二等分线，然后根据伯努利方程求得压强。

2. 第二种边界条件问题

假设在物理平面上已知从 A 点出发的两条不同族的特征线 AB 和 AC (见图 13-11)，特征线上气流参数已知，要求确定特征线四边形 $ABDC$ 区域内的气流运动。

根据物理平面上特征线 AB 上 A，M_1，M_2，…，B 各点和特征线 AC 上 A，N_1，N_2，…，C 各点上的速度，绘出速度平面上对应的 A'，M'_1，M'_2，…，

B' 和 A'，N'_1，N'_2，…，C' 各点的位置，按照特征线的性质可知，这些点将分别处于过 A' 点的两条不同族的摆线上。

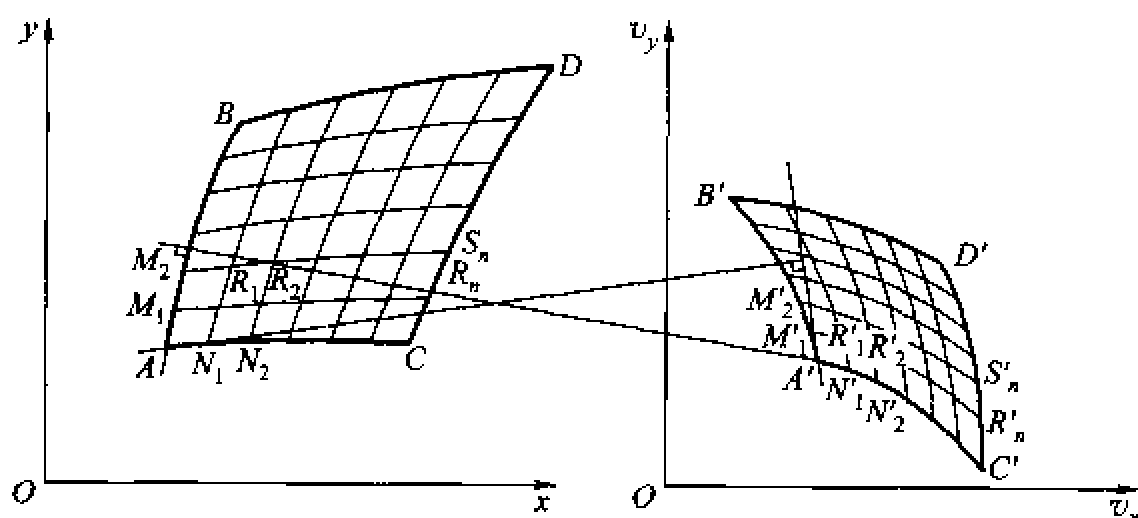


图　13－11

由于过 M_1 点的第二族特征线垂直于过 M'_1 点的第一族外摆线；过 N_1 点的第一族特征线垂直于过 N'_1 点的第二族外摆线，因此在物理平面上得到这两族特征线的交点 R_1。而与 R_1 对应的 R'_1 点的位置，就是过 M'_1 点的第二族摆线与过 N'_1 点的第一族摆线的交点。

然后，用同样的方法由 R_1 和 N_2 点的特征线确定 R_2，并由 R'_1 和 N'_2 点的外摆线确定 R'_2 点的位置。依次类推，可以得到特征线 M_1R_n 和与其对应的外摆线 $M'_1R'_n$。

根据速度平面上 M'_1，R'_1，…，R'_n 点的坐标值 v_x 和 v_y，确定物理平面上沿特征线对应各点 M_1，R_1，R_2，…，R_n 上的气流参数。

重复上述图解的过程，先后确定特征线 M_2S_n，…，BD，及其对应的外摆线 $M'_2S'_n$，…，$B'D'$，并最终解出区域 $ABDC$ 中的全部气流参数。

3. 第三种边界条件问题

假设在物理平面上已知某壁面形状 AC（见图 13－12），和从 A 点出发的第一族特征线 AB 上的气流参数，要求解出从 B 点出发的第二族特征线 BC，以及曲线三角形 ABC 内气流的参数。

根据已知的物理平面上特征线 AB 上 A，M_1，M_2，…，B 各点的速度，绘出速度平面上对应的外摆线 $A'B'$ 上 A'，M'_1，M'_2，…，B' 各点。

在 M'_1 点的位置已定的情况下，根据特征线的性质，作过 M_1 点的第二族特征线垂直于过 M'_1 点的第一族外摆线，与壁面 AC 交于 N_1 点。

由于 N_1 是在壁面上，该点速度与壁面相切。因此，在速度平面上，若作射线 OK，OK 的方向与 N_1 点处的速度方向一致，则由 M'_1 点作第二族摆线与

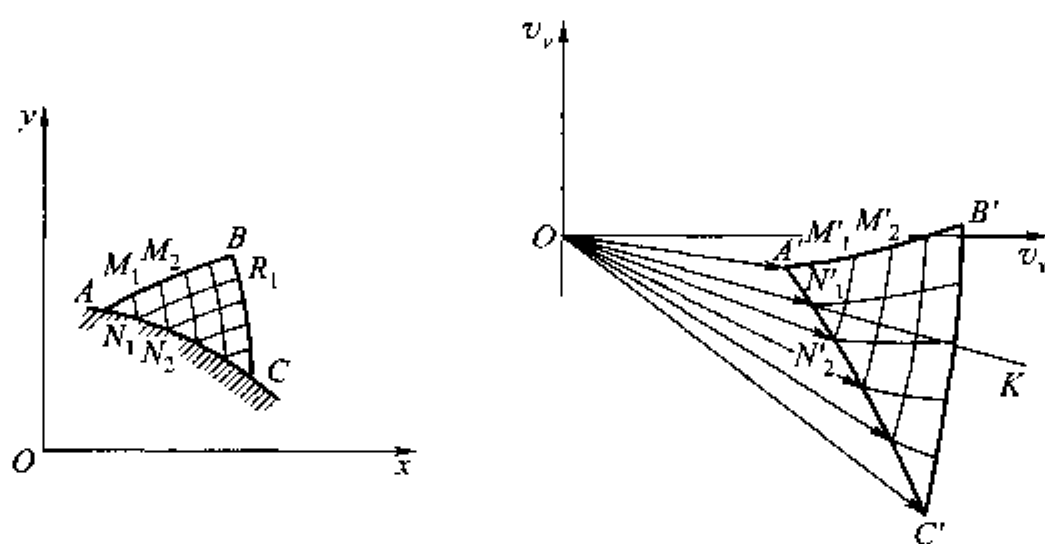


图 13-12

OK 的交点 N'_1 就是 N_1 的对应点。

速度平面上 N'_1 点的坐标值，就是对应点 N_1 处的气流速度。

然后在已知特征线 M_1N_1 和 M_1，M_2，…，B 上参数的情况下，用上述第二种边界条件问题的求解方法，可以确定区域 $M_1N_1R_1B$ 中的气流参数。

于是，问题又变为已知壁面形状 N_1C 和特征线 N_1R_1 的情况下，求解从 R_1 点出发的特征线 R_1C，以及曲线三角形 N_1R_1C 中的气流参数。重复上述的求解过程，就可以逐步解出区域 ABC 中的气流参数。

4. 第四种边界条件问题

已知物理平面上一条特征线 AB 及其上的速度，且 A 点位于自由面上(见图 13-13)，要求作出自由面的形状，即作出曲线 AC，并求解曲线三角形 ABC 中的气流参数。

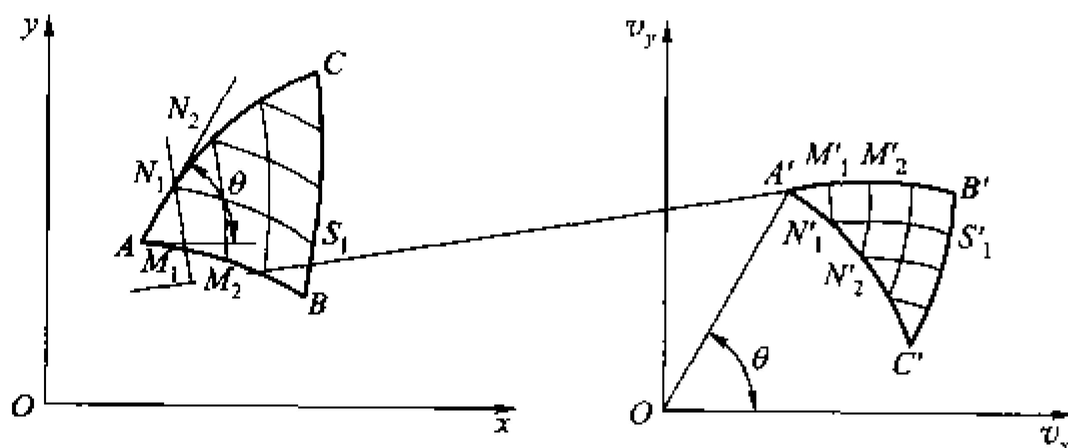


图 13-13

首先根据特征线 AB 及其上的速度，在速度平面上绘出与之对应的摆线 $A'B'$，以及对应点 M'_1，M'_2，…的位置。

虽然物理平面上自由面的形状 AC 未知，但沿自由面上的气流速度值应为常数(等于 A 点处的速度值 $\bar{v}$)。因此，速度平面上与自由面对应的曲线必然为一条以 $\bar{v}$ 为半径的圆弧 $\widehat{A'C'}$。

根据特征线的性质，速度平面上过 M'_1 点的第二族外摆线(与 $\widehat{A'C'}$ 交于 N'_1 点)与物理平面上过对应点 M_1 的第一族特征线相垂直，作图得到过 M_1 点的线段，同时过 A 点作平行于 ON'_1 的直线与过 M_1 点的第一族特征线交于 N_1 点，于是 AN_1 就是所要求的自由面的形状。

这样，在已知特征线 M_1N 和 M_1，M_2，…，B 的情况下，利用上述第二种边界问题的求解方法，可以确定 $M_1N_1S_1B$ 区域上的气流参数。

求出了特征线 N_1S_1 上的参数，且 N_1 是自由面上的点，问题又回复到了初始的情况。重复上述过程，最终将曲线三角形 ABC 中的气流参数全部解出。

在上述解算四种边界条件问题的基础上，可以解算任何平面定常无激波的超声速流场问题。图 13-14 所示管道中及其出口外的流动，若已经给定了非特征线的 AB 线上各点的流动参数(M_{cr}, θ)，则解第一边值问题，就可以确定三角形 ABC 区域内的流动；而在已知 AC 和 BC 特征线上流动参数的情况下，且当已知固体边壁 AD 和 BE 时，解第三边值问题，可以分别确定曲线三角形 ACD 和 BCE 区域内的流动；然后在已知 CD 和 CE 特征线上流动参数的情况下，解第二边值问题，可以确定 $CDEF$ 区域内的流动；再从已知 DF 和 EF 特征线上各点流动参数出发，在管道外周边压强已知和自由面的边界条件的配合下，解第四边值问题，就可以确定 DFG 和 EFH 区域内的流动。按上述方法继续求解下去，可以将整个流场内的流动情况确定下来。

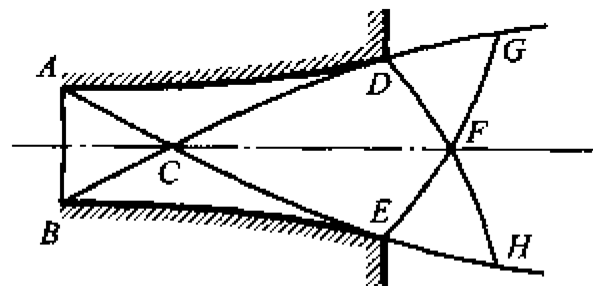


图 13-14

§13-6 激波及其形成

当超声速气流通过马赫波时，一般有两种情况，一种是气流的膨胀问题，气流通过膨胀波时，速度连续地增加，而压强则连续地减小，这时扰动源是一个低压源；另一种是气流的压缩问题，气流通过强压缩波时，气流参数将发生显著的突跃变化，气流的压强、密度和温度在一个面上发生突跃的升高，而速度出现突跃式的降低，这种扰动源是一个高压源，使流动参数发生突跃式变化

的扰动压缩波称为激波。例如当超声速气流流过障碍物(超声速飞行的炮弹、火箭、飞机等)时，气流在障碍物前受到急剧压缩，压强密度和温度突然显著增加，气流中就产生激波，激波是超声速气流中经常出现的重要物理现象。

气流通过激波的压缩过程，实际上是在一个很短的距离内完成的，由于在很短的距离内实现一个很强的压缩，所以气体的粘性和热传导对激波有十分重大的影响。而在无粘性又不导热的理想气体中，激波成为一种数学上的间断面，激波的厚度等于零。在实际气体中，必须考虑粘性和热传导对激波的影响。由于粘性的存在，激波中必然出现一个极薄的过渡区，在这区域中气流参数发生较大的连续的变化。对激波进行的理论和实验研究得出，激波的厚度与激波前的气流马赫数有很大关系，被压缩前的气流马赫数越高，激波的厚度就越薄。但一般说来，激波的厚度与气体分子的平均自由行程($\approx 10^{-5}$ mm)同一数量级，这一厚度很薄，因此从工程实际应用角度看，可以不考虑这一压缩过程所占的空间距离，也就是将它处理为一个面，把激波看作是一个不连续的间断面。

激波常分为三种类型，一种是正激波，气流来流方向与激波面垂直，气流经过正激波被压缩时只有速度大小的变化而不改变流动的方向(见图 13 - 15a)；第二种是斜激波，激波面与气流来流方向不垂直，气流经过激波面被压缩时不仅速度大小变化，而且方向也发生突跃改变(见图 13 - 15b)；第三种称为脱体激波(见图 13 - 15c)。

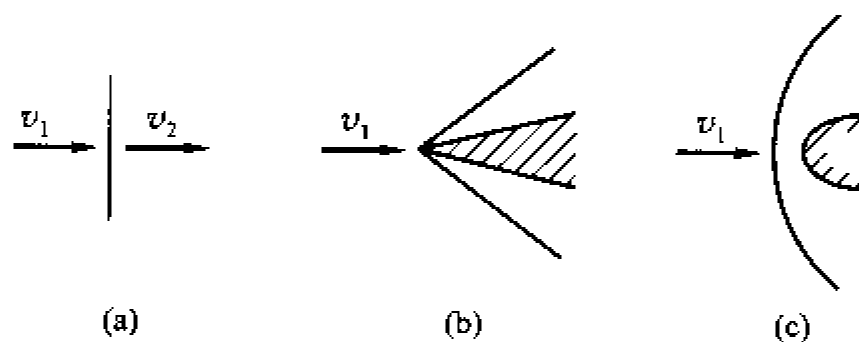


图 13 - 15

下面说明斜激波的形成过程。假设均匀的超声速气流以速度 v_1 平行于壁面 OA 作定常流动，在 A 点有一内凹的微小折转角 $\mathrm{d}\delta$ (见图 13 - 16)，壁面在 A 点将对气流产生一微弱扰动波 AB，气流流经 AB 后向上折转 $\mathrm{d}\delta$ 角平行于 AC 壁面，这时气流的截面积减小，气流受到压缩，流速略有降低，而压强、密度和温度略有增加，因此 AB 称为微弱压缩波。AB 波的马赫角为

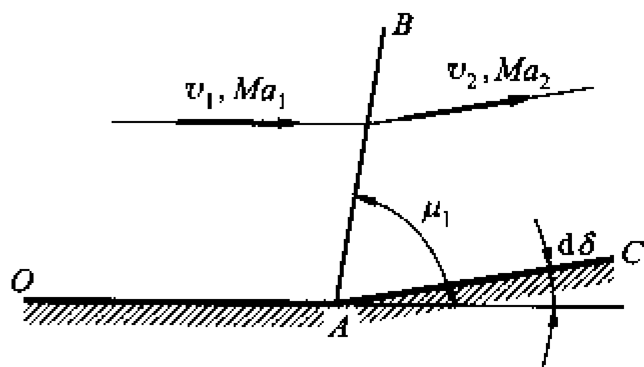


图 13 - 16

$$\mu_1 = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_1}\right)$$

当超声速气流流过凹曲面时，通道面积逐渐减小，速度逐渐减小。实际上若有很多个微小凹钝角的折面，当折面数目趋近于无穷多个时，就变成了凹曲面。因此我们先研究超声速气流流过多个微小凹钝角折面的情况。

设超声速气流流过凹折面 $ABCDE$，如图 13 - 17 所示。从 A 点起在每个折点处都向上折转一微小角度 $d\delta$。壁面折点 A 对气流产生一个扰动压缩波 AA_1，气流穿过 AA_1 波后，速度略有降低，流动方向向上折转 $d\delta$ 角，气流变成平行于 AB 壁面。同理在 B 点处也产生一微弱压缩波 BA_1。因为 $Ma_1 > Ma_2$，所以 BA_1 波的马赫角 μ_2 大于 AA_1 波的马赫角 μ_1，这样两波相交于 A_1，相交后 AA_1 波和 BA_1 波合并成 A_1B_1 波，其强度大于 AA_1 波和 BB_1 波。随后，在壁面的折转点处依次产生许多条微弱压缩波，依次相交合成形成一条折线形的波 $A_1B_1C_1D_1E_1$。当在一段壁面上折转点无限增多而折转角极小时，就变成图 13 - 18 中的凹曲面，气流沿整个凹曲面流动，产生无穷多的马赫线，这些马赫线相交叠加，形成一个强烈扰动的间断曲面(强压缩波)，这个强间断面就是激波。气流经过这个间断面时，流动参数将发生突跃地变化，气流速度突跃地减小，方向突变，面压强、密度和温度则发生突跃地增大。

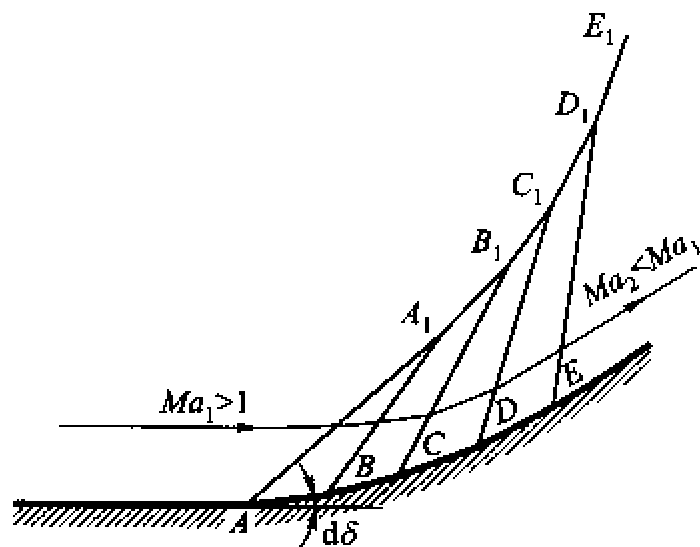


图　13 - 17

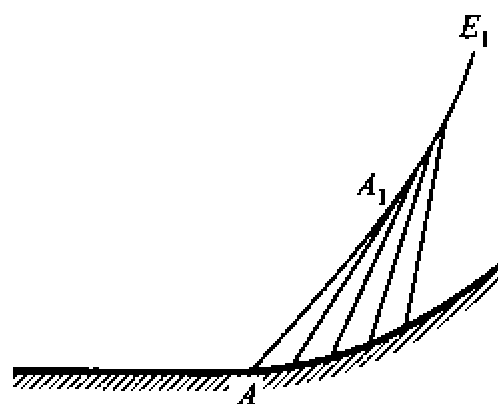


图　13 - 18

如果我们类似于膨胀波的讨论，将图 13 - 17 中的凹折面中各折点和微小折转角集中于 A 点，集中一次折转一个有限角 δ（见图 13 - 19），则同样可以认为在 A 点产生无穷多条马赫线，这些马赫线重合叠加在一起，形成一个强间断面 AB，这个间断面就是斜激波，它与来流方向成 β 角，称为斜激波角。气流经过斜激波时，速度大小突跃减小，方向平行于折转后的壁面 AC，压强、温度和密度等参数突跃地增大。

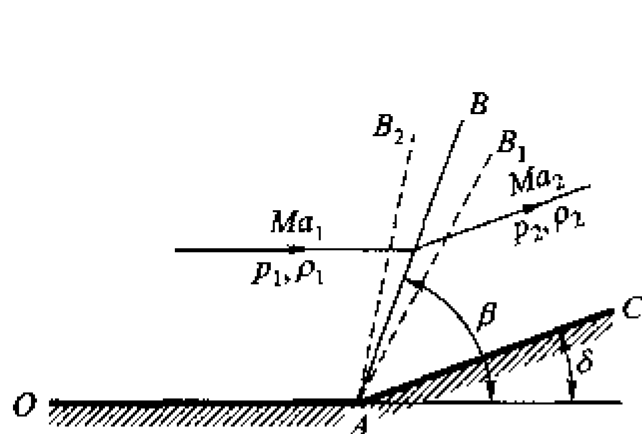


图 13-19

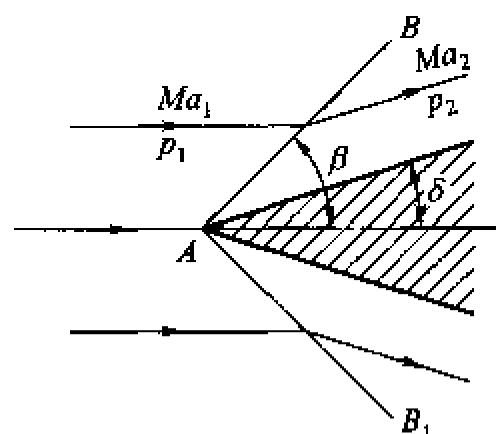


图 13-20

当超声速气流流过楔形物体时，在物体的尖端将产生两条斜激波，斜激波后的气流方向平行于楔形物体的壁面，如图 13-20 所示。

下面我们以直圆管中一系列微弱压缩波的传播情形来说明正激波（推进激波）形成的物理过程。

如图 13-21 所示，假设直圆管在活塞右侧是无限延伸的，初始时，活塞和管中气体均为静止状态。活塞向右突然作加速运动，在一段时间内由静止状

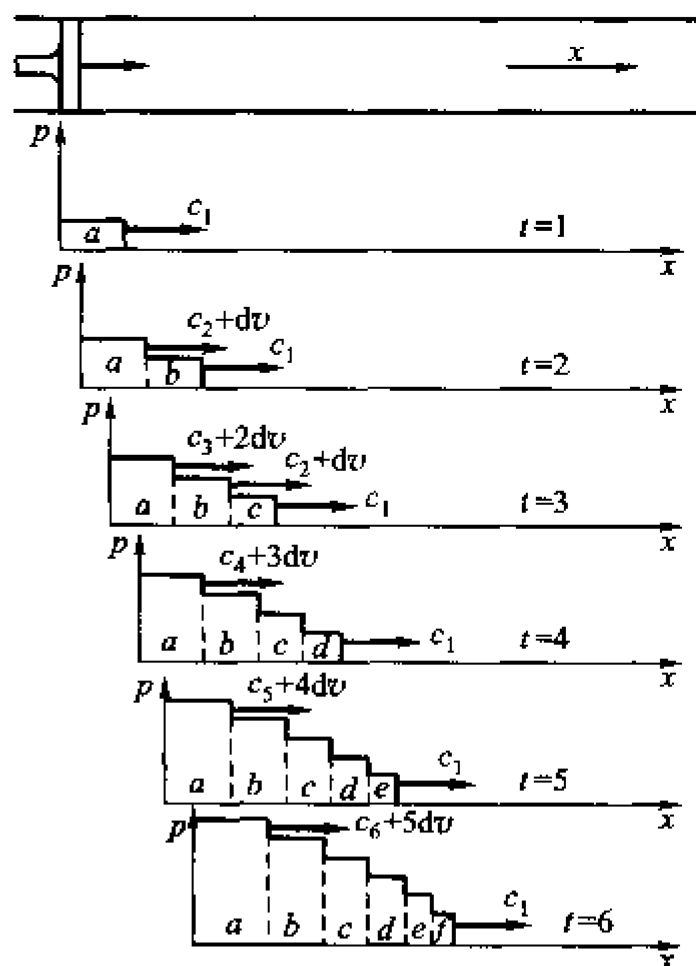


图 13-21

态加速到 v，然后作等速运动。假设将活塞从静止到 v 的加速所需时间分成许多相等的时间间隔，并以每个时间间隔中瞬时微小加速之和近似代替活塞从 $0 \rightarrow v$ 的突然加速，且在每两个微小加速之间活塞作等速运动。在活塞作第一次瞬时的微小加速($0 \rightarrow dv$)时，使紧靠活塞的气体 a 的压强增加微量 dp，第一个微弱压缩波以声速 c_1 向右传播，气体 a 则以活塞的速度 dv 向右运动。在 $t=1$ 和 $t=2$ 之间，由于活塞作第二次瞬时微小加速，就在第一个微弱压缩波后的气流中产生第二个微弱压缩波，以速度 c_2+dv 向右传播，使气体 a 的压强和速度再增加一个微量($dp \rightarrow 2dp, dv \rightarrow 2dv$)。这时第一个微弱压缩波已传播到气体 b，使其压强增加 dp，并以声速 c_1 继续向右传播。然后活塞又作第三、第四、……瞬时微小加速(一直加速到 v 为止)，活塞的逐次加速都要产生新的微弱压缩波，且都以当地声速相对于它所通过的气流向右传播。由于靠近活塞的气体受压缩最严重，压强和温度也愈高，且由于压缩过程是等熵的，所以这部分气体中的当地声速也愈大，即 $c_6 > c_5 > \cdots > c_2 > c_1$。因此，靠近活塞的微弱压缩波的传播速度，即 $c_6+v > \cdots > c_2+2dv > c_1+dv$，比较靠近活塞处的压缩波，力图追上那些远离活塞处的压缩波。于是，随着时间的推移，后面的波逐个地追上前面的波，使压缩波叠加，压力分布曲线不断改变形状，波的形状变得愈来愈陡，最后压强梯度变成无穷大，形成一个垂直的压缩波(见图13－22)，这就是正激波。因此，正激波是由许多微弱压缩波叠加而成的、有一定强度的、以超声速传播的压缩波，它以大于声速的某一等速向右传播。

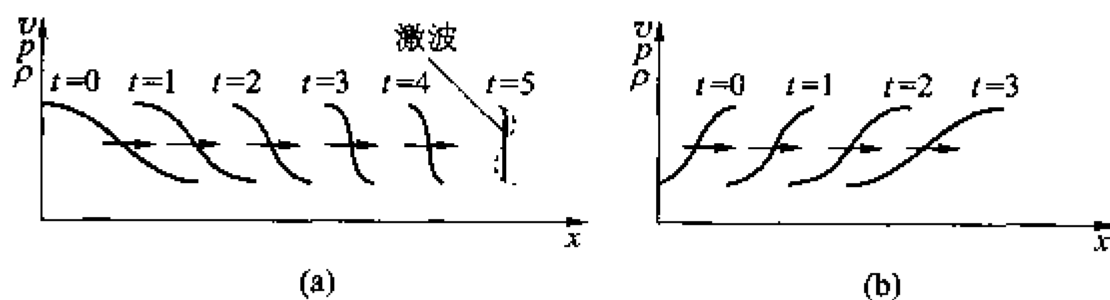


图　13－22

从图 13－22a 还可以看到，在接近激波形成时，不能再按等熵分析而忽略粘性和导热效应的作用，否则将出现虚线所示的逆曲波形，它意味着在同一瞬时和同一位置处，流体同时有三个不同的压强、速度和密度值。这在物理上显然是不合理的，因此只有粘性和热效应发生作用，形成激波。

如果令活塞向左加速运动，将出现图 13－22b 所示的微弱膨胀波向右传播，由于活塞的运动使气体膨胀和温度降低，先产生的波比后产生的波传播得快，波面之间距离拉大，变得越来越平坦，因而不能形成激波。

§13-7 正激波前后气流参数间的关系

上一节我们对激波类型及其形成的物理过程作了分析，本节将定量地分析气流穿过激波时流动参数的变化。气流经过激波时要受到激烈的压缩，由于压缩过程十分迅速，所以我们假定是理想完全气体作绝热流动。

气流在圆管中的推进是非定常流动。为研究方便，在激波作等速运动时，可以将坐标系取在激波上，这样相对于该坐标系激波不动，气流作定常运动。

超声速气流通过激波面时发生突然压缩，气流速度突然由 v_1 降为 v_2，压强、密度和温度则突然由 p_1，ρ_1 和 T_1 增至 p_2，ρ_2 和 T_2。如图 13-23 所示，在激波面两侧取控制体 $ABCDA$，AB 和 CD 平行于波面，并设波前的气流参数为已知，我们利用气体运动的基本方程来求得激波前后气流参数间的关系。

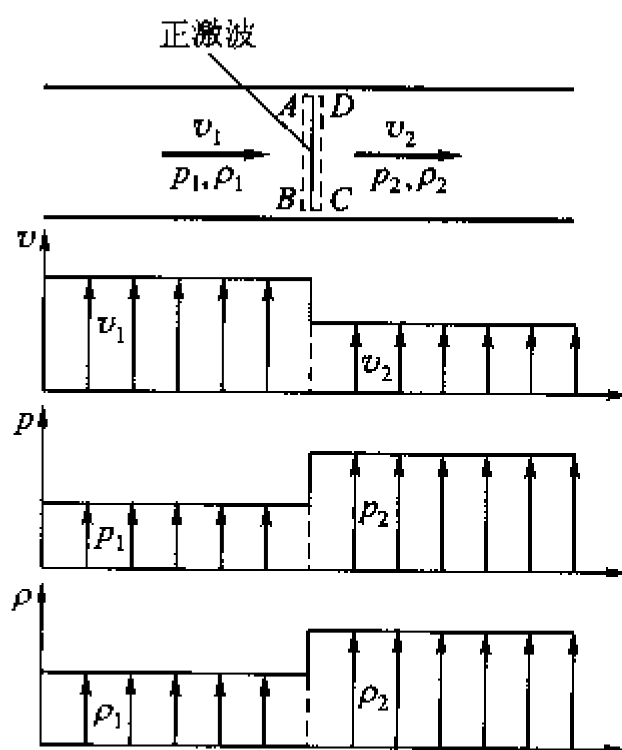


图 13-23

对于截面不变的圆管，激波前后的基本方程为

(1) 连续方程

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{13-34}$$

(2) 动量方程

$$\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2 = p_2 - p_1$$

或

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \tag{13-35}$$

(3) 能量方程

气流通过激波是绝热压缩过程，所以对完全气体，激波前后的总能量保持不变，即

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^2}{2}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\cdot\frac{c_{cr}^2}{2}=\text{常数} \tag{13-36}$$

(4) 状态方程

对于激波前后完全气体的绝热压缩，有

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1}=\frac{p_2}{\rho_2 T_2} \tag{13-37}$$

(5) 普朗特方程

由能量方程式(13－36)可以得到

$$p_1=\rho_1\frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_{cr}^2-v_1^2\right)$$

$$p_2=\rho_2\frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_{cr}^2-v_2^2\right)$$

将所得到的 p_1 和 p_2 的关系式代入动量方程式(13－35)，有

$$\rho_1\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_{cr}^2-v_1^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}v_1^2\right)=\rho_2\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_{cr}^2-v_2^2+\frac{2\gamma}{\gamma-1}v_2^2\right)$$

再将连续方程式(13－34)代入上式，经简化后得

$$c_{cr}^2\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right)=v_2(v_2-v_1)$$

最后得到

$$v_1 v_2=c_{cr}^2 \tag{13-38}$$

这就是普朗特关系式。写成无因次形式有

$$M_{cr1}\cdot M_{cr2}=1 \tag{13-39}$$

由式(13－38)显然可见，超声速气流通过正激波后一定变成亚声速气流，即当 $v_1>c_{cr}$时，正激波后的速度 v_2 必然是亚声速的，而激波前的速度 v_1 越大，激波后的速度 v_2 就越小，这是正激波的一个重要物理特性。

将式(13－38)两边同除以 v_1^2，有

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{c_{cr}^2}{v_1^2}=\frac{1}{M_{cr1}^2}$$

再将式(12－31)代入上式得

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{1}{M_{cr1}^2}=\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{(\gamma+1)Ma_1^2}=\frac{2}{(\gamma+1)Ma_1^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{13-40}$$

由连续方程式(13－34)得

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{(\gamma+1)Ma_1^2}{2+(\gamma-1)Ma_1^2}=\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}Ma_1^2}{\frac{2}{\gamma-1}+Ma_1^2} \tag{13-41}$$

由动量方程式(13－35)和连续方程式(13－34)得

$$p_2-p_1=\rho_1 v_1^2\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)$$

将式(13-40)代入上式，并由声速公式(12-6)可得

$$p_2 - p_1 = \gamma p_1\left[\frac{2\,(Ma_1^2 - 1)}{\gamma + 1}\right]$$

于是

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(Ma_1^2 - 1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{13-42}$$

利用状态方程式，可以导出温度比的关系式。状态方程式为

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

将式(13-41)和式(13-42)代入上式，得

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_1^2\ \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right)}{\frac{\gamma+1}{2}Ma_1^2}$$

$$= \left[\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{(\gamma+1)Ma_1^2}\right]\left[\frac{2\gamma Ma_1^2-(\gamma-1)}{\gamma+1}\right] = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \tag{13-43}$$

利用绝热定常流动的特点和式(13-40)与式(13-43)，同样可以导出激波前后马赫数之间的关系。

$$\frac{Ma_2^2}{Ma_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{Ma_1^2}\cdot\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{2\gamma Ma_1^2-(\gamma-1)} \tag{13-44}$$

上述式(13-40)~式(13-44)表示了正激波前后气流各对应参数之比，它们都是等熵指数 γ 和波前马赫数的函数，所以当已知波前的气流参数时，可以从这些公式求得波后的各气流参数。

§13-8 斜激波前后气流参数间的关系

如图13-24所示，超声速气流流过凹钝角时引起斜激波。图中壁面折转角为 δ，脚标1和2分别表示波前和波后，n和t则分别表示速度与激波面垂直和平行的分量，β 是激波角。激波前的气流参数为 v_1，p_1，ρ_1 和 T_1，激波后的气流参数为 v_2，p_2，ρ_2 和 T_2。这里将激波前后的气流速度分别分解为与波面垂直的分速度 v_{1n}和 v_{2n}，及与波面平行的分速度 v_{1t}和 v_{2t}。

在波面两侧取控制体，可以写出气流通过激波时的基本方程。

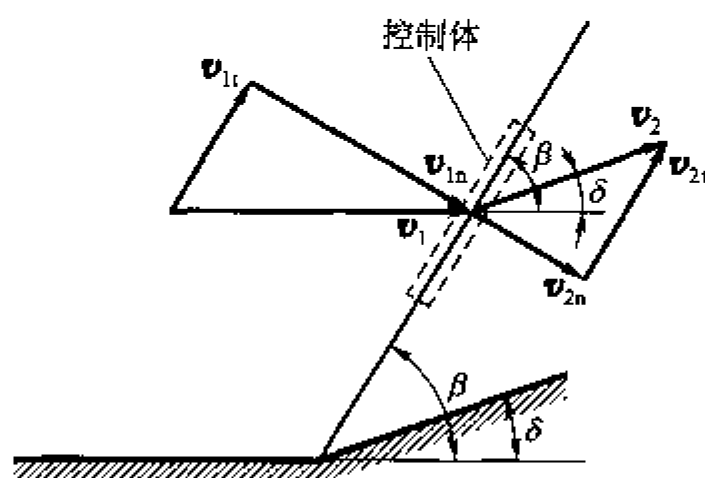


图　13 - 24

通过激波面的流量只与垂直波面的分速度有关，因此连续方程为

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} \tag{13-45}$$

垂直于波面方向的动量方程

$$p_1 - p_2 = \rho_2 v_{2n}^2 - \rho_1 v_{1n}^2$$

或

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2 \tag{13-46}$$

因为 $p_2 > p_1$，所以由上式可知，经过斜激波后气流法向速度必然减小。由于沿波面方向压强没有变化，所以沿平行于波面方向上的动量方程为

$$\rho_1 v_{1n} v_{1t} - \rho_2 v_{2n} v_{2t} = 0$$

所以

$$v_{1t} = v_{2t} = v_t \tag{13-47}$$

由上述可知，气流通过斜激波时只有法向分速度发生变化，而切向分速度没有变化。因此，斜激波可以看作为相当于法向分速度的正激波与切向分速度的叠加。于是，前面所得到的正激波的有关方程可应用于斜激波，并由此求出斜激波前后各气流参数间的关系。

因为

$$v_{1n} = v_1 \sin\beta$$

于是

$$\frac{v_{1n}}{c_1} = \frac{v_1 \sin\beta}{c_1} = Ma_1 \sin\beta = Ma_{1n}$$

将 Ma_{1n}代入正激波前后气流参数的关系式(13 - 40) ~ (13 - 43)，得到斜激波前后气流相应参数之比

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = \frac{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2 \sin^2\beta}{(\gamma + 1) Ma_1^2 \sin^2\beta} = \frac{2}{(\gamma + 1) Ma_1^2 \sin^2\beta} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{13-48}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma - 1) Ma_1^2 \sin^2\beta}{2 + (\gamma - 1) Ma_1^2 \sin^2\beta} = \frac{\dfrac{\gamma + 1}{\gamma - 1} Ma_1^2 \sin^2\beta}{\dfrac{2}{\gamma - 1} + Ma_1^2 \sin^2\beta} \tag{13-49}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_1^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{13-50}$$

由上式可见，当斜激波前的参数给定时，斜激波后的压强随激波角的增大而增大。

$$\frac{T_2}{T_1}=\left[\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2\sin^2\beta}{(\gamma+1)Ma_1^2\sin^2\beta}\right]\left[\frac{2\gamma Ma_1^2\sin^2\beta-(\gamma-1)}{\gamma+1}\right]$$
$$=\frac{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}Ma_1^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\sin^2\beta\right)}{\frac{\gamma+1}{2}Ma_1^2\sin^2\beta} \tag{13-51}$$

同样，由于$\frac{v_{2n}}{c_2}=\frac{v_2\sin(\beta-\delta)}{c_2}=Ma_2\sin(\beta-\delta)$，则由式(13-44)得

$$Ma_2^2\sin^2(\beta-\delta)=\frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2\sin^2\beta}{2\gamma Ma_1^2\sin^2\beta-(\gamma-1)} \tag{13-52}$$

根据上式，若气流的 Ma_1 给定，对于斜激波而言，当激波角 β 增大时，波后的马赫数 Ma_2 降低。但当 β 较小时，波后马赫数 Ma_2 仍然可以大于 1，即斜激波后的气流仍然可以为超声速流。

显然，只有在激波角 β 和 Ma_1 已知的情况下，才能利用上述斜激波的公式进行计算。但对于由壁面折转引起的斜激波，通常只已知波前的气流参数和气流通过激波时的折转角，激波角并不知道。因此我们推导气流折转角 δ 与 β 和 Ma_1 间的关系式，以使能方便地计算任意情况下产生的激波。

由图 13-24 中的几何关系有

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}}=\frac{v_{2t}\tan(\beta-\delta)}{v_{1t}\tan\beta}=\frac{\tan(\beta-\delta)}{\tan\beta}$$

将上式代入式(13-48)得

$$\frac{\tan(\beta-\delta)}{\tan\beta}=\frac{2}{(\gamma+1)}\frac{1}{Ma_1^2\sin^2\beta}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\sin^2\beta\right)$$

经整理得到

$$\tan\delta=\cot\beta\frac{Ma_1^2\sin^2\beta-1}{1+Ma_1^2\left(\frac{\gamma+1}{2}-\sin^2\beta\right)} \tag{13-53}$$

式(13-53)表明，气流经过斜激波时的折转角 δ 与波前马赫数 Ma_1 有关。对应于不同的 Ma_1 ($\gamma=1.4$)下，δ 随 β 的变化关系曲线表示在图 13-25 中。

从对式(13-53)和对图中曲线的分析，可以得到斜激波的一些特征：

(1) 在下面两种情况下，气流的折转角 δ 等于零。

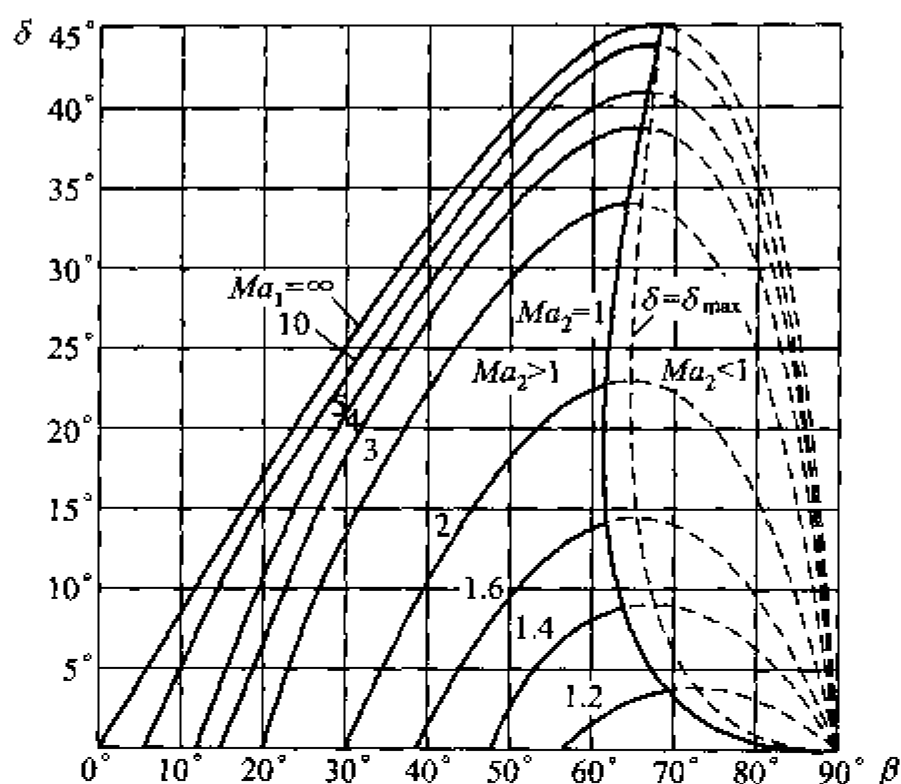


图　13 - 25

(a) 当 $Ma_1^2\sin^2\beta-1=0$ 时，即 $\sin\beta=\dfrac{1}{Ma_1}=\sin\mu$，斜激波角等于马赫角，激波退化为微弱扰动波。

(b) 当 $\cot\beta=0$ 时，即 $\beta=\dfrac{\pi}{2}$，这是正激波的情况。

(2) 对应于每一个给定的 Ma_1，折转角都有一个极大值 δ_{max}，这是超声速气流通过斜激波时所能折转的最大角度。

(3) 对于任一给定的 Ma_1，当 $\delta<\delta_{max}$时，每一个折转角 δ 都对应着两个激波角 β 值，大 β 角对应的是强激波，而小 β 角对应的是弱激波。

(4) 超声速气流流过楔形物体，当半楔角 δ 较小时，从它的尖端产生两条斜激波(如图 13 - 20 所示)，激波后的气流速度还是超声速。但随着 δ 角的逐渐增加至某一值时，气流速度变为亚声速，这可以从图 13 - 25 上见到，图中有一条 $Ma_2=1$ 的曲线，曲线左面波后流速为亚声速，曲线左面部分波后流速为超声速，而且 $Ma_2=1$ 的曲线和 δ_{max} 的曲线非常接近，因此，对于任意超声速来流，当波后速度 $Ma_2=1$ 时，气流折转角达到最大值 δ_{max}。对于每一个 Ma_1 数，当 $\delta>\delta_{max}$时，这相当于式(13 - 53)无解。实际上，这时激波离开了楔形物体，斜激波已经变成曲线形的脱体激波(见图

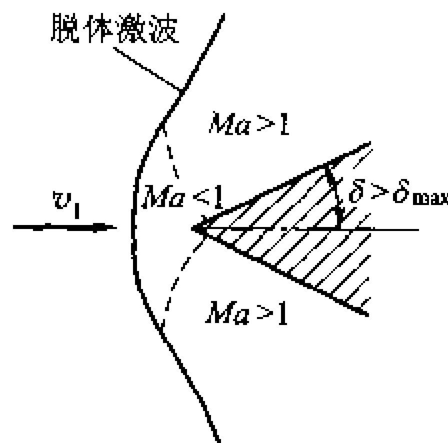


图　13 - 26

13-26)。这种情况下，波面的中间部分垂直于气流方向，形成正激波，因此在脱体激波与楔形物体之间出现一亚声速区，显然，气流通过激波时压强突跃地增大，随 δ 角增大到 $\delta > \delta_{max}$ 时，激波后面的压强增大将导致激波向前推移，形成脱体激波。

对于头部为圆钝形的物体，实际上由于 δ 角的增大，超声速气流流过该类物体时将产生脱体激波(见图 13-27)，因此，对于超声速进气的叶片，其头部应做成尖角形，而不能做成亚声速气流下的圆钝形头部，否则，将会产生脱体激波引起很大的不可逆激波损失。

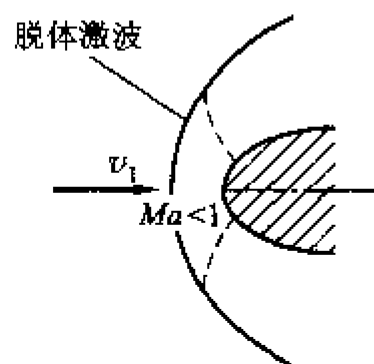


图 13-27

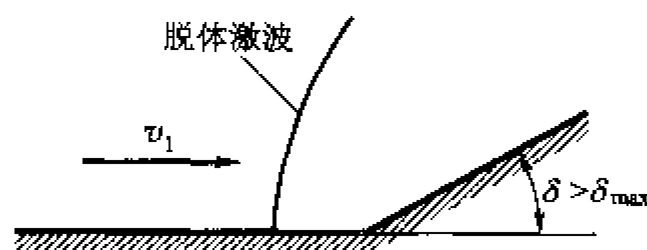


图 13-28

同样，超声速气流流过凹钝角(当 $\delta > \delta_{max}$ 时)也会产生脱体激波(见图 13-28)。

§13-9 突跃压缩与等熵压缩的比较(兰金-雨贡纽关系式)

本节主要研究超声速气流通过激波时熵的变化。

对于完全气体的等熵过程，压强、密度和温度间的关系为

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma} \tag{13-54}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{13-55}$$

对于激波的突跃压缩过程，由式(13-49)有

$$Ma_1^2 \sin^2\beta = \frac{\rho_2/\rho_1}{\left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

将上式代入式(13-50)，经整理后得到

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_2}{\rho_1}-1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{13-56}$$

式(13 - 56)称为兰金 - 雨贡纽(Rankine - Hugoniot)关系式。从这一关系式可见，压强比与密度比之间的关系和激波角无关，这表明，超声速气流在绝热条件下产生不连续变化时，无论是正激波还是斜激波，只要密度变化(密度比)相同，对应的压强比也就相同。

利用激波前后的气体状态方程和式(13 - 56)，得到激波前后气体的温度比为

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-\frac{\rho_1}{\rho_2}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}-\frac{\rho_2}{\rho_1}} \tag{13-57}$$

或

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_2}{p_1}+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_2}{p_1}+1} \tag{13-58}$$

由式(13 - 56)，式(13 - 57)和式(13 - 58)可以明显地看到，通过激波的突跃式压缩，其压强、密度和温度的变化与等熵压缩过程的相应变化有较大差别。图 13 - 29 a 给出了式(13 - 56)的变化曲线，图 13 - 29 b 给出了式(13 - 58)的变化曲线。由图中可以看到，在同一压强比下，突跃压缩的密度比低于等熵压缩的密度比，而温度比则较高。当压强比 $p_2/p_1\to\infty$ 时，突跃压缩曲线有一渐近线，得到

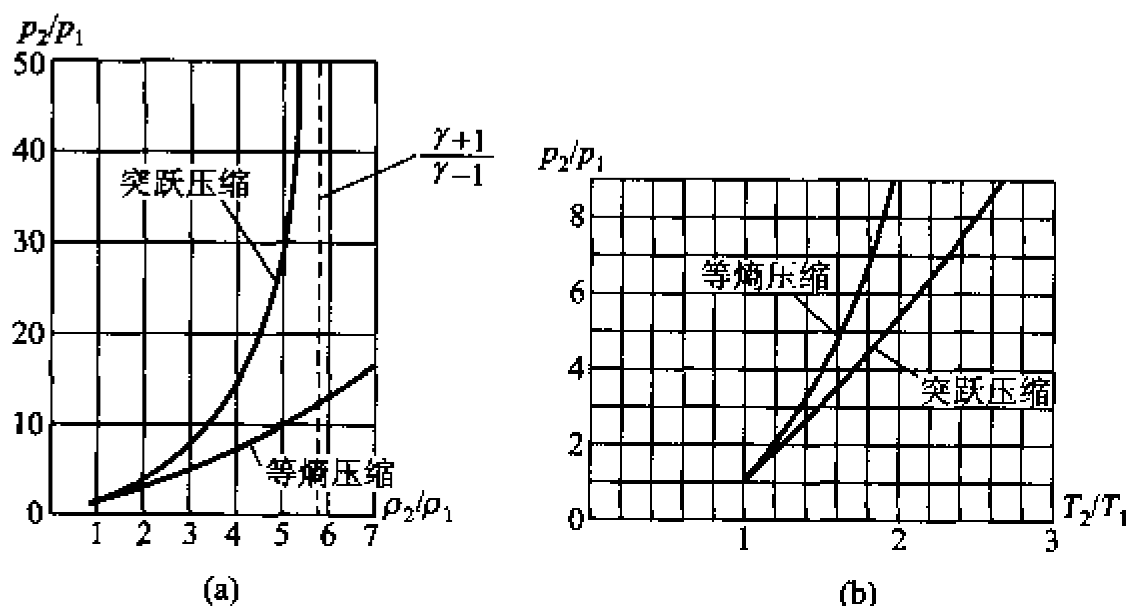


图　13 - 29

$$\lim_{Ma_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

这说明，超声速气流通过激波时，密度的增加不可能超过 $\gamma + 1/(\gamma - 1)$ 倍。如对于空气 $\gamma = 1.4$，其密度的增加不可能超过 6 倍。实际上，气流通过激波时，部份动能不可逆地变为热能，由于气流温度升高而使密度减小了，从而使密度增大受到了限制。突跃压缩是一个不可逆的绝热过程，是一个增熵过程。

在不可逆绝热过程中熵的增加，意味着过程中工质做功能力的降低，存在着可用能量的损失。即一部分能量不可逆地转变为热能，使熵增加。

这种由于激波而引起的可用能量的减小又称为激波损失。实际上，当超声速气流绕流物体时，将产生激波，引起熵的增加，速度降低，动量减小。若取一个包括物体在内而又远离物体的控制体，由于产生激波前的控制面上速度大于激波后控制面上的平均速度，出现激波后气流动量减小，这意味着必有作用在气流上而与来流方向相反的力，或者对于引起激波的物体面言，必然受到与物体运动方向相反而与来流方向相同的反作用力，称为阻力。因为这一阻力的产生是由激波引起的，所以称为波阻。波阻的大小取决于激波的强度，激波越强，激波损失或波阻也越大。

§ 13 – 10　激波的相交与反射

前面我们已经讨论了超声速气流沿不同形状的固体壁面(凹面或凸面)流动时产生马赫波(膨胀波或微弱压缩波)或激波的问题，研究了气流通过这些单向波时速度和参数的变化及其计算方法。但是在工程实际问题中，所遇到的波系计算并不都是单向的左伸波或右伸波，特别是在流道内部流动中，单向波会在固体壁面或自由边界面(两不同流体的界面)发生反射，形成反射波，发生两波相交，互相作用，引起气流速度和参数的变化。

1. 同侧激波的相交

图 13 – 30 中给出了超声速气流沿壁面先后两次折转流动，产生了同向折转的两条斜激波 AC 和 BC 相交的情况。气流经过第一条激波 AC 后折转 δ_1 角，经过第二条激波 BC 后共折转 $\delta_1 + \delta_2$ 角。在 A 点和 B 点产生的两条斜激波相交于 C 点，在 C 点以后合为一道较强的斜激波 CD。在 C 点以下，气流由①区域经激波 AC 减速($Ma_2 < Ma_1$)后进入②区域，然后再经过 BC 激波减速($Ma_3 < Ma_2$)后进入③区域，压强升高为 p_3。在 C 点上面，气流经过激波 CD 后进

入⑤区域，气流压强升高为 p_5，方向折转了 δ 角。在 C 点上下侧的气流，在激波后应当具有相同的流动方向和相等的压强，但通常 $\delta \neq \delta_1 + \delta_2$，$p_5 \neq p_3$，因而常诱发反射波 CE，以达到④，⑤区的压强相等，流向一致。在一般情况下，或者根据 Ma_1 和 $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 的条件得出的⑤区域内的压强不等于 p_3（p_3 是根据 Ma_1 和 δ_1 以及 δ_2 确定的）；或者改变 CD 激波的强度使 p_5 等于 p_3，这时⑤区域将不能得到平行于③区域中的气流方向。这一矛盾的情况表明，在⑤区域和③区域之间还应该存在一个①区域，即在激波 AC 和 BC 相交之后，不仅是两道激波在交点 C 合并成一条强激波 CD，在 C 点同时还将发生一组弱压缩波(或弱膨胀波 CE,使得④区域中的流动方向和压强 p_4,均与⑤区域中相同。但流速一般都不相等,因此汇合一起形成流向一致但流速不等的滑流线 CH,这是速度不连续线。一般称 CE 波为激波 AC 和 BC 在相交点 C 的反射波。由于反射波 CE 比较弱,因此当激波 AC 和 BC 不是很强时,为了简单起见,计算中可以忽略反射波。

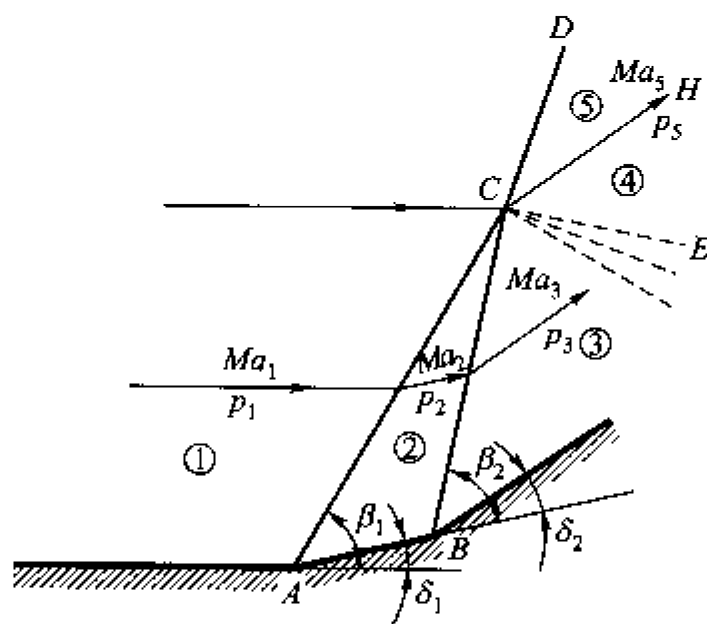


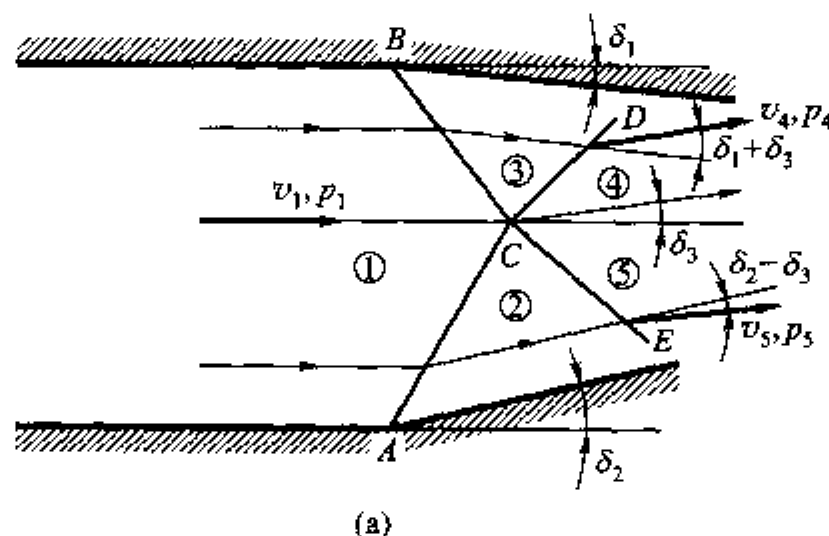
图 13 - 30

2. 平面管道两侧激波的相交

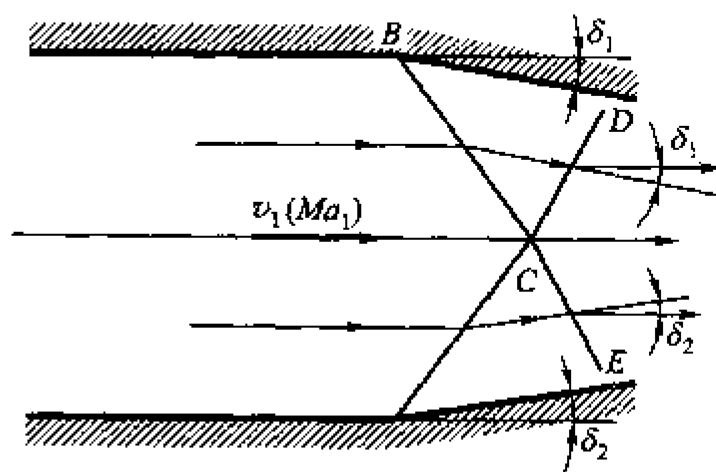
如图 13 - 31a 所示,超声速气流在平面管道的两对壁分别折转 $-\delta_1$ 和 δ_2 角,产生异向折转的两条斜激波 AC 和 BC 在 C 点相交,气流经过这两条斜激波,折转角分别为 $-\delta_1$ 和 δ_2。由于经过 AC 波和 BC 波的两部分气流在 C 点相互干扰的结果,在 C 点又产生斜激波 CD 和 CE。经过激波 CD 和 CE 的两部分气流应具有相同的流动方向和相等的压强,即在④区域和⑤区域中应有 v_4 平行于 v_5,$p_4 = p_5$。但两区域交汇处流速不相等,交汇处是速度的滑移线,称为滑流线。若经过 C 点的气流折转 δ_3 角,则经过激波 CD 的气流折转了 $\delta_1 + \delta_3$ 角,而经过

激波 CE 的气流折转了 $\delta_2-\delta_3$ 角。只有当 $\delta_1=\delta_2$ 时，才不会产生滑流线。

根据①区域的已知气流参数和折转角 $-\delta_1$ 和 δ_2，可以求得②区域和③区域中的气流参数。然后根据②区域的气流参数、给定不同的 δ_3，按折转角 $\delta_1+\delta_3$ 求得④区域中与之对应的压强 p_4；同时根据③区域的气流参数，按折转角 $\delta_2-\delta_3$ 求得⑤区域中与之相对应的压强 p_5。显然，与 $p_4=p_5$ 对应的 δ_3 就是所要求的 δ_3。δ_3 确定之后，就很容易确定④和⑤区域中的速度。



(a)



(b)

图 13-31

如果 $-\delta_1=\delta_2$，这时产生的激波形状对称，则 $\delta_3=0$，④区域和⑤区域具有相同的气流参数，其图形如图 13-31b 所示。

如图 13-32a 所示，超声速气流从缩放喷管流入背压为 p_2' 的气体中，而 p_2' 高于喷管的出口压力，则在喷管的出口边缘 A 和 B 上产生两条相同的斜激波，相交于管道中心线上，气流经激波 AC 和 BC 后各向内折转 δ 角。显然，在②区域和③区域内的压强为 p_2'。气流经过激波 CD 和 CE 后各向外折转 δ 角，使气流与中心线平行，④区域内的压强升高为，$p_4>p_2'$。

向内折转角 δ 的大小与喷管出口背压 p_2' 有关。对某一给定的 Ma_1，随 p_2' 不断提高，与之对应的折转角也不断增加，当 $\delta>\delta_{max}$ 时，在 A 和 B 处产生的两

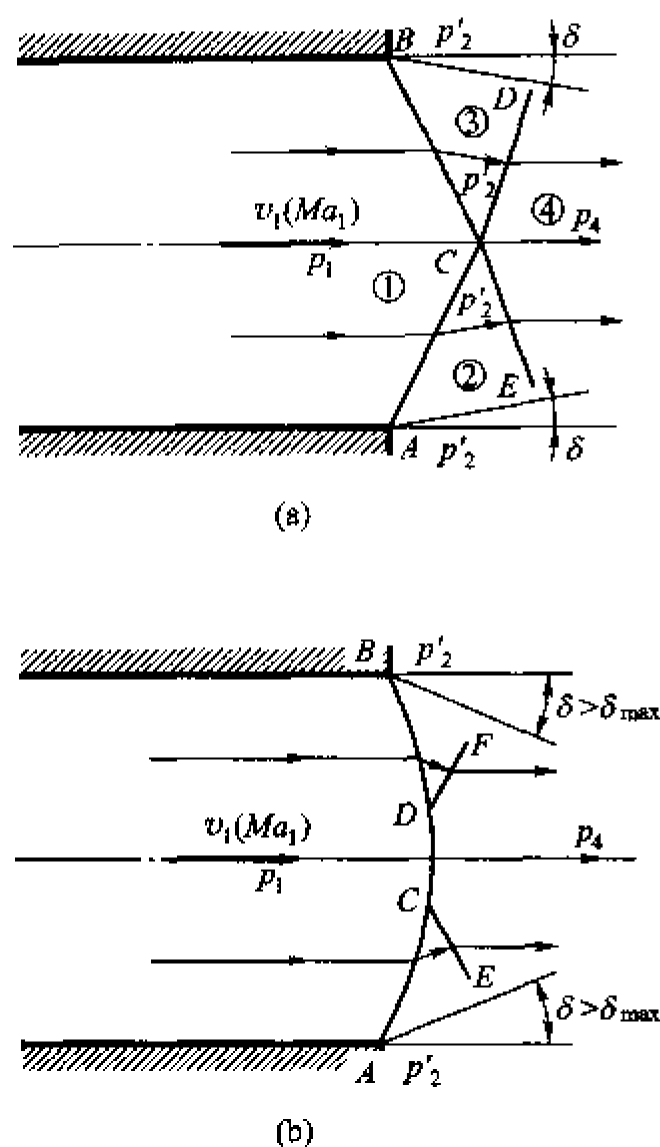


图 13 - 32

条斜激波，其中间部位变成曲线激波，成为拱桥形，且在 C 和 D 处产生两条斜激波 CE 和 DF（见图 13 - 32b），压强 p_4 大于 p'_2。

3. 激波在固体平壁上的反射

如图 13 - 33 所示，超声速气流在平面管道中流动。由于下壁面 A 点处向内折转 δ 角，在 A 点产生一斜激波，这一斜激波落在上壁面的 B 点处。如果上壁面在 B 点处向外折转 δ 角，则激波到达 B 点后不会产生反射波，气流穿过激波后将不再受到扰动而平行于壁面流动。

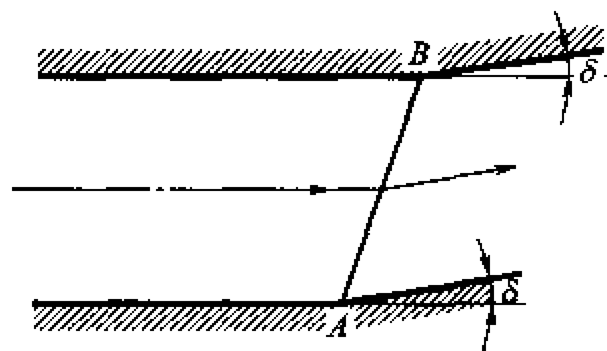


图 13 - 33

如果管道的上部是平直壁面（见图 13 - 34），则 A 点处产生的斜激波 AB，使气流通过 AB 后向上折转 δ 角与 AC 平行。但是上部是平直壁面，接近固体壁面处的气流应当平行于壁面，因此对于斜激波 AB

后面的气流而言，必须再向下折转 δ 角，这相当于在上壁面 B 点处遇到一向下折转 δ 角的壁面，产生一道新的斜激波 BF（若 AB 波后气流 $Ma_2>1$），气流通过 BF 后，向下折转 δ 角，重新与上壁面平行。由于 BF 斜激波是因斜激波 AB 的存在而产生的，且 BF 波产生在 AB 波与上壁面的交会处 B 点，BF 波相当于是 AB 波在壁面 B 点处的反射波。

但是应当指出，气流经过 AB 波和 BF 波时，虽然折转角都等于 δ，但由于 AB 波和 BF 波前的气流马赫数不同，所以两条斜激波的激波角 β 不相等。

当壁面折转角 $\delta>\delta_{max}$ 时，AC 为斜激波，而反射激波 BC 为曲线激波（见图 13-35）。因为在 B 处反射激波后的气流不可能折转这么大的角度，因此 B 点的反射激波成为与壁面垂直的正激波，在正激波 BC 后的气流是亚声速流。但气流通过激波 AC 和 BC 之后Ⅱ区和Ⅲ区的压强不等，因此在 C 点将发出一条激波 CD，使Ⅱ区的气流再通过 CD 减速提高压强后进入Ⅲ区，使之压强与Ⅲ区相同，而气流的速度不同，因此过 C 点的流线 CE 是一条不连续的滑流线，这条线的两侧压强相等，但速度、密度和温度都不相等，上述这种不规则的激波反射称为马赫反射。

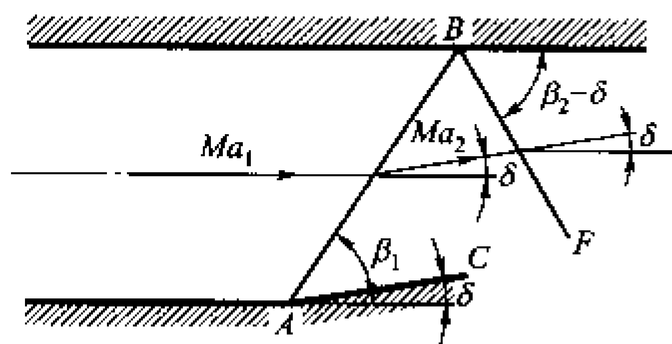


图 13-34

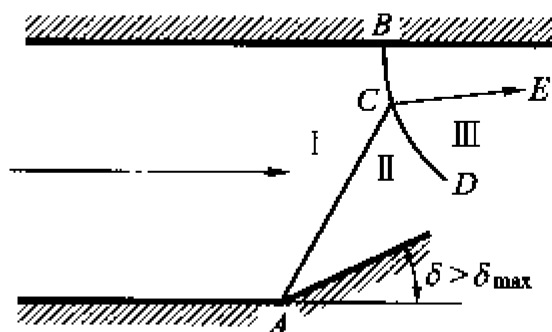


图 13-35

4. 激波在自由边界上的反射

如图 13-36 所示为一超声速气流从平面管道出流到静止的大气中，管道的下壁面 A 点处向上折转 δ 角，因而在 A 点产生一条斜激波 AB，与自由边界交于 B 点。激波 AB 前气流的压强 p_1 等于背压 p_b，气流经激波后压强升高为 p_2，并向上折转 δ 角。自由边界上的气流经过 B 点后，压强也升高为 p_2，因而气流在自由边界 B 点处受到外界低压 p_b 的扰动，必然产生一束膨胀波，这就是斜激波在自

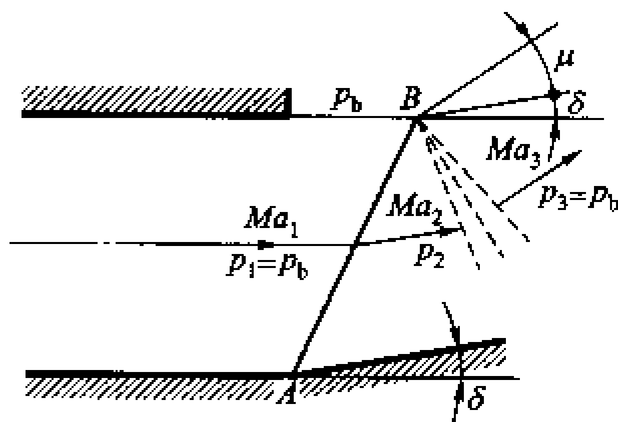


图 13-36

由边界上的反射波。气流通过这一膨胀波组后，压强又由 p_2 降到 p_b，使之满足自由边界的条件，流动方向则继续偏转 μ 角，因此经膨胀波后，气流方向与气流原方向成 $\delta+\mu$ 角。

由于经膨胀波后气流的压强等于背压 p_b，因此根据膨胀前气流的速度 Ma_2 和膨胀波前后的压强比 p_2/p_b，可以计算出膨胀波后的偏转角 μ 和气流其它参数。

§ 13－11　缩放喷管在变工况下的流动分析

在设计工况下设计得到的喷管，工作中喷管前后的气流参数将随外界负荷的变化而改变，本节将讨论工况变动情况下喷管中气流参数和流量的变化情况。

假设理想气体在喷管中作无摩擦绝热流动。如图 13－37 所示，在设计工况下，气流在缩放喷管中将按压强变化曲线 AOB 工作。设喷管进口压强为 p_1，出口处压强为 p_2。入口的亚声速气流在收缩管中随截面积减小，不断降压、加速，在喷管喉部的最小截面处气流达到声速，然后在渐扩管中气流继续膨胀加速达到超声速，压强不断降低，直至出口截面处压强降为设计压强 p_2。

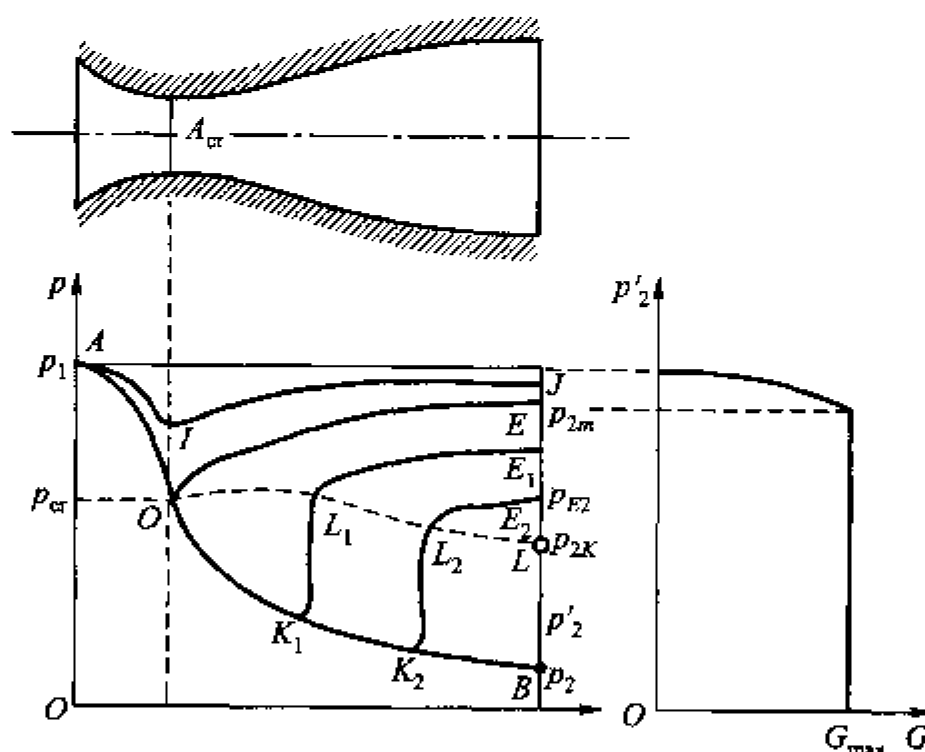


图　13－37

这里讨论在进口压强保持不变的情况下，背压变化为不同值时的四种流动情况。

(1) $p'_2 < p_2$，出口背压 p'_2 低于设计工况下的出口压强 p_2。当超声速气流从出口截面流入低压空间时，喷管出口边缘 C 和 D 处将突然降压膨胀，产生两簇膨胀波组，气流经过膨胀波组后向外折转 δ 角(如图 13－38a 所示)。由于超声速气流在 C 和 D 处产生的微弱扰动波不可能逆流向上传播，因此喷管的出口截面上仍保持设计工况压强 p_2，气流在整个喷管内仍按 AOB 曲线降压膨胀。这种喷管的设计出口压强 p_2 高于背压 p'_2 的情况，通常称为气流的膨胀不足。

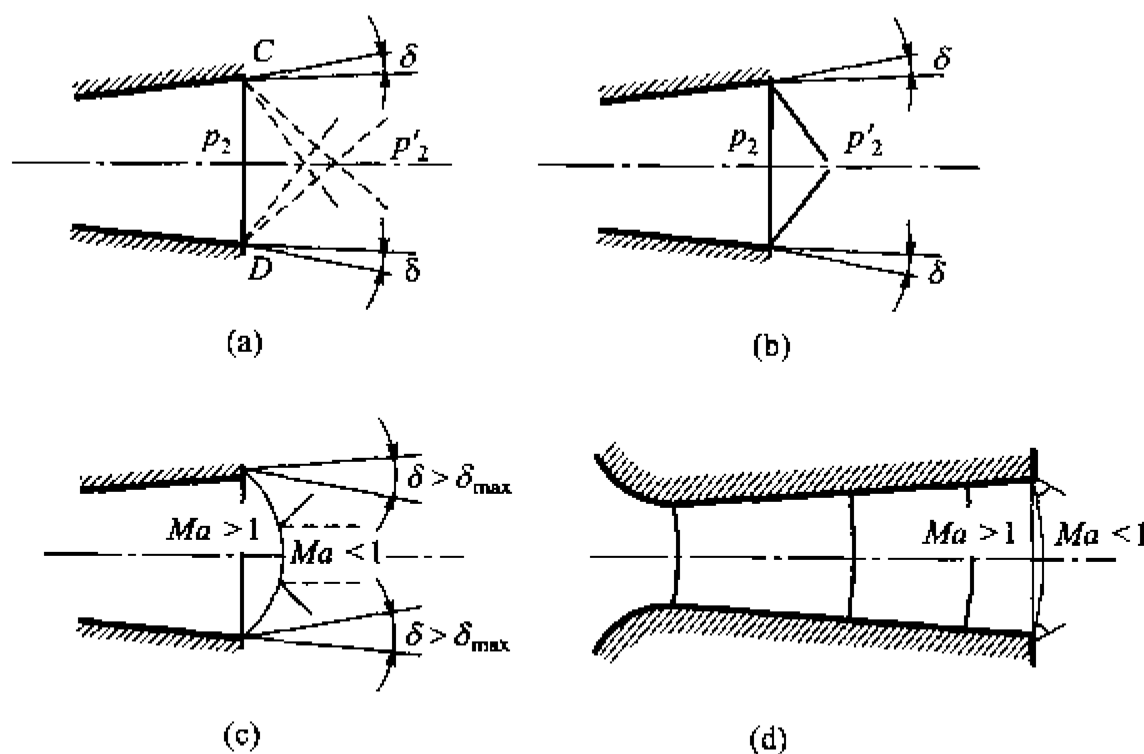


图 13－38

(2) $p_2 < p'_2 < p_{2k}$，背压 p'_2 高于设计工况下的出口压强 p_2，而低于在出口截面处形成正激波时的背压 p_{2k}。如图 13－38 b 所示，当背压 p'_2 略高于 p_2 时，超声速气流在出口受到压缩，在出口边缘 C 和 D 处形成两条斜激波。气流经过斜激波后速度降低，压强升高，气流向内折转 δ 角。当背压 p'_2 继续升高时，对超声速气流的压缩逐渐加剧，气流的折转角也随之逐渐增大，当背压升高至 $p'_2 \geqslant p_{2k}$时，出现折转角 $\delta > \delta_{max}$，于是在出口处形成拱桥形激波系(如图 13－38c 所示)。当 $p'_2 > p_{2k}$面继续升高时，拱桥形激波系将逐渐靠近出口截面，而当 $p'_2 = p_{2k}$时，在喷管出口截面处形成正激波。在所有上述情况下，超声速气流在 C 和 D 处产生的压缩扰动波不能逆流向上传播，因此喷管中气流的降压膨胀仍按 AOB 曲线进行。

(3) $p_{2k} < p'_2 < p_{2m}$，即背压 p'_2 高于在出口截面形成正激波的背压 p_{2k}，但低于激波逆流向上传播到喷管喉部的出口压力 p_{2m}。

当背压高于 p_{2k}时，为了适应正激波后背压的升高，正激波就要向喷管内

移动(见图 13 - 38d)。正激波越向前移，激波前气流的速度 M_1 逐渐减小，于是激波强度减弱。气流经过正激波后变为亚声速流，在渐扩管中亚声速流将逐渐减速，压强逐渐升高到出口处的背压(p_{E2})，喷管中气流的压强按图 13 - 37 中 $AOK_2L_2E_2$ 变化。这种喷管的设计出口压强低于出口背压 p'_2 的情况，从物理上说是气流在喷管中膨胀已经过度了，称为气流的膨胀过度，激波的内移实际上是减弱这种过度的膨胀。当背压继续升高时，激波向喷管内移逐渐靠近喉部，激波强度进一步减弱。当背压达到 p_{2m}时，激波移到了喷管的喉部，因为气流 $M_1 = 1$，所以激波消失了，气流参数达到了临界值。又由于喷管出口背压高于喉部的压强，所以气流在渐扩管中逐渐减速增压，直至达到出口背压 p_{2m}，气流在整个渐扩管中为亚声速流，喷管中气流压强按图 13 - 37 中曲线 AOE 变化。

(4) $p_{2m} < p'_2 < p_1$，即背压 p'_2 高于激波内移到喷管喉部时的出口压强 p_{2m}，而低于设计工况下的进口压强 p_1。这种条件下，气流在渐缩管中增速减压，在喉部速度达到最大值(小于声速)，而压强达到最小值(高于临界压强)。气流在渐扩管中则逐渐减速增压，这时缩放管的作用完全等同于文丘里管，喷管中气流压强按图 13 - 37 中 AIJ 曲线变化。

当 $p'_2 = p_1$ 时，气体将完全停止流动。

通过喷管的流量如图 13 - 37 中的右面曲线所示。在 $p'_2 < p_{2m}$的情况下，无论背压 p'_2 怎样变化，由于喷管喉部的临界参数不变，所以喷管中气体流量保持不变。而当 $p'_2 > p_{2m}$时，流量将减小，当 $p'_2 = p_1$ 时，流量减为零。

例　题

例 13 - 1　已知有一均匀空气来流 $Ma_1 = 2$，绕外钝角折转 10°。求气流膨胀后的马赫数。

解　因为气流绕外钝角的折转角为正，因此膨胀波为右伸波。由式(13 - 19)有

$$\delta(M_{cr2}) = \theta_2 - \theta_1 + \delta(M_{cr1})$$

已知 $\mu_2 - \mu_1 = 10°$，且根据 $Ma_1 = 2$，查有关书籍中平面超声速气流绕外钝角膨胀气流函数表($\gamma = 1.4$)，有 $\delta(M_{cr1}) = 26°$。代入上式得

$$\delta(M_{cr2}) = 10° + 26° = 36°$$

再由 $\delta(M_{cr2})$查表得到气流膨胀后 $Ma_2 = 2.36$。

例 13 - 2　已知空气流中正激波前的压强 $p_1 = 80\ N/m^2$，$t_1 = 10℃$，$v_1 = 500\ m/s$，空气 $\gamma = 1.4$，试求激波后的气流参数 v_2、p_2、ρ_2 和 t_2。

解 激波前的声速、马赫数和密度分别为

$$c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 337 \text{ m/s}$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_1} = 1.48$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 9.9 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

激波后的气流参数分别由式(13-40)、式(13-41)和式(13-42)求得

$$v_2 = v_1 \left[\frac{2}{(\gamma+1)Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] = 273 \text{ m/s}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{v_1}{v_2} = 1.81 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) = 189 \text{ N/m}^2$$

$$t_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R_2} - T_1 = 80 \ ℃$$

例 13-3 已知有一空气流以 $Ma_1 = 2.0$ 流过一折转角 $\delta = 10°40'$ 的凹钝角，空气的 $\gamma = 1.4$。求激波前后各参数比值和 Ma_2。

解 应用图 13-25 的曲线可以查得当 $Ma_1 = 2.0$，$\delta = 10°40'$ 时，有 $\beta = 40°$。

因为斜激波相当于法向分速的正激波，因此可以应用有关书籍手册中的正激波表来求气流在激波前后各参数的比值。

$$Ma_{1n} = Ma_1 \sin\beta = 1.286$$

在 $Ma_{1n} = 1.286$ 情况下，查正激波表得各参数比值为

$$\frac{p_2}{p_1} = 1.765, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1.489, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1.181$$

$$Ma_{2n} = 0.793$$

所以

$$Ma_2 = \frac{Ma_{2n}}{\sin(\beta - \delta)} = 1.617$$

习 题

13-1 气流经过膨胀波束的流动过程在什么情况下可看作为等熵过程？绕外凸壁和内凹壁面的流动各有什么特点？两者有何不同？

13-2 超声气流的压缩流动是否就是超声气流膨胀流动的逆反问题，为什么？激波与微弱压缩波有什么区别？

13-3 试利用正激波的关系式转换导出斜激波关系式。

13-4　有一气流 $v_1 = 1.2c_{cr}$，现绕某外钝角加速，得到 $v_2 = 1.5c_{cr}$，求气流向外折转多少度？若有一条流线原来距壁面为 d，问折转后距壁面多少？

13-5　已知一超声速气流 $v_1 = 500\ \text{m/s}$，$T_1 = 300\ \text{K}$、$p_1 = 1\times10^5\ \text{Pa}$，现绕外钝角折转 15°，试求折转后气流的速度、压强和温度。

13-6　已知一超声速气流 $Ma_1 = 2.3$、气流压强 $p_1 = 1.2\times10^5\ \text{Pa}$，温度 $t_1 = 30\ ℃$，$\gamma = 1.4$，现绕 150°的凸钝角流动。试求下游气流的压强、温度、马赫数和折转角。

13-7　已知正激波后气流参数为 $p_2 = 360\ \text{kN/m}^2$（绝对），$v_2 = 210\ \text{m/s}$，$t_2 = 50\ ℃$。试求激波前气流的马赫数。

13-8　空气流在管道中产生正激波，已知激波前 $Ma_1 = 2.5$，压强 $p_1 = 30\ \text{kN/m}^2$（绝对），$t_1 = 25\ ℃$。试求激波后的 Ma_2、p_2、t_2 和 v_2。

13-9　已知一超声速气流（$\gamma = 1.4$）以 v_1 流过 $2\delta = 20°$的尖楔，在楔形物的顶点处产生斜激波，测得激波角 $\beta = 50°$，激波前的滞止温度 $T_0 = 288\ \text{K}$。求激波前的马赫数 Ma_1 和速度 v_1。

13-10　上题中若 $\delta = 10°$，来流 $Ma_1 = 2.5$，压强 $p_1 = 0.85\times10^5\text{N/m}^2$，温度 $t_1 = 25\ ℃$。求激波角 β 和激波后的 Ma_2、p_2 和 t_2。

13-11　已知一超声速直匀流在管子出口处 $Ma_1 = 2.0$，$p_1 = 2\times10^5\ \text{Pa}$，气流出流进入压强 $p_b = 1\times10^5\ \text{Pa}$ 的空气中。试求管口处射流边界流线的外折角。

13-12　若利用尖楔形探测头来估定超声速风洞的气流马赫数：

(a) 设采用 10°楔角的尖楔，从纹影照片得出激波面的总夹角为 98°，试求风洞气流的马赫数。

(b) 按这样的方式采用 10°探测头可作为马赫数指示器的最小马赫数是多大？

第14章

流体要素测量

随着计算机技术的发展，数值计算方法已广泛应用于流体流动问题的解算。对于无粘流动，及在低速、恒定，分离区不大的情况下，数值计算结果已与实验结果相当吻合，因此甚至可以用数值计算代替实验。但是，对于大量粘性流体的流动问题，对于很多边界条件复杂的大型工程问题，特别是对于不规则的非恒定流动，高速的可压缩紊流流动等，虽然在各种前提假设条件下，不少流动已经可以用数值方法求解，但其计算结果必须由实验验证。而上述流动问题中至今仍有一些无法建立完善的数学模型加以描述，只能依靠模型和实物的反复实验，不断修正才能得到最终的满意结果。因此，当今在涉及流体力学的工程实际问题的研究、发展和应用中，实验研究几乎是必不可少的，而这些问题的大量实验研究与设备运行的监视，乃至如航天飞机飞行姿态的校正等，关键都在于流体压强、速度和流量等流体要素的测量。

通常通过各种测量仪表实现流体要素的测量，而被测量的大小、测定的部位，需要的量测精度以及测量的实时性要求，决定着应当选用的测量仪表和方法。本章将主要介绍压强、流速和流量测量的基本原理，测量的方法，测量的仪表及其使用特点。

§14-1 压强的测量

在进行流体力学研究和涉及流体力学的工程实际应用中，压强的测量技术是流体要素测量的基础，用皮托管测速和用某些阻尼器测量流量参数，通常都通过压强测量的转换来实现。

压强通常不能直接显示，必须将它变换为位移、角位移、力或各种电量参数进行测量。压强的测量有压强感受、传输和指示三部分组成。在常规测量中，压强感受常用测压孔和各种形状的压强探针，感受到的压强通过各种液体测压

管或金属压力表指示被测的压强。在测量动态压强时常采用压力传感器,将所感受到的动态压强转换为电信号输入相应的仪表指示或输入计算机实时打印输出。显然,测量的精度主要取决于压强感受和压强指示两个环节的误差大小。

一、静压的测量

无论流体处于静止状态，或对于流动的流体，当用固定壁面开孔感受压强或用对流场干扰很小的探针周壁小孔感受到的流体压强都可称为流场中某点的静压。

通常认为，只要壁面上开设的静压孔足够小，孔的轴线垂直壁面，孔的边缘没有毛刺或凹凸不平，静压孔中感受到的就是测点上流体压强的真实值。面当孔的边缘处有毛刺或凹凸不平时，将会产生局部旋涡，使测量值不准确。在对静压孔周围的流动情况进行深入研究分析后得到，静压孔内外流体的相互影响，引起了测量结果产生误差。

壁面没有开设测压孔时，近壁处是很薄的边界层，壁面处流速为零。这时沿壁面法线方向上没有压强梯度，各点的压强等于边界层外边界上的压强，这时，因为流体的粘性，在法线方向上存在速度梯度而使流体对壁面作用有切应力，壁面处流速为零。

当壁面开设静压孔后，在粘性切应力作用下，静压孔内流体产生流动，近孔处的流线向孔内稍许弯曲，影响到边界层内法线方向的静压不再保持不变，并导致静压孔内感受出的压强偏离流体中静压的真实值。其偏差的程度主要决定于静压孔的几何参数和加工情况。图 14－1 给出了孔径和流速对静压测量的

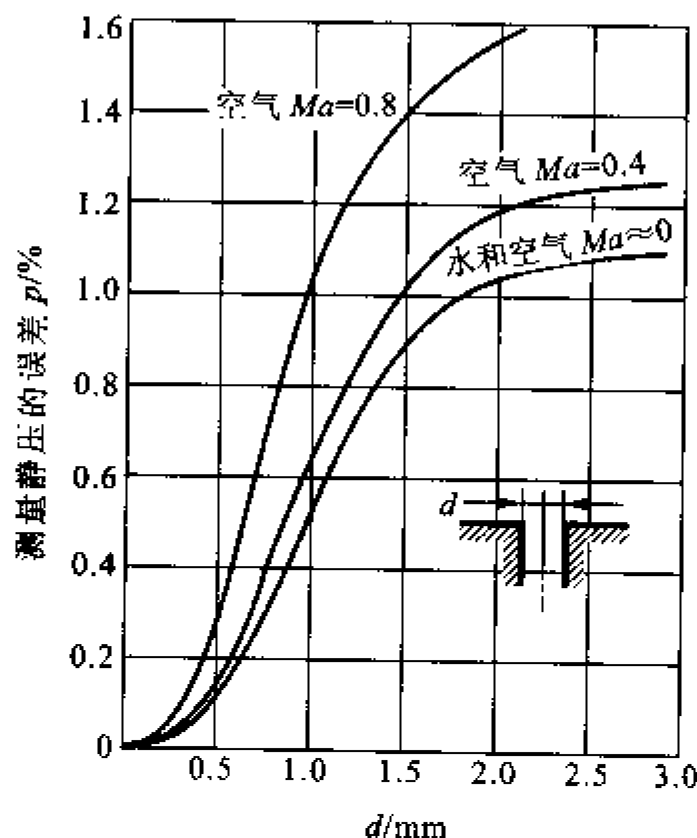


图　14－1

影响。在一定的流速下，孔径愈大，流经静压孔时流线弯曲愈大，静压测量误差愈大；而在一定孔径下，流速愈大，边界层内与孔壁垂直方向上速度梯度愈大，粘性力的影响随之增大，静压测量误差也增大。所以通常静压孔的直径为0.5～1.0 mm，孔深为孔径的3～10倍，要求测压孔的周围无毛刺，其周围管道壁面光滑，不应有凹凸不平。

静压孔的几何形状和孔轴方向所能引起的静压测量误差如图14－2所示。虽然垂直壁面的静压孔存在一定误差，但因对于小于1 mm的小孔，误差很小，且与壁面垂直时容易加工，所以静压孔常加工成与壁面垂直。

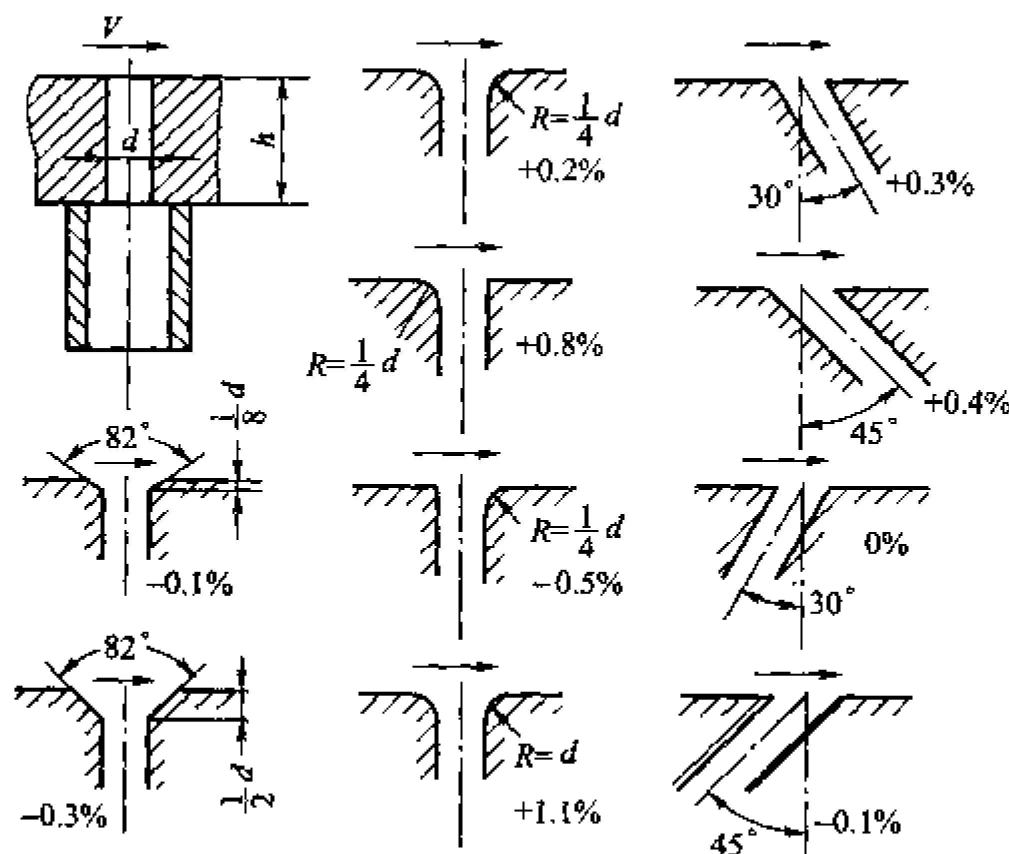


图 14－2

除了壁面开孔感受静压外，利用轴线平行于流体来源方向的直径很小的探针置于流场中，在探针周围某个位置处开孔也可以感受到流场中某点的静压强。

将探针放在流场中，被绕流探针上任意点的压强与未受扰动的无限远来流压强之差，对于未受扰动来流速度头的比值我们定义为该点的压强系数。

$$\bar{p}_i = \frac{p_i - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \tag{14-1}$$

二、压强测量仪表

量测压强的方法很多，通常根据被测压强的大小和测量精度要求选用不同

的压强测量仪表。

1. 液体测压计

液体测压计是根据流体静力学原理设计利用液柱高来测量压强的仪表。在静力学中曾学过，对于静止且连通的均质液体，在重力场中等压面是水平面。因此连通的均质静止流体中，任意两点的压强差只与两点间的垂直高度有关，而与容器的形状无关，这样，若在被测液体的容器壁上所要测量压强处开孔并接透明(如玻璃)管子，即可测出液体中的压强。

(1) 单管测压计

这是一种最简单的测压计(见图 14 - 3)。将一根玻璃管与液体中所要测量压强处容器壁上的压力感受孔相连接，管子的另一端开口与大气相通，利用量测被测液体在管中上升的液柱高度来测定容器中液体的压强。为减小因毛细现象所带来的测量误差，管子内径不能小于 3 mm，通常取 5 ~ 10 mm。

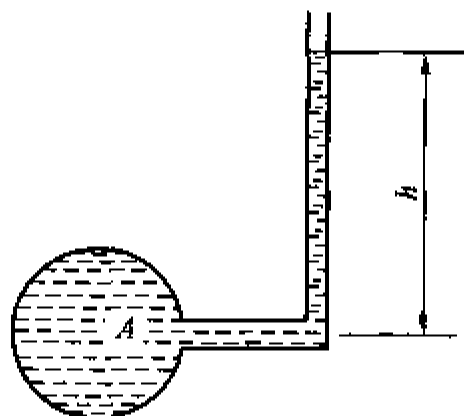


图 14 - 3

在容器内压强的作用下，液体在测压管中上升高度为 h，若液体的密度为 ρ，则由流体静压强基本公式得出容器液体中 A 点的计示压强为

$$p_A = \rho g h$$

因此，由液体上升的高度可以直接得到 A 点的压强。若在有液体流动的管道边壁上开孔，将测压管接在该孔上，测量在测压管中液体上升的高度 h，即可得到流体在管内流动时的静压强。这种测压计的优点是结构简单，测量精度较高，但因测压管中的流体就是被测流体本身，受测压管高度限制，被测的压强不能太高。

(2) U 形管测压计

图 14 - 4 所示为 U 形管测压计，它一端与大气相通，另一端连接到所要测量压强的 A 点处。根据 U 形管内量得的液柱高度差计算出 A 点的压强。

通常根据被测点的压强大小和被测流体的性质，选用 U 形管中的工作介质。当被测压强较大时，可以采用密度较大的水银等作为工作介质。当测量气体压强且被测点压强不大时，可以采用酒精、水、四氯化碳等液体做工作介质。在

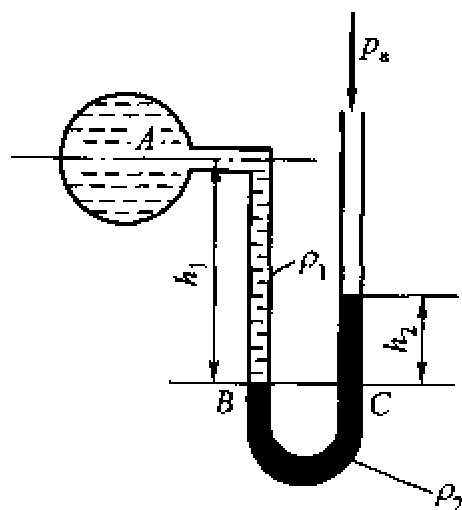


图 14 - 4

容器中被测液体静止不动时，读数误差在 0.5 mm 左右，若被测液体处于流动状态时，因 U 形测压管内工作介质液面波动将使读数误差增大至 1～3 mm。

U 形管测压计是一个连通器，同一种液体中的 B，C 处为等压面，所以 A 点的压强

$$p_A + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$p_A = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1 \tag{14-2}$$

在测量气体压强时，由于气体的密度远小于液体的密度，可以略去 ρ_1 的影响，故可得

$$p_A = \rho_2 g h_2 \tag{14-3}$$

(3) U 形管液体差压计

U 形管液体差压计可用于测量两点间的压强差。对于如图 14－5 所示的 U 形管差压计，U 形管的两端分别连接在 A，B 两容器的测点 1，2 上，容器 A，B 中液体的压强分别为 p_A，p_B，密度分别为 ρ_A，ρ_B，密度为 ρ 的 U 形管中工作介质在被测点 1，2 的压强作用下产生液面高差 h，$C-D$ 为等压面，则有

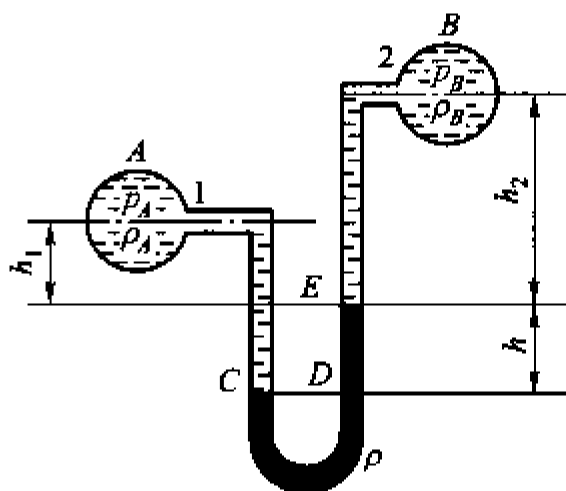


图 14－5

$$p_C = p_A + \rho_A g\ (h_1 + h) = p_D = p_B + \rho_B g h_2 + \rho g h$$

因此压差

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho_B g h_2 + \rho g h - \rho_A g h_1 - \rho_A g h$$

$$= (\rho - \rho_A) g h + \rho_B g h_2 - \rho_A g h_1 \tag{14-4}$$

所以，在 h_1，h_2 已知的情况下，通过测量 U 形管中工作介质的高差 h 可以计算 1，2 点间的压差。有时为了测得较大的压强，可以作成有多根 U 形管串接而成的测压管组。

(4) 倾斜式微压计

在测量很微小的压强或压差时，常将测压计的测压管倾斜放置，用以提高测量精度。这时测压管中通常都采用密度较小的工作介质。

对于如图 14－6 所示的微压计，当压强 $p_1 = p_2$ 时，调整微压计容器中液面高度为标尺零点，l_0 为倾斜侧压管的起始零位。当有压差时，倾斜测压管中液面相对于零点上升 h_1 高度，容器中液面下降 h_2，则压强差

$$p_2 - p_1 = \rho g\ (h_1 + h_2) = \rho g \Delta l \left(\sin \alpha + \frac{A_1}{A_2} \right) \tag{14-5}$$

式中 A_1——测压管的截面积；

A_2——容器的横截面积；

α——测压管倾角；

Δl——倾斜管上升的液柱读数。

一般情况下，A_1 远小于 A_2，故 A_1/A_2 可忽略不计，于是

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g \Delta l \sin \alpha \tag{14-6}$$

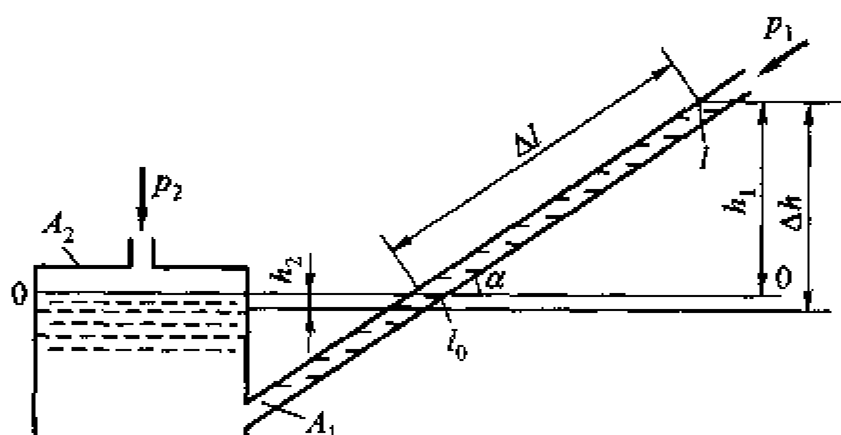


图 14－6

显然，减小测压管的倾角，可以提高测压精度，但 α 太小时，会使 Δl 的读数不易准确，一般 α 不应小于 6°～7°。

对于上述的单管测压计、U 形管测压计、多管测压计或倾斜式微压计，为减小读数误差提高测量精度，常可附加光学精读装置。

2. 金属弹簧压力表

当测量较高的压强，或对于各种流体系统检测压强时，常采用金属弹簧管

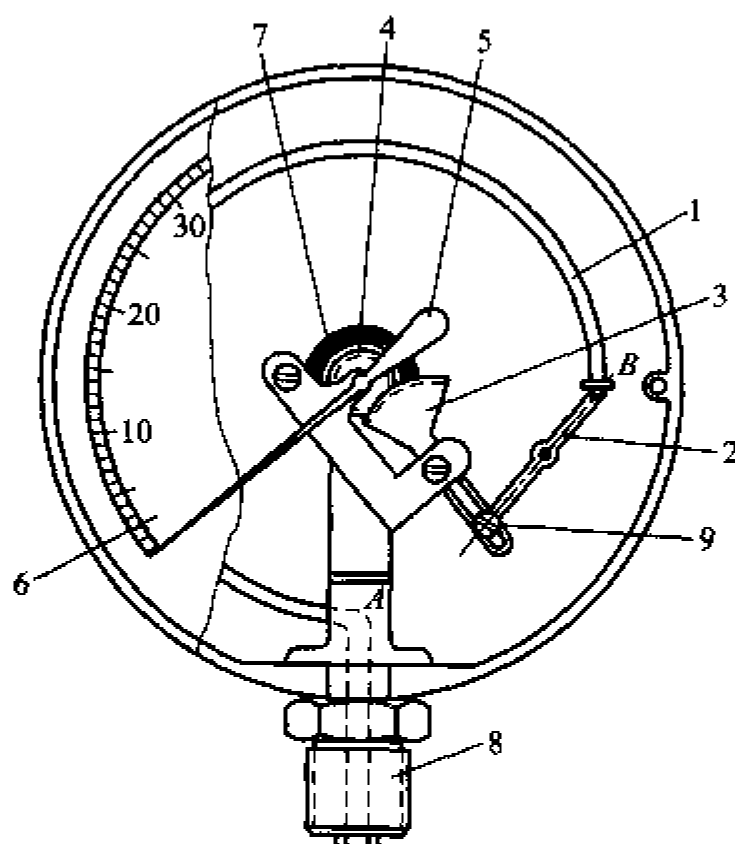


图 14－7

式压力表。图 14 - 7 是金属弹簧管式压力表的基本结构示意图。当有压强的被测流体通入时，具有扁椭圆形截面的金属弹簧管 1（图中 *AB* 段），在内外压差的作用下产生弹性变形，由管末端处的拉杆 2 拉动扇形齿轮 3 使与其啮合的齿轮 4 转动，带动指针 5 指示压强值。游丝 7 用以消除齿轮间的间隙，提高测量精度。调节螺钉 9 的位置可以改变传动放大系数，调节压力表量程。6 为表盘，8 为连接螺柱。弹簧管的变形随压强上升而增大，通常根据不同的压强测量范围和测量精度要求选用合适量程和精度的金属压力表。

使用一定时间的金属压力表，应该用压力表校正装置进行校正，以保证其测量精度。

金属弹簧式压力表还有真空表、电接点压力表和测量压差的差压表等。金属压力表由于结构紧凑、易于携带、安装简便、测读容易而在工业上和实验室得到广泛应用。

三、动态压强的测量

对流动过程的实验研究和对工业生产中的流体系统进行动态监测，以及对流体机械的流动特性进行数据采集时，经常会遇到动态压强的测量和压强的远距离传送、显示、记录以及控制等问题。为了实现压强信号的远传显示，通常将压强用波纹管、膜片等弹性敏感元件转变为位移、力和其它应变信号，然后通过电阻式、电感式或电容式等电动变换器转换为电信号，放大后远传至显示或记录仪表。这种压强变送器因动态响应较慢，主要适用于测量静态压强或变化缓慢的压强。

为了测量快速变化的脉动压强，必须采用灵敏度高且惯性小的传感器，压强传感器将瞬间变化的动态压强转换成电信号，然后通过电信号的放大转换，输入计算机分析处理后打印输出。

目前广泛应用于动态压强测量的传感器主要有电阻式、应变式、电容式、电感式、压电式、压阻式等压强传感器。电阻式压强传感器由于非线性误差大，频率响应低而主要在测量精度和动态响应要求不高的场合使用。应变式压强传感器由压强敏感元件和贴在它上面的电阻应变片组成，前者将被测压强转换为应变量，然后由电阻应变片将应变量变换为电阻的变化量，并通过电桥将变化的电阻量以电压输出。压强敏感元件有膜片式、应变筒式、应变梁式等多种，而电阻应变片则有箔式、丝式和半导体应变片三类。应变式压力传感器测量范围可达 0 MPa ~ 1 000 MPa，动态频响达到 120 kHz，测量误差为 0.1% ~ 0.5%。由于其结构简单，体积小，测量精度高，价格适中而得到广泛应用。

近年来压强传感器出现了集成化的趋向，即将压强敏感元件和机械 - 电阻应变桥路集成在一起。最近甚至出现了压强传感器的智能化，它将硅敏感元件

技术与微处理器计算结合在一起组成传感器，这种传感器具有自补偿、自诊断、双向数字通信、信息存储、记忆等功能，其测量精度≤0.1%，重复精度达到0.005%，因而将有很好的发展应用前景。图14－8是这种传感器的原理框图。

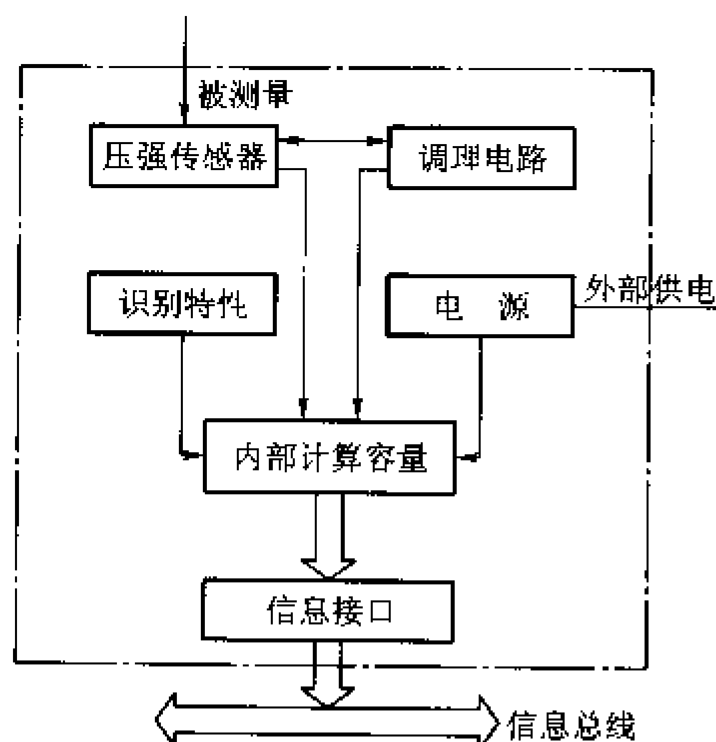


图　14－8

下面介绍结构比较简单，应用最为广泛的电阻应变式压强传感器。

图14－9a是电阻应变式压强传感器的原理示意图，其工作原理是利用金属电阻丝受力变形时电阻发生变化的特性。将电阻应变片贴在敏感元件弹性梁或膜片上，压强 p 通过传力杆作用在弹性梁上或直接作用在膜片上，使弹性梁或膜片弯曲变形，电阻应变片随之变形，其电阻值发生微小变化。借助于图14－9b的电桥电路，将应变片的待测电阻 R_1 作为桥式电路的一个臂，R_2 为温度补偿电阻，R_3 和 R_4 是设在应变仪中的固定电阻，在桥路的 AC 两端输入

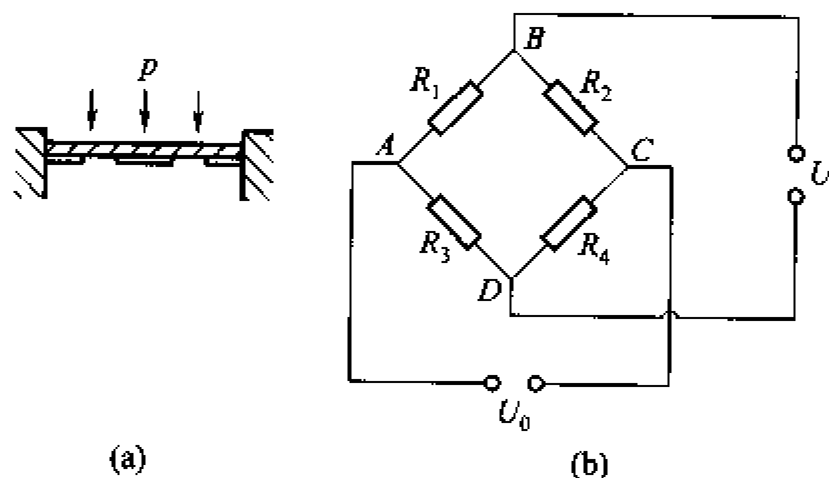


图　14－9

电压 U_0，利用电桥电路的基本工作原理，对于某一被测压强 p，电阻应变片的变形引起电阻值的微小变化，转换成模拟电压输出。

图 14-10 是量测系统原理框图。由桥路测得的微弱电阻变化经前置放大器放大输出模拟电压信号，输入信号调理端子经滤波后送入 A/D 转换板，经转换后得到电平数字量信号，输入计算机分析处理形成实时图形数据文件，最后由打印机打印输出数据、曲线和图形，从而使我们能实时了解实验或工业生产的进程，并进而控制参数输入和整个过程。

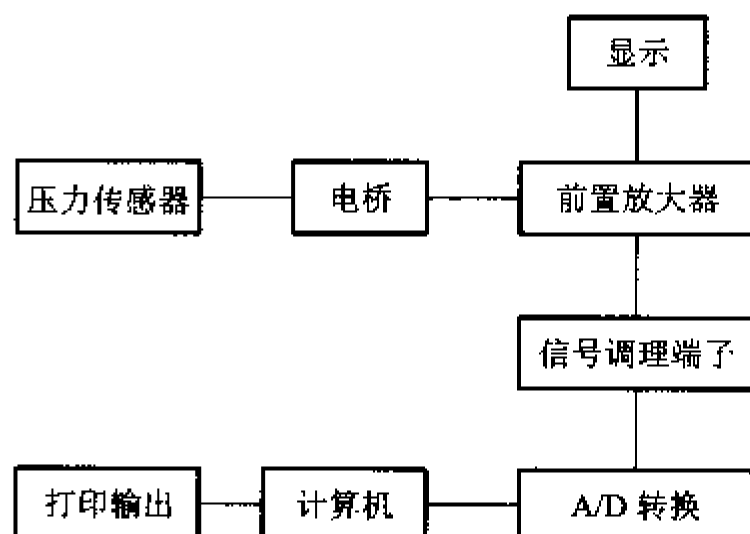


图 14-10

各种其它形式的压力传感器尽管有着不同的工作原理和结构，但他们都具有将输入的压强信号变成电信号输出的共同特点。

§14-2 流速的测量

通常在流体工程的研究过程中，以及飞行器在飞行中，经常要进行流速的测量，使用最多的是皮托管(又称探针)和总压管。

一、总压管

如图 14-11 所示是一种用于测速的总压探针，它是一种两端开孔成 L 形的管子。若要测量流体中 A 点的流速，可以将总压管置于 A 点对准流动方向，A 点处形成流速为零的滞止点，则总压管中液体将上升 $h+\Delta h$ 高度，即在 A 点处有

$$\frac{p_0}{\rho g}=\frac{p_A}{\rho g}+\frac{u_A^2}{2g}=h+\Delta h$$

式中 p_0 为 A 点处的总压强，显然 A 点处的静压强 $p_A=\rho gh$，所以得到

$$\Delta h=\frac{p_0-p_A}{\rho g}=\frac{u_A^2}{2g}$$

即

$$u_A=\sqrt{2g\Delta h} \tag{14－7}$$

因此，只要利用总压管测出被测点处的液柱高(压强)，就可以计算得到该点处的流速。

实验得到，在感压孔直径与外径之比为 $d_1/d=0.6$ 下，头部为平头时，总压探针轴心相对于来流方向的偏转最不敏感，而头部做成半球形时对方向性较敏感，且 d_1/d 越小，对方向性越敏感。测量时应将探头对准流动方向。

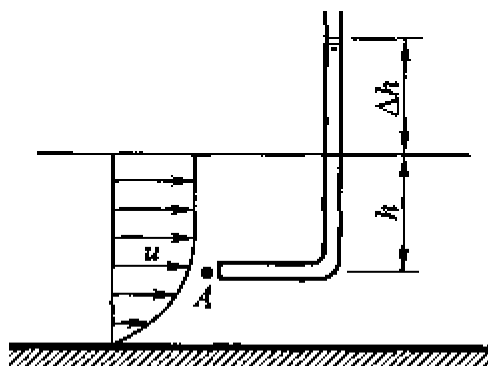


图　14－11

二、皮托管

很多情况下，例如在管路中，流动流体中某点的压强并不知道，只用总压管无法测得流体中的流速，这时常用总压管与静压管组合在一起的探针测速，称为测速管或皮托(Pitot)管。图 14－12 为具有半球形头部的皮托管结构示意图。前端是皮托管的迎流总压孔，孔径通常为 $(0.1\sim0.3)d$。侧面均布的静压孔常采用沿圆周对称均布的 8 个。如图所示若将总压孔和静压孔连接到一个 U 形管压力计上，总压和静压之差，就是用于计算流速的动压，即

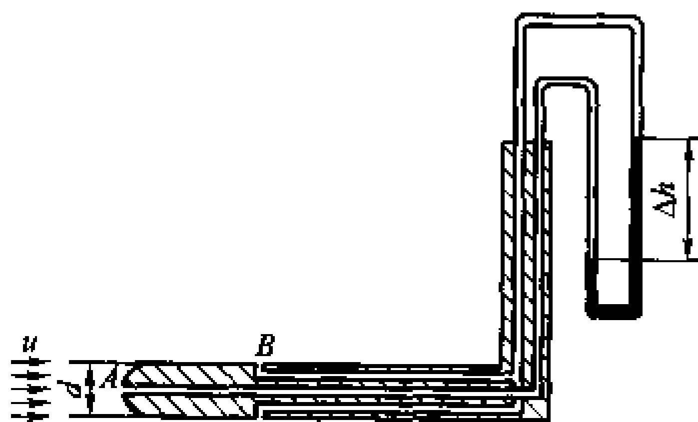


图　14－12

$$u=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0-p)}=\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho}2g\Delta h}$$

式中　ρ——被测流速的流体密度；

ρ_1——U 形管压力计中工作介质的密度。

探针头部的半球形会使流经该处的流速加大，静压减小，因此静压孔的位置过于紧靠头部时会影响测量精度。为减小头部对流场干扰所引起的静压测量误差，静压孔一般开在距头端 $3d$ 处。皮托管的尾部垂直引出管会阻碍它前面

的流动，使之流速减慢压强增高，因此垂直引出管距离静压孔应大于 $8d$。为减小头部、尾部和加工等因素的影响对测量结果造成偏差，通常用皮托管的流速因素 Cv 进行修正，即

$$u = Cv\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho}2g\Delta h} \tag{14-8}$$

Cv 值由率定实验确定，通常为 1～1.04。

探针头部的形状对探针的性能影响很大，因此在选用测速探针时，应特别加以注意。头部为半球形的探针，来流对探针偏斜的不敏感角度约为 ±10°。对于头部为锥状的探针，尽管测得的总压对来流偏斜角不敏感，但这时所测的静压却对来流的偏斜角非常敏感，它将影响速度测量的结果，所以探针头部通常选用半球形。

三、三孔圆柱形探针

三孔圆柱形探针测量原理如图 14－13 所示。探针为圆柱形(直径为 d)，头部呈半球形。距头部大于 $2d$ 处的同一横截面上开 3 个测压孔(孔径为 0.5 mm)，1，3 孔对称于 2 孔，与 2 孔间隔 45°。3 个小孔在流场中感受的压强 p_1，p_2，p_3 分别按图示引接到 3 根 U 形管测压计中。在三孔探针尾端引出孔处装有指示探针转动角度的分度盘。将三孔探针垂直放入平面流场后，缓慢转

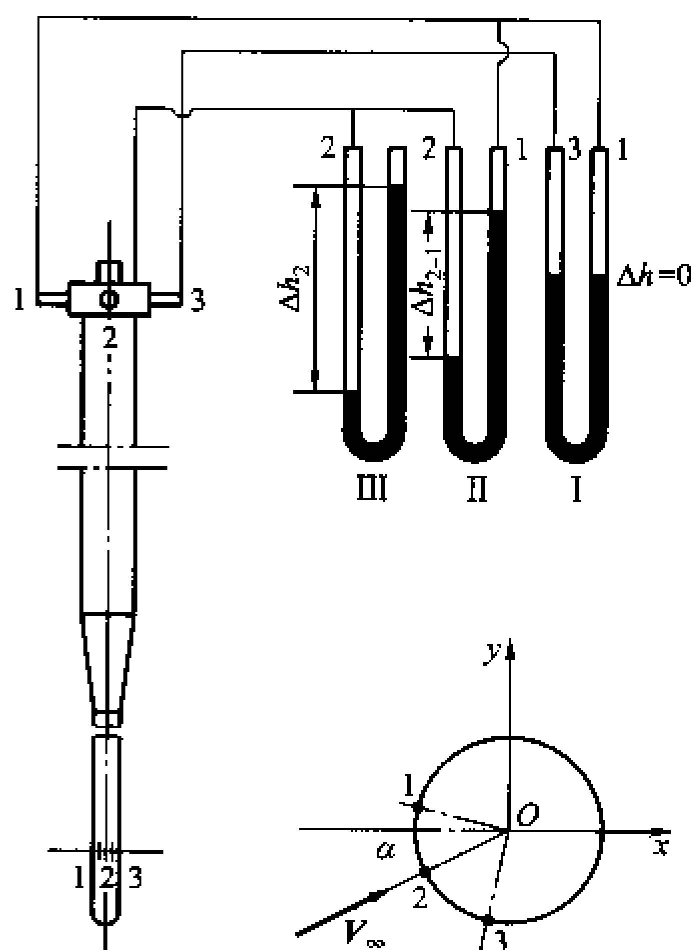


图 14－13

动探针，当连接 1，3 孔的差压计中液面相等时，2 孔就是绕流圆柱体时的前驻点，孔 2 的轴心线与来流方向重合，这时从刻度盘就可以读得来流方向与基准线 x 轴夹角 α，这就是来流方向角。同时，由另两个 U 形管压强计测得 p_2 和 $p_2 - p_1$ 值，利用这两个压强值和三孔探针的校正系数，可以计算流动的总压、静压和速度值。

为测定空间流动中某点处的总压、静压、速度值和流动的方向，可以采用五孔球形探针，它与三孔圆柱形探针的测量原理类似，五孔球形探针根据流体绕球体流动的特性做成，需要采用时，读者可查阅相关资料。

四、热线(膜)风速仪

利用探针测量流动速度，是基于测量流场的压强来间接测定流动速度，但当流动的速度和方向脉动时，即使脉动频率只有几赫兹，由于响应速度较慢，也难以得到满意的结果。

在流体力学动态测试中，流速的脉动频率从几赫兹到上万赫兹，一般的测速探针已无法测得流动速度的瞬时值和脉动频率。热线风速仪和热膜流速仪是为测量流体脉动速度而发展起来的流速量测仪器。将装有金属丝的金属热敏探头置于欲测流速的流场中，将金属丝加热，流体与金属丝发生热交换带走部分热量，流动速度的变化将改变金属丝冷却的速率，利用在不同流速下散热率不同的原理，通过量测热敏探头的散热率来确定流场的流速。热线(膜)探头的结构见图 14 - 14。图 14 - 14a 的热线探针是将一根抗氧化性能好且有足够机械强度的很细的金属镀铂钨丝悬挂在叉形不锈钢支架的尖端处做成，金属丝直径在 1 ~ 3 μm 左右，铂金丝探针工作温度在 300 ~ 800 ℃时具有较高的灵敏度。由于热线探针的金属丝很细且在高温下工作，一般适宜测量杂质含量少的气体流速。液体在高温下会产生氧化，故一般不能用于量测液体的流速。

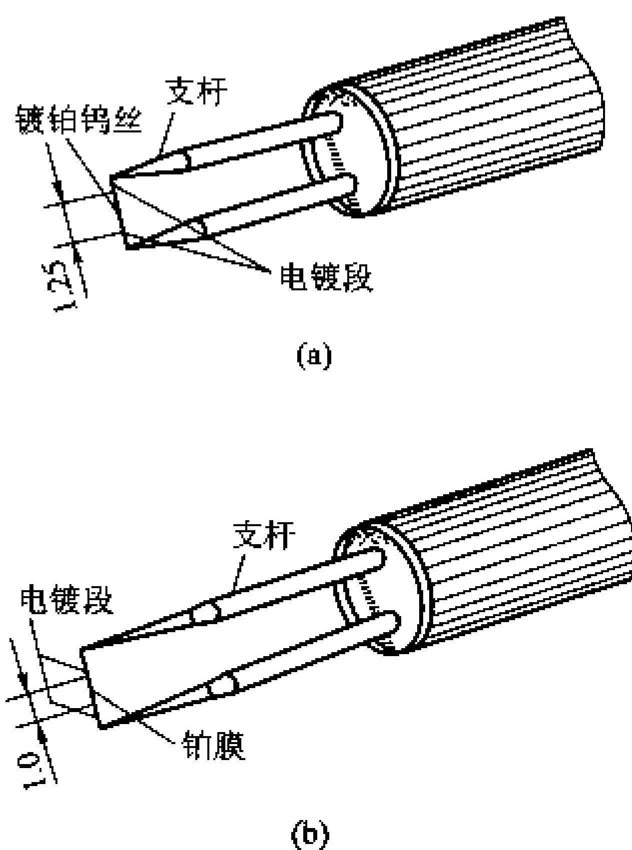


图　14 - 14

图 14 - 14b 是热膜探针。为提高探针金属丝的强度和量测的稳定性，利用在石英或玻璃杆上沉积一层很薄的铂金属膜做成热膜探针。一般热膜探针的直径约为 25 ~ 50 μm。热膜探针在工作温度 30 ~ 60 ℃下具有较高的灵敏度，故

可用于液体和气体流场的测速。若将两个热线(膜)元件做成 X 或 V 形探针，可以测量二维、三维流场的流速。

图 14-15 是热线(膜)流速仪的电桥电路原理图。将热敏元件的两端接在电桥的一个臂上，当流速为零时，电桥处于平衡状态。这是采用一个反馈回路的等温补偿电路，量测时保持热敏元件的温度不变。当流过热敏探针的流速增加时，热交换使热线(膜)降温，电阻减小，A 端的电位降低，使输入放大器的电压增加，因而反馈电流和通过热线(膜)电阻的电流增加，使热敏元件保持原来的温度。

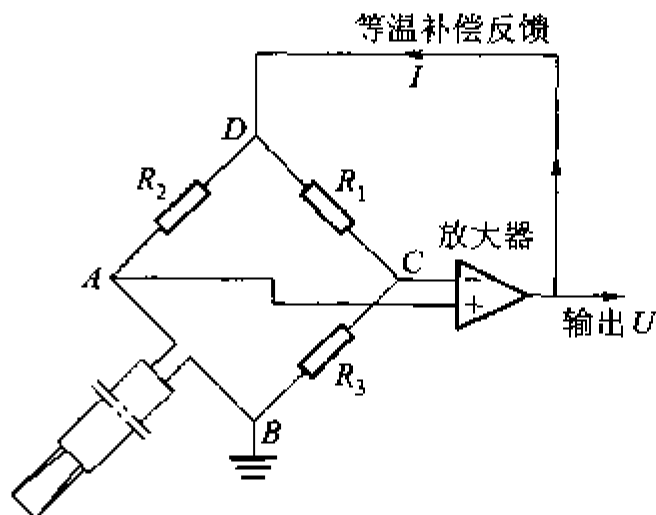


图 14-15

热线上散失的热流量与流速间的关系可以用下式表示

$$\Phi = A + B\sqrt{v} \tag{14-9}$$

式中 Φ——热线散失的热流量；

A，B——常数，由实验确定；

v——流体流速。

若热线的电阻为 R，通过的电流为 I，则上式可变为

$$I^2 R = A + B\sqrt{v} \tag{14-10}$$

对于恒温式热线风速仪，当热线温度(或电阻 R)保持不变时，上式得到电流与流速的函数关系。

热线流速仪的频率响应可以达到 1.2 MHz，热膜探针也能达到 1 kHz 以上，所以用它们可以测量脉动频率很高的流动。热线(膜)流速仪还具有很宽的测速范围，特别适合高速测量。热线探针可用于测量 0.2～500.0 m/s 的气流速度，而热膜探针则可用来测量 0.01～25 m/s 的气流或液体流速。其缺点是整台流速仪价格昂贵，且由于热敏探针细而较脆，因此对被测流场流体的杂质含量有较严格的要求，探针容易损坏耗费较高。又因热线探针尺寸各不相同，所以使用前需要逐个校准，而且动态校准比较困难。

五、激光测速仪(LDA)

当激光的光线照射到跟随流体运动的固体微粒上时，固定的光接收器接受到运动微粒的散射光的频率是变化的，当散射光与光接收器的相对运动使两者距离减小时，频率增高，距离增大时，频率减小，频率的变化量与相对运动速度的大小和方向有关，也与激光的波长有关。接收器接收运动物体散射光的这种现象称为激光多普勒效应，又称为多普勒频移。即当固定接收器接收运动微粒散射光的频率时，由于运动微粒与接收器间有相对运动，接收到的频率已不是运动物体散射光的频率，两者间产生了频移。激光多普勒测速仪就是利用激光多普勒效应做成的，应用电测测定频移大小，并由此确定流场中某点上的流体运动速度。图 14－16 是激光测速仪的光路和处理系统框图。用半透膜镜分光器 M_1 将激光单束分成两束强度基本相等的光束，经聚焦透镜 L_1 聚焦到玻璃管内流场中被测点 P 处，与流体一起运动的固体微粒的散射光经透镜 L_2 聚焦到针孔光阑后进入光电接收器，通过光电倍增管将光的信号变成电的信号，由信号处理器的频率跟踪器跟踪流速的多普勒信号，并由数据处理器的频率计数器显示。

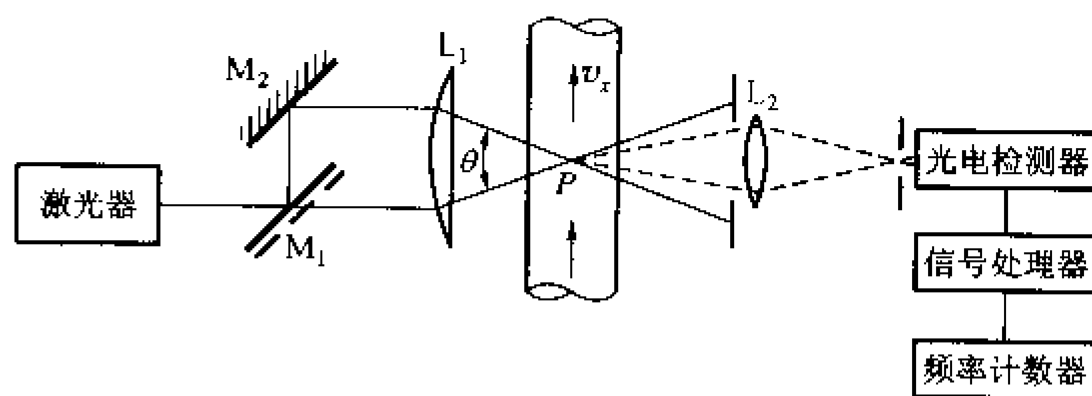


图 14－16

光电接收器接收到的激光与散射光的多普勒频移量

$$f_d = \frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{\lambda} v_x \qquad (14-11)$$

式中 f_d——多普勒频移；

λ——激光的波长；

θ——透射光与散射光之间的夹角；

v_x——x 轴向的速度分量。

上式中 λ 和 θ 是常数，因此，测出光的频移 f_d，就可以得到流体运动速度 v_x。

氦氖气体激光器是用得较多的激光光源。激光照射在流体中的固体微粒上

时才能产生多普勒频移的散射光，因此被测流场中必须有固体微粒。天然的气体和水中含有杂质微粒，但测定纯净的水或气体的速度时，流体中应人工掺入微粒，微粒的尺寸应能保证其运动速度大小与流体的速度相当。

激光测速仪与各种测速探针不同，它是一种无接触测量，测量的过程对流场没有干扰；测点的空间分辨率很高(测点体积小于 10^{-4} mm^3)；测速范围很宽，可以测量小于 1 mm/s 的低速到每秒几千米的高速；能够对高频脉动的流体进行实时测量，且测量精度高于其它测量方法。激光测速仪的缺点是价格昂贵，仪器及其辅助设备比较笨重。

§14－3　流量的测量

最常见的流量计有文丘里管、孔板流量计、喷嘴流量计、堰板流量计等，它们都是压差式流量计，即在流道上安装一个节流元件，利用流体流过节流元件时产生压强差来测定流量，其基本原理都是利用了总流机械能守恒方程(伯努里方程)。在实验室中还常用体积(或质量)流量计。在工业上应用最多的是转子流量计、涡轮流量计、电磁流量计、超声波流量计、旋涡流量计和多种容积式流量计。

一、体积(质量)流量计

利用经过标定的容器测定某一时间段内流出某一过流断面的流体体积或质量，这种流量测定设备称为体积(质量)流量计。这是一种十分简易的方法，但测量的结果具有很高的精度，因此它常被用作节流式流量计和容积式流量计的率定装置。

二、文丘里流量计

典型的文丘里流量计如图 14－17 所示，它由收缩段、喉管和扩散段三部分构成。它常用于测量有压管道中的流量。收缩段前的进口断面 1－1 和喉管断面 2－2 为缓变断面，在该处开设测压孔，并与测压管连接。由于收缩段处的喉管直径较小，流体流经该处时将一部分压强能转化为动能，通过测量两个断面间的测压管水头差，就可以计算流经管道的流量。

以 0－0 为基准面，对 1－1 和 2－2 断面列总流能量方程，若忽略两断面间的能量损失，则有

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}$$

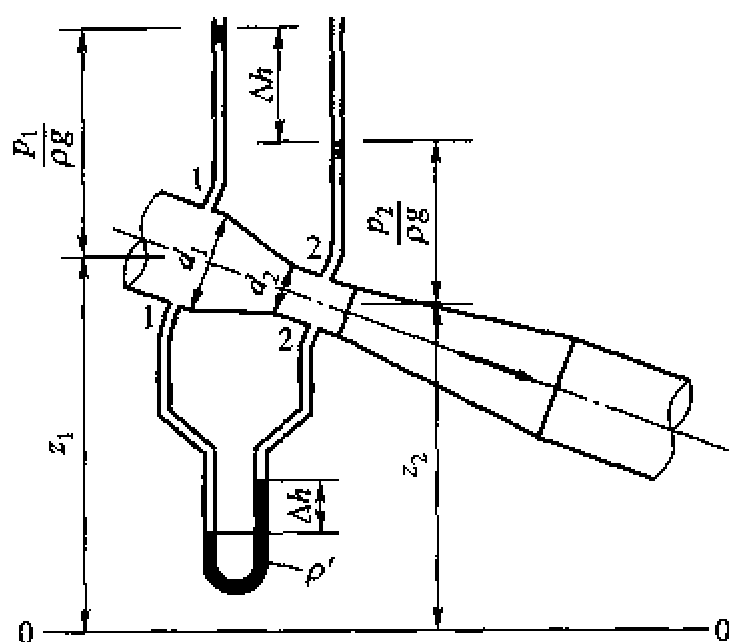


图　14－17

式中

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}\right)=\Delta h$$

为测压管水头差。

由总流的连续性方程得

$$V_2=V_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

将 Δh 和 V_2 代入能量方程，得到

$$V_1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}\sqrt{2g\Delta h} \tag{14－12}$$

所以，通过流量计的理论流量

$$q_T=V_1\frac{\pi}{4}d_1^2=\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}\cdot\Delta h}=C\sqrt{\Delta h} \tag{14－13}$$

式中　$C=\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}$是取决于文丘里管几何尺寸的流量计常数。

实际流体流过流量计时存在能量损失，而且推导中假定动能修正因数$\alpha_1=\alpha_2=1$，有一定误差，所以实际流量

$$q=\mu C\sqrt{\Delta h} \tag{14－14}$$

式中 μ 称为文丘里管的流量因数，一般 $\mu=0.98$ 左右，μ 通常用体积流量计或其它标准流量计进行率定，还可以通过试验绘制 $q=f(\Delta h)$关系曲线供使用流量计时查用。

三、喷嘴流量计和孔板流量计

图 14－18 是喷嘴流量计，图 14－19 所示为孔板流量计，它们与文丘里流量计一起又称为节流式流量计。喷嘴出口处流动平行于轴线，为缓变流，故可以在喷嘴进口前断面 1－1 和出口断面 2－2 处开设测压管孔。对于孔板流量计，流体流经孔口时将发生收缩流动，但收缩的最小断面处液流为平行流动，故可以在最小断面 2－2 和孔板前 1－1 断面处设立测压管孔。对 1－1 和 2－2 断面列伯努利方程，且 Δh 仍采用 1－1 和 2－2 断面间的测压管高差，则与文丘里流量计类同可以得到

$$V_2=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}\sqrt{2g\Delta h} \tag{14-15}$$

于是，喷嘴流量计和孔板流量计的理论体积流量（不计能量损失）为

$$q_T=\frac{\pi d_2^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}\cdot\sqrt{\Delta h}=C\sqrt{\Delta h} \tag{14-16}$$

式中 $C=\frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$——取决于喷嘴和孔板流量计几何尺寸的流量计常数。

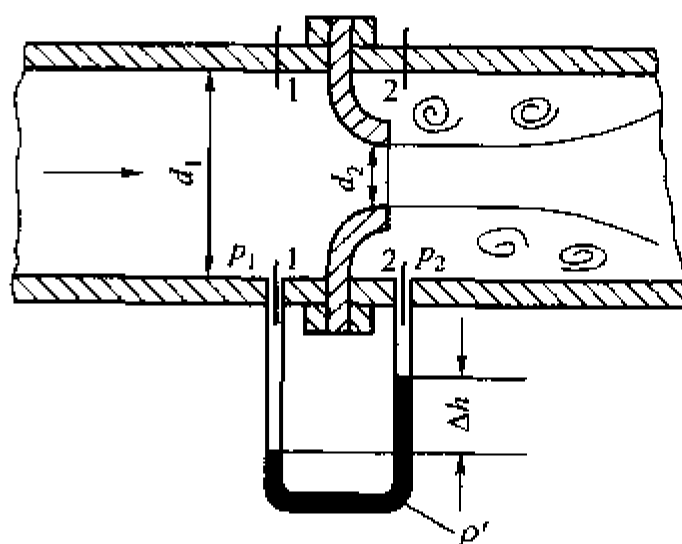


图 14－18

在考虑了能量损失等因素后，通过流量计的实际流量为

$$q=\mu C\sqrt{\Delta h} \tag{14-17}$$

式中流量因数 μ 由实验确定。流体的粘度，节流元件前后的 d_2/d_1，以及流速等都将影响流量因数，通常实验率定时绘成图表，供流量测量时根据 d_2/d_1 和 Re 查用。

当流量计中采用如图 14 - 17、图 14 - 18 和图 14 - 19 所示的 U 形管测压计测量压强时，若测压计中工作介质密度为 ρ'，则不难推导，上式将变为

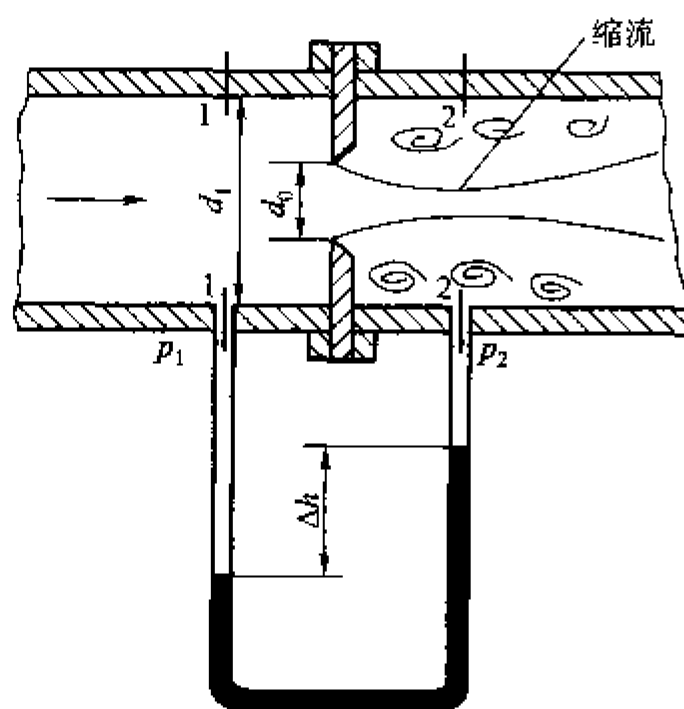


图 14 - 19

$$q = \mu C\sqrt{\frac{(\rho' - \rho)}{\rho}\Delta h} \tag{14 - 18}$$

对于孔板流量计，液流收缩断面直径 $d_2 = C_0 d_0$，d_0 为孔板孔口的直径，C_0 为孔口的液流收缩因数，可以求得 d_2。

节流式流量计结构简单、安装简便、测量方便，而且产品已系列化，因此在工业上和实验室应用十分广泛。但节流式流量计不能用于实时测量瞬时流量，且随流量增大，p_2 逐渐接近并达到液体工作温度下的汽化压强时，液体产生汽化而使测量无法进行，因此限制了一定规格节流式流量计的测量范围。

四、涡轮式流量计

图 14 - 20 是涡轮式流量计的示意图，测量时涡轮流量计沿水流方向放置。当涡轮流量计置于一定直径的管道中时，涡轮的旋转速度与流速亦即与流量成正比，通常可以通过某些标准流量计(如体积流量计)来率定涡轮流量计，建立流量与涡轮转速(或频率)的关系。流量计的壳体 6 为不导磁的不锈钢，在其上装有非接触式磁电转速传感器 2，涡轮则由导磁的不锈钢做成。一定流速的流体带动涡轮 1 转动，涡轮转动时叶片切割传感器 2 的磁力线产生脉冲信号，其

频率与转速成正比，即通过测定频率，就可以得到对应的流量。

为提高测试精度，在流体进口处设有带导叶4的导流器3，5为密封，涡轮流量计的测量误差一般小于1%。流体粘度的变化将对测量精度有较大影响，因此，对于温度的变化应有相应的校正补偿。

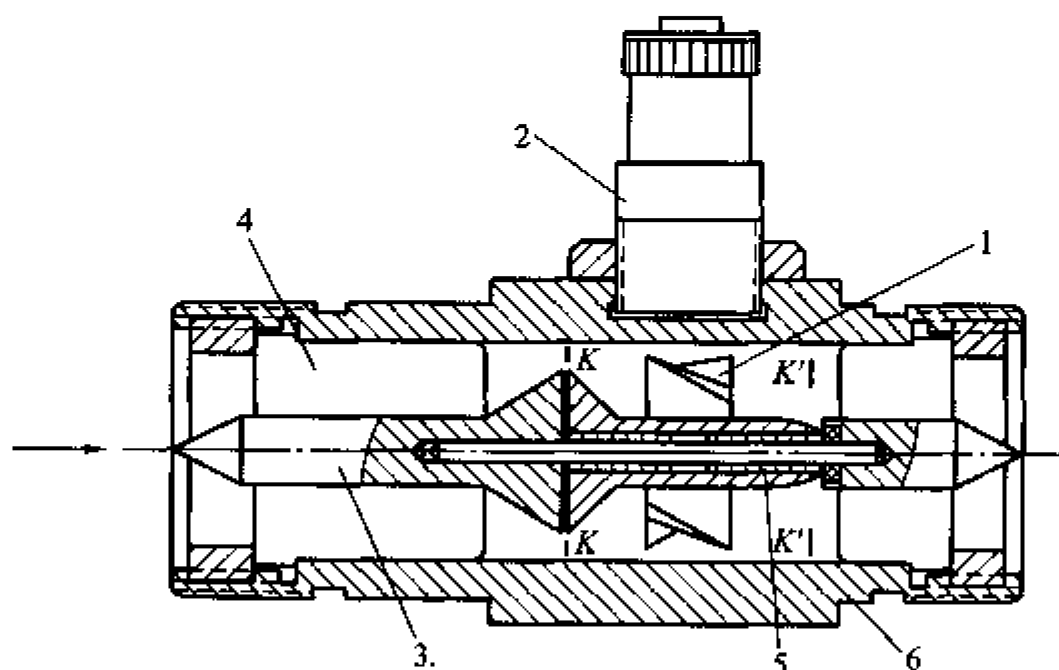


图　14－20

五、电磁式流量计

电磁式流量计的原理如图14－21所示，这是一种测量导电流体体积流量的仪表。流体在管壁为绝缘材料的管道中流动，管道外安装一对磁极，导电流体通过磁极时，根据法拉第定律，导电流体所产生的感应电动势为

$$E = DBV \tag{14-19}$$

式中　E——导电流体通过磁极时感生的电压；

D——管子内径；

B——磁感应强度；

V——流体的平均流速。

只要测出感生电压，就可由式(14－19)得到平均流速 V，进而得到流量。

电磁流量计可以测量管道中的瞬时流量。这种流量计不存在磨损的影响，但测量精度受被测流体导电性能的影响，因此对流体的温度变化和流体中的杂质含量比较敏感。

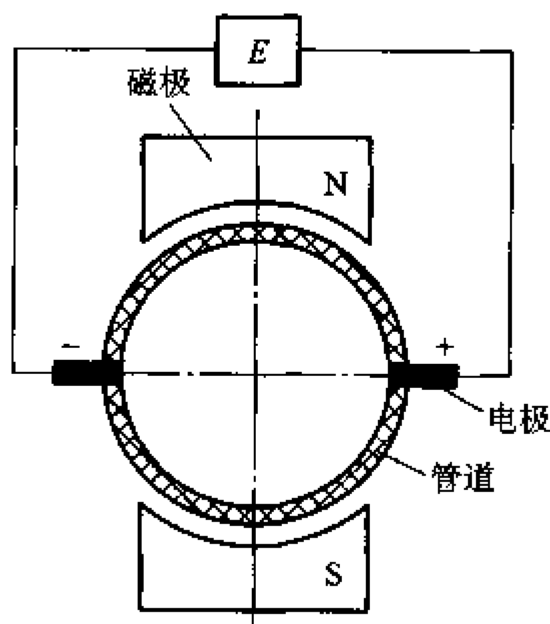


图　14－21

六、容积式流量计

容积式流量计利用通过容积式马达的流量与转速成正比的原理做成，按其结构形式有椭圆齿轮流量计、齿轮马达流量计、柱塞式马达流量计等多种。容积式流量计通常直接安装在被测流量的管道中。

图 14 - 22 是椭圆齿轮流量计的工作原理图，在壳体内有一对互相啮合的椭圆齿轮，流体如图示方向流动，通过流量计时存在压力损失，所以 $p_1 > p_2$。在图 14 - 22a 位置时，p_1 和 p_2 作用在 A 齿轮上的合力矩使齿轮 A 逆时针向转动，将壳体和轮 A 间月牙形空腔中流体排入出口(图 14 - 22b)，同时带动齿轮 B 作顺时针向转动。图(14 - 22c)所示位置时，p_1 和 p_2 作用在 B 轮上的合力矩使其顺时针向转动，将齿轮 B 与壳体间月牙形腔体内的流体排入出口，同时带动 A 轮逆时针向转动，如此循环，将入口处流体不断排入出口。图示为在转动 1/4 周下，排出一个月牙形中流体，齿轮每转一周，所排出的容积为月牙空腔容积的 4 倍，因此，只要测量椭圆齿轮的转速，就可以得到通过流量计的流量。椭圆齿轮流量计既可由机械式计数器的表针显示，也可以用光电传感器转换成脉冲信号的频率显示。

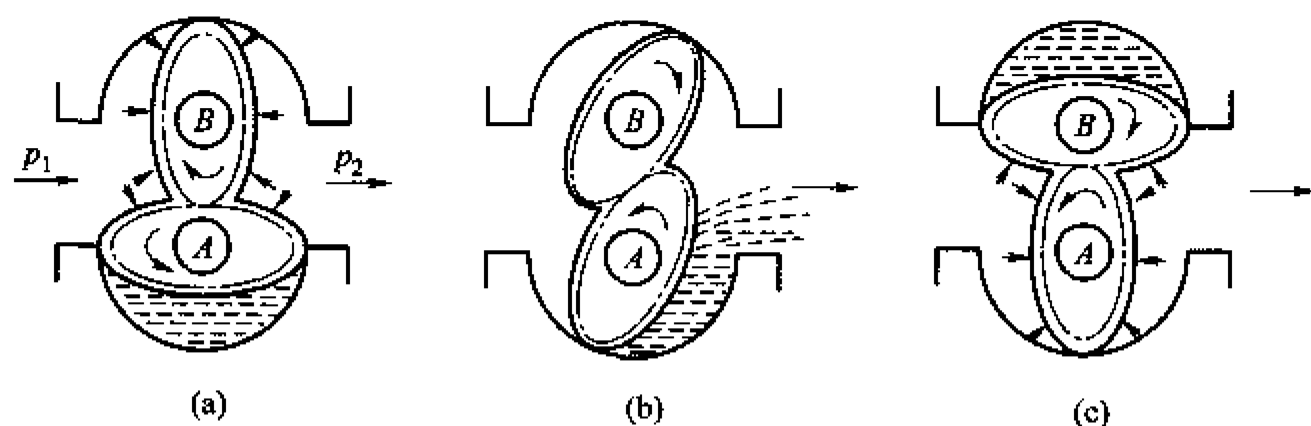


图 14 - 22

柱塞式流量计实际上就是制造精度高的斜盘式柱塞液压马达，其工作原理与柱塞式液压马达相同。在液压力作用下，柱塞在斜盘上作旋转运动，同时在柱塞腔中作往复运动，流体进入逐渐增大的柱塞腔，然后又从容积逐渐缩小的柱塞腔中排出。显然，通过的流量与容积式流量计的转速成正比，由于柱塞与柱塞腔间可以作成很小的间隙，且进出口的压差很小，工作中只有很小的内外泄漏量，因此某些柱塞式流量计具有很高的精度。容积式流量计进出口间很小的压降主要用于克服流体流动的压力损失和流量计运动部件间的摩擦损失。容积式流量计的测量精度一般在 ±0.5% 以内。

主要参考书目

1. L. 普朗特等著. 流体力学概论. 郭永怀等译. 北京：科学出版社，1984
2. A. H. 巴特勒雪夫著. 流体力学：上册. 戴昌晖等译. 北京：高等教育出版社，1959
3. A. H. 巴特勒雪夫著. 流体力学：下册. 戴昌晖等译. 北京：高等教育出版社，1959
4. 郑洽余，鲁钟琪. 流体力学. 北京：机械工业出版社，1979
5. 清华大学水力学教研组编，董曾南主编. 水力学：上册. 北京：高等教育出版社，1995
6. 盛敬超编. 工程流体力学. 北京：机械工业出版社，1988
7. 孔珑主编. 工程流体力学. 北京：水利电力出版社，1992
8. 张也影. 流体力学. 第二版. 北京：高等教育出版社，1998
9. 李玉柱，苑明顺编. 流体力学. 北京：高等教育出版社，1998
10. 江宏俊主编. 流体力学：上册. 北京：高等教育出版社，1987
11. 江宏俊主编. 流体力学：下册. 北京：高等教育出版社，1987
12. 苏尔皇编. 液压流体力学. 北京：国防工业出版社，1979
13. 夏震寰. 现代水力学(一). 北京：高等教育出版社，1990
14. 夏震寰. 现代水力学(二). 北京：高等教育出版社，1990
15. 吴望一编著. 流体力学：上册. 北京：北京大学出版社，1982
16. 吴望一编著. 流体力学：下册. 北京：北京大学出版社，1982
17. 窦国仁. 紊流力学：上册. 北京：人民教育出版社，1982
18. Irving H. Shames 著. 流体力学. 苏金佳译. 台湾：美商麦格罗·希尔公司，1995
19. V. L Streeter，E. B Wylie 著. 流体力学. 周均长等译. 北京：高等教育出版社，1988
20. Альтщуль А. Д. Гидравлические сопритивления. Изд. 2 – е，перераб. идоп. Москва：Недра，1982
21. H.C. 阿尔然尼科夫，B.H. 马尔采夫著. 空气动力学. 张炳暄等译. 北京：高等教育出版社，1959

22. A. H. 夏皮罗著. 可压缩流的动力学与热力学: 上册. 陈立子等译. 北京: 科学出版社, 1977
23. 孔珑编. 可压缩流体动力学. 北京: 水利电力出版社, 1991
24. H.W.Liepmann, A.Roshko 合著. 气体动力学基础. 时爱民等译. 北京: 机械工业出版社, 1982
25. 潘锦珊等编. 气体动力学基础. 北京: 国防工业出版社, 1989
26. 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 章克本编著. 流体力学: 上册. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2000
27. 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 章克本编著. 流体力学: 下册. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2000
28. 徐华舫编著. 空气动力学基础. 北京: 北京航空学院出版社, 1987
29. 林兆福编. 气体动力学. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1988
30. 童秉纲, 孔祥言, 邓国华. 气体动力学. 北京: 高等教育出版社, 1990
31. Alan L. Prasuhn. Fundamentals of Fluid Mechanics. Brookings, South Dakota: Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1980
32. Robert L. Daugherty, A. B., Joseph B. Franzini, E. John Finnemore. Fluid Mechanics with Engineering Applications. Eighth Edition. New York: McGraw - Hill Book Company, 1985
33. Robert D. Blevins. Applied Fluid Dynamics Handbook. New York: Van Nostrand Reinhold, 1984
34. Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Oldishi. Fundamentals of Fluid Mechanics. New York: Wiley, 1999
35. Merle C. Potter, David C. Wiggert. Mechanics of Fluid. Second Edition. London: Prentice - Hall International, Inc., 1997
36. 库科列夫斯基. 水力学习题集. 北京: 高等教育出版社, 1958
37. 苏尔皇主编. 工程流体力学习题集. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1985
38. 谢水曜等编译. 工程流体力学水力学题解. 成都: 四川科学技术出版社, 1984
39. 陈克诚主编. 流体力学实验技术. 北京: 机械工业出版社, 1983
40. 路甬祥主编. 液压气动技术手册. 北京: 机械工业出版社, 2002
41. 熊诗波主编. 液压测试技术. 北京: 机械工业出版社, 1982
42. 戴昌辉编. 流体流动测量. 北京: 航空工业出版社, 1991

名词术语中英文对照表

(按汉语拼音排列)

A

阿基米德原理 Archimedes principle (§ 2 - 7)
凹钝角 concave obtuse angle (§ 13 - 6)
奥辛解 Oseen solution (§ 11 - 11)

B

本构方程 constitutive equation (§ 7 - 1)
比热 specific heat (§ 12 - 1)
比定压热容 specific heat capacity at constant pressure (§ 12 - 1)
比定容热容 specific heat capacity at constant volume (§ 12 - 1)
比内能 specific internal energy (§ 12 - 1)
比热容比 ratio of specific heat capacities (§ 12 - 1)
比体积 specific volume (§ 1 - 5)
边界层 boundary layer (§ 11 - 1)
边界层方程 boundary layer equation (§ 11 - 2)
边界层的外边界 outer boundary of boundary layer (§ 11 - 1)
边界层位移厚度 displacement thickness of boundary layer (§ 11 - 4)
边界层动量积分关系式 momentum integral equation for boundary layer (§ 11 - 5)
边界层动量损失厚度 momentum loss thickness of boundary layer (§ 11 - 4)
边界层分离 boundary layer separation (§ 11 - 8)
边界层厚度 boundary layer thickness (§ 11 - 1)
边界层控制 boundary layer control (§ 11 - 9)
边界层 boundary layer theory (§ 11 - 1)
边界层转捩 boundary layer transition (§ 11 - 1)
边界层流动 boundary layer flow (§ 11 - 2)

边界条件 boundary condition (§ 11 - 2)
变形运动 deformed movement (§ 3 - 5)
表面力 surface force (§ 1 - 4)
表面张力 surface tension (§ 1 - 6)
表面张力系数 factor of surface tension (§ 1 - 6)
并联管路 parallel pipe system (§ 10 - 1)
波速 wave speed (§ 10 - 4)
波相 wave phase (§ 10 - 4)
波阻 wave drag (§ 13 - 9)
伯努里方程 Bernoulli s equation (§ 1 - 2)
伯努里积分 Bernoulli s integral (§ 4 - 3)
泊肃叶流动 Poiseuille flow (§ 9 - 3)
不可压缩流体 incompressible fluid (§ 1 - 5)
不良流线型体 non-streamline body (§ 11 - 9)
布拉修斯公式 Blasius equation (§ 9 - 7)

C

测速探针 tachometer probe (§ 14 - 2)
测压孔 pressure tap (§ 14 - 1)
测压管水头(测压管高度)pressure tube head (§ 4 - 6)
层流 laminar flow (§ 9 - 2)
层流区 laminar zone (§ 9 - 7)
层流边界层 laminar boundary layer (§ 11 - 1)
层流入口段 laminar entrance (§ 11 - 10)
层流射流 laminar jet (§ 11 - 12)
层流运动 laminar flow (§ 9 - 3)
超声速 supersonic speed (§ 12 - 2)
超声速流动 supersonic flow (§ 12 - 2)
沉降 sedimentation (§ 11 - 11)
自由沉降速度 free settling velocity (§ 11 - 11)
充分发展管流流动 fully developed pipe flow (§ 11 - 10)
冲角 attack angle (§ 6 - 11)
冲击波(激波)shock wave (§ 12 - 1)
出口 outlet, exit (§ 12 - 7)
出口压强 exit pressure (§ 12 - 7)

出口速度 exit velocity（§12-7）
串联管路 tandem pipe zone（§10-1）
垂直分力 vertical component of force（§2-7）
粗糙度 roughness（§9-5）
传感器 transducer（§14-1）

D

大气压强 atmospheric pressure（§2-4）
“达朗贝尔佯谬” d′ Alembert paradox（§1-2）
达西公式 Darcy equation（§9-3）
单位质量力 unit body force（§2-2）
单位重力流体 unit gravity fluid（§4-6）
当量直径 equivalent diameter（§3-2）
等容比热 specific heat capacity at constant volume（§12-1）
等熵流动 isentropic flow（§12-1）
等熵膨胀 isentropic expansion（§13-3）
等熵势流 isentropic potential flow（§13-2）
等熵压缩 isentropic compression（§12-1）
等熵指数 isentropic exponent（§12-1）
等势面 equipotential surface（§2-2）
等势线 equipotential line（§6-2）
等势线簇 equipotential line cluster（§6-1）
等温流动 isothermal flow（§12-8）
等温过程 isothermal process（§12-1）
等压比热 isobaric specific heat capacity（§12-1）
等压面 isobaric surface（§2-2）
低雷诺数流动 low Reynolds number flow（§11-11）
点涡 point vortex（§6-2）
点源 point source（§6-2）
点汇 point sink（§6-2）
电磁流体力学 magneto fluid mechanics（§1-2）
叠加原理 superposition principle（§6-3）
定常流动 steady flow（§3-2）
动力相似 dynamic similarity（§8-1）
动力粘度 dynamic viscosity（§1-5）

E

F

G

葛罗米柯－兰姆方程 Gromeco-Lamb equation (§ 4 – 2)
葛罗米柯－斯托克斯方程 Gromeco-Stokes equation (§ 7 – 2)
工程流体力学 engineering fluid mechanics (§ 1 – 1)
共振频率 resonant frequency (§ 11 – 9)
拐点 point of inflexion (§ 11 – 8)
管道入口起始段 pipe starting entrance (§ 11 – 10)
惯性矩 moment of inertia (§ 2 – 6)
惯性力 inertia force (§ 4 – 8)(§ 2 – 5)
惯性项 inertial item (§ 11 – 2)
广义牛顿内摩擦定律 generalized Newton internal friction law (§ 7 – 1)
过渡区(粘性底层到对数区)buffer zone (§ 9 – 7)
过渡区(水力光滑到完全粗糙)transition region (§ 9 – 7)
过流断面 cross section of flow (§ 3 – 2)

H

哈根－泊肃叶公式 Hagen-Poiseuille equation (§ 9 – 3)
哈密尔顿算子 Hamilton operator (§ 3 – 1)
亥姆霍兹定理 Helmholtz theorem (§ 5 – 4)
恒定流动(定常流动)steady flow (§ 3 – 2)
恒定有势流动 steady potential flow (§ 4 – 4)
横断面 cross section (§ 3 – 2)
后缘 trailing edge (§ 6 – 6)
后驻点 backward stagnation point (§ 6 – 5)
滑流线 slip stream (§ 13 – 10)
环量 circulation (§ 6 – 5)
环形间隙流动 circulation clearance flow (§ 9 – 4)
缓变断面 cross section of subcritical flow (§ 7 – 5)
缓变流动 subcritical flow (§ 7 – 5)
汇 sink (§ 6 – 2)
汇环流 sink-circulation flow (§ 6 – 3)
混合边界层 mixing boundary layer (§ 11 – 7)
混合长度 mixing length (§ 9 – 5)

J

机械能 mechanical energy (§ 4 – 6)

机翼 wing (§ 6 - 6)
奇点 singularity (§ 6 - 2)
激波 shock wave (§ 12 - 1)
激波的反射 shock reflection (§ 13 - 10)
激波的相交 shock interaction (§ 13 - 10)
激波角 shock angle (§ 13 - 6)
激波强度 shock strength (§ 12 - 1)
激波损失 shock loss (§ 13 - 8)
激光多普勒测速仪 Laser Doppler Anemometer (LDA)(§ 14 - 3)
迹线 path line (§ 3 - 2)
几何相似 geometric similarity (§ 8 - 1)
加速度 acceleration (§ 3 - 1)
间断面 discontinuous section (§ 13 - 6)
间接水击 indirect water hammer (§ 10 - 4)
间隙流动 clearance flow (§ 9 - 4)
切力 shear force (§ 1 - 5)
剪切流动 shear flow (§ 9 - 4)
切应力 shear stress (§ 1 - 4)
简单管路 simple pipe line (§ 10 - 1)
角变形速度 angle deformed velocity (§ 3 - 4)
角变形运动 angle deformed motion (§ 3 - 4)
经验公式 emperical equation (§ 9 - 7)
介质 medium (§ 1 - 3)
静力矩 static moment (§ 2 - 6)
静力矩定理 theorem of static moment (§ 2 - 6)
静力学 statics (第二章)
静压强 static pressure (§ 2 - 1)
静止流体 static fluid (§ 2 - 6)(第二章)
局部损失 local loss (§ 9 - 9)
局部损失因数 local loss coefficient (§ 9 - 9)
局部阻力 local resistance (§ 9 - 9)
决定性相似准数 decisive similarity criterion (§ 8 - 3)
绝对静止 absolute static (§ 2 - 1)
绝热流动 adiabatic flow (§ 12 - 8)
绝对压强 absolute pressure (§ 2 - 4)

绝热状态 adiabatic state（§2－3）
均匀流 uniform flow（§6－2）
均匀平行流 uniform parallel flow（§6－2）
均匀泄流 well-distributed let out flow（§10－2）
均质流体 homogeneous fluid（§2－3）

K

卡门动量积分关系式 Karman momentum integral relation（§11－3）
卡门－普朗特方程 Karman-Prandtl equation（§9－6）
卡门涡街 Karman vortex street（§11－9）
可压缩流体 compressible fluid（§1－5）
克拉贝龙方程 Clapeyron equation（§12－1）
空间流动 space flow（§6－7）
空间偶极流 space doublet flow（§6－7）
孔板流量计 orifice meter（§14－3）
孔口 orifice（§9－10）
孔口出流 orifice outlet flow（§9－10）
控制面 control surface（§7－8）
控制体 control volume（§7－8）
库塔－儒科夫斯基定理 Kutta-Zhoukowski theorem（§6－10）
库塔－儒科夫斯基升力公式 Kutta-Zhoukowski lift formula（§6－6）
科尔布鲁克公式 Colebrook equation（§9－7）

L

拉瓦尔喷管 Laval nozzle（§12－7）
拉格朗日变数 Lagrangian variable（§3－1）
拉格朗日法 Lagrangian method（§3－1）
拉格朗日积分 Lagrangian integral（§4－4）
拉力 tensile force（§1－3）
拉普拉斯方程 Laplace's equation（§6－1）
拉普拉斯算子 Laplacian operator（§6－1）
来流 incoming flow（§6－6）
雷诺数 Reynolds number（§9－2）
离心力 centrifugal force（§4－7）
理论流体力学 theoretic fluid mechanics（§1－1）

理想流体 iedal fluid (§ 1 – 5)
理想流体运动微分方程式 ideal fluid motion differential equation (§ 4 – 1)
力矩 moment of force (§ 7 – 1)
力学 mechanics (§ 1 – 1)
力平衡方程式 balance equation of force (§ 2 – 1)
力势函数 force potential function (§ 4 – 5)
力学相似准数 mechanical similarity criterion (§ 8 – 2)
连续介质模型 continuous medium model (§ 1 – 3)
连续性 continuity (§ 3 – 3)
连续性方程 continuity equation (§ 3 – 3)
连续性微分方程 continuity differential equation (§ 3 – 3)
量纲 dimension (§ 8 – 4)
量纲的齐次性条件 dimensional homogeneous condition (§ 9 – 2)
量纲分析 dimensional analysis (§ 8 – 4)
量纲分析方法 dimensional analytical method (§ 8 – 4)
量纲的齐次性 *dimensional homogeneity* (§ 8 – 4)
临界参数 critical parameters (§ 12 – 4)
临界雷诺数 critical Reynolds number (§ 9 – 2)
临界声速 critical sound speed (§ 12 – 4)
临界速度 critical speed (§ 12 – 4)
临界状态 critical state (§ 12 – 4)
零流线 zero stream line (§ 6 – 5)
零流面 zero stream surface (§ 6 – 7)
流场 flow field (§ 3 – 1)
流动 flow (§ 3 – 2)
流动损失 loss of flow (第七章序)
流动相似原理 flow similarity principle (第八章序)
流动状态 flow state (§ 9 – 1)
流管 stream tube (§ 3 – 2)
流函数 stream function (§ 6 – 1)
流量 flow rate (§ 3 – 2)
流量计 flow meter (§ 14 – 3)
流量模数 flowrate modulus (§ 10 – 2)
流量因数 flowrate factor (§ 9 – 10)
流量修正因数 flowrate corrective factor (§ 11 – 10)

流束 stream filament（§3-2）
流速因数 current velocity factor（§9-10）
流速仪 anemometer（§14-2）
流体 fluid（§1-1）
流体要素测量 fluid parameters measurement（第十四章）
流体的相对密度 relative density of fluid（§1-5）
流体动力学 fluid dynamics（第四章序）
流体运动学 fluid kinematics（第三章序）
流体动压强 fluid dynamic pressure（§7-1）
流体静力学 hydrostatics（第二章序）
流体静压强 fluid static pressure（§2-1）
流体力学 fluid mechanics（§1-1）
流体平衡基本方程式 fluid equilibrium fundamental equation（§2-3）
流体的平衡微分方程式 fluid equilibrium differential equation（§2-2）
流体微元(质点)fluid particle（§1-3）
流体压力计 hydromanometer（§14-1）
流体运动(流动)fluid motion（§3-1）
流体质点系统 fluid particle system（§7-8）
流网 stream net（§6-1）
流线 stream line（§3-2）
流线簇 streamline cluster（§6-1）
流线方程 stream line equation（§3-2）
流线的微分方程式 stream line differential equation（§3-2）
流线型体 well-streamlined body（§11-9）
螺旋流 spiral flow（§6-3）

M

马格努斯效应 Magnus effect（§6-6）
马赫角 Mach angle（§12-2）
马赫数 Mach number（§8-2）
马赫线 Mach line（§13-1）
马赫锥 Mach cone（§12-2）
马赫波 Mach wave（§13-1）
脉动速度 pulsation velocity（§9-5）
脉动压强 pulsation pressure（§9-5）

毛细管 capillary tube（§1-6）
毛细现象 capillarity（§1-6）
密度 density（§1-5）
穆迪曲线 Moody curve（§9-7）

N

纳维-斯托克斯方程 Navier-Stokes equation（§7-1）
内能 internal energy（§12-1）
内摩擦力 internal friction force（§1-5）
能量守恒定律 law of conservation of energy（§4-6）
尼古拉兹曲线 Nikuradse curve（§9-7）
尼古拉兹公式 Nikuradse equation（§9-7）
尼古拉兹实验 Nikuradse experiment（§9-7）
尼古拉兹图 Nikuradse figure（§9-7）
拟塑性流体 pseudoplastic fluid（§1-5）
粘度 viscosity（§1-5）
粘性 viscous（§1-5）
粘性流体 viscous fluid（§7-1）
粘性力 viscous force（§1-5）
粘性流体动力学 viscous fluid dynamics（第七章）
粘性切应力 viscous shear stress（§7-3）
粘性内摩擦力 viscous internal friction force（§1-5）
粘性项 viscous item（§11-2）
粘性阻力 viscous resistance（§1-5）
牛顿定律 Newton's law（§8-1）
牛顿流体 Newtonian fluid（§1-5）
牛顿内摩擦定律 Newton's internal friction law（§1-5）
牛顿数 Newton number（§8-1）

O

欧拉法 Eulerian method（§3-1）
欧拉平衡微分方程 Euler equilibrium differential equation（§2-2）
欧拉数 Euler number（§8-2）
欧拉运动微分方程 Euler motion differential equation（§4-1）
偶极矩 doublet moment（§6-4）

偶极流 doublet flow（§6－4）
偶极轴 doublet axis（§6－4）

P

π 定理　π theorem（§8－4）
抛物线规律 parabola law（§9－4）
抛物线速度分布规律 parabola velocity distribution law（§9－3）
喷嘴 nozzle（§11－12）
喷嘴流量计 nozzle flow meter（§14－3）
膨胀 expansion（§1－5）
膨胀波 expansion wave（§13－3）
皮托管 Pitot tube（§14－2）
偏心圆柱环形间隙流动 eccentricity cylinder circulation clearance flow（§9－4）
平板层流边界层 flat plate laminar boundary layer（§11－5）
平板混合边界层 flat plate combined boundary layer（§11－7）
平板间隙流动 plate clearance flow（§9－4）
平板紊流边界层 flat plate turbulent boundary layer（§11－6）
平衡状态 equilibrium condition（§2－1）
平面马赫波 plane Mach wave（§13－1）
平面射流 plane jet（§11－12）
平面有势流动 plane potential flow（§6－1）
平顺绕流 smooth round flow（§6－11）
平行平板间隙运动 parallel plate clearance flow（§9－4）
平行移轴定理 parallel axis theorem（§2－6）
普朗特边界层方程 Prandtl boundary layer differential equation（§11－2）
普朗特混合长理论 Prandtl mixing length theory（§9－5）
普朗特－迈耶流动 Prandtl-Meyer flow（§13－3）

Q

奇点 singularity（§6－2）
气流参数 gas flow parameter（§13－8）
气体常数 gas constant（§12－1）
气体的内能 internal energy of gas（§12－1）
气体动力学 gas dynamics（第十二章序）
气体状态方程 gas state equation（§12－1）

迁移加速度 convective acceleration (§ 3 – 1)
牵连速度 convected velocity (§ 4 – 7)
前缘 leading edge (§ 6 – 11)
切应力 tangential stress (§ 1 – 4)
倾斜式微压计 tilting micromanometer (§ 14 – 1)
球坐标系 spherical coordinate system (§ 3 – 3)
曲面边界层 boundary layer of camber (§ 11 – 8)
全微分 total differential (§ 2 – 2)

R

扰动 perturbation, distubance (§ 12 – 2)
扰动波 perturbation wave (§ 12 – 2)
扰动圆 perturbation circle (§ 13 – 1)
扰动源 perturbation source (§ 12 – 2)
绕流 round flow (§ 6 – 5)
绕流阻力 drag of round flow (§ 11 – 8)
热交换 heat exchange (§ 12 – 1)
热力学第二定律 second law of thermodynamics (§ 12 – 1)
热力学第一定律 first law of thermodynamics (§ 12 – 1)
热膜流速计 hot-film anemometer (§ 14 – 2)
热线流速计 hot-wire anemometer (§ 14 – 2)
容积式流量计 volumetric flowmeter (§ 14 – 3)
儒科夫斯基公式 Zhoukowski equation (§ 10 – 4)
儒科夫斯基 – 恰普雷金假定 Zhoukowski – Chaplygin hypothesis (§ 6 – 11)
入口段长度 entrance length (§ 11 – 10)
弱激波 weak shock (§ 13 – 8)
雷诺数 Reynolds number (§ 8 – 2)

S

三维(元)流动 three dimensional flow (§ 3 – 2)
熵 entropy (§ 12 – 1)
上临界雷诺数 upper critical Reynolds number (§ 9 – 2)
上临界速度 upper critical velocity (§ 9 – 2)
射流 jet (§ 11 – 12)
射流核心区 jet nucleus region (§ 11 – 12)

射流极点 jet pole (§ 11 – 12)
射流极角 jet pole angle (§ 11 – 12)
射流宽度 jet width (§ 11 – 12)
射流扩散角 jet spread angle (§ 11 – 12)
生物流体力学 biological fluid mechanics (§ 1 – 2)
声速 sound velocity (§ 12 – 1)
湿周 wet circum (§ 3 – 2)
施里希廷公式 Schlichting equation (§ 11 – 6)
时变加速度 time-changing acceleration (§ 3 – 1)
时间平均流速 temporal average velocity (§ 9 – 5)
时间平均压强 temporal average pressure (§ 9 – 5)
实际流体流动规律 real fluid flow law (§ 1 – 5)
实时测量 real-time measurement (§ 14 – 1)
实物 substance (第八章序)
势函数 potential function (§ 2 – 2)
势流 *potential* flow (§ 6 – 3)
势流叠加原理 pile up principle of potential flow (§ 6 – 3)
势能 potential energy (§ 4 – 3)
斯特劳哈尔数 Strouhal number (§ 8 – 2)
收缩断面 contraction section (§ 9 – 10)
舒尔茨 – 格鲁诺公式 Schultz-Grunow equation (§ 11 – 6)
数学模型 mathematic model (§ 1 – 1)
水泵工况 hydraulic *pump* working condition (§ 4 – 7)
水锤 water hammer (§ 10 – 4)
水击波 water hammer wave (§ 10 – 4)
水击波的周期 period of water hammer wave (§ 10 – 4)
水力长管 hydraulic long pipe line (§ 10 – 1)
水力(紊流)粗糙管 hydraulic roughness tube (§ 9 – 5)
水力短管 hydraulic short pipe line (§ 10 – 1)
水力(紊流)光滑管 hydraulic smooth tube (§ 9 – 5)
水力半径 hydraulic radius (§ 3 – 2)
水力学 hydraulics (§ 1 – 2)
水轮机工况 hydraulic turbine working condition (§ 4 – 7)
水头 head (§ 4 – 6)
水头损失 head loss (第九章序)

瞬时速度 instantaneous velocity (§ 9 - 5)
瞬时压强 instantaneous pressure (§ 9 - 5)
瞬态力 transient force (§ 7 - 8)
斯托克斯定理 Stokes theorem (§ 5 - 2)
斯托克斯公式 Stokes equation (§ 11 - 11)
斯托克斯解 Stokes solution (§ 11 - 11)
微小四面体 small tetrahedral volumetric (§ 2 - 1)
速度环量 velocity circulation (§ 5 - 2)
速度势函数 velocity potential function (§ 6 - 1)
速度水头(测速管高度)velocity head (§ 4 - 6)
速度梯度 velocity gradient (§ 1 - 5)
塑性流体 plastic fluid (§ 1 - 5)
(拉伐尔)缩放喷管 de Laval nozzle (§ 12 - 7)

T

泰勒级数 Taylor series (§ 2 - 2)
汤姆逊定理 Thomson theorem (§ 5 - 3)
特征线 characteristics (§ 13 - 5)
特征线法 method of characteristics (§ 13 - 5)
体积流量 volumetric flowrate (§ 3 - 2)
体积模量 volume modulus (§ 1 - 5)
体胀系数 cubic expansion coefficient (§ 1 - 5)
凸钝角 protruding obtuse angle (§ 13 - 3)
突然扩大 sudden expansion (§ 9 - 9)
突然缩小 sudden contraction (§ 9 - 9)
突跃压缩 abrupt compression (§ 13 - 9)
脱体激波 detached shock wave (§ 13 - 6)
(涡流)脱体频率 detachment frequency (§ 11 - 9)
椭圆形偏微分方程 elliptic partial differential equation (§ 13 - 4)
同心环形间隙流动 concentric circulation clearance flow (§ 9 - 4)

W

完全气体 perfect gas (§ 12 - 1)
网状管路 networks pipe line (§ 10 - 1)
外流 external flow (§ 11 - 1)

微压计 micromanometer (§ 14 - 1)
微弱压缩波 weak compression wave (§ 13 - 1)
微弱扰动波 weak perturbation wave (§ 13 - 1)
微小流束 tiny stream filament (§ 3 - 2)
微小扰动 small perturbation (§ 12 - 2)
尾迹 wake (§ 11 - 8)
位变加速度 location changing acceleration (§ 3 - 1)
位移厚度 displacement thickness (§ 11 - 4)
位置水头 elevating head (§ 4 - 6)
文丘里流量计 Venturi flow meter (§ 14 - 3)
紊流 trbulent flow, turbulence (§ 9 - 5)
紊流边界层 turbulent boundary layer (§ 11 - 6)
紊流入口段 turbulent entrance (§ 11 - 10)
涡对 vortex pair (§ 11 - 9)
涡管 vortex tube (§ 5 - 1)
涡核 vortex core (§ 5 - 5)
涡街 vortex street (§ 11 - 9)
涡流 eddy current (§ 11 - 9)
涡旋脱落 vortex shedding (§ 11 - 9)
涡轮流量计 turbo flow meter (§ 14 - 3)
涡束 vortex filament (§ 5 - 1)
涡线 vortex line (§ 5 - 1)
涡线微分方程 vortex line differential equation (§ 5 - 1)
无环量绕流 non-circulation round flow (§ 6 - 5)
无接触测量 non-contact measurement (§ 14 - 3)
物体运动阻力 drag of body kinetic

X

稀薄气体动力学 rarified gas dynamics (§ 1 - 2)
下临界速度 lower critical velocity (§ 9 - 2)
线变形速度 line deformed speed (§ 3 - 4)
线变形运动 line deformed motion (§ 3 - 4)
相对密度 relative density (§ 1 - 5)
相对粘度 relative viscosity (§ 1 - 5)
相对偏心率 relative eccentricity ratio (§ 9 - 4)

相对压强(relative)gage pressure (§2-4)
相对速度 relative velocity (§4-7)
相对运动 relative motion (§4-7)
相似判据 similarity criterion (§8-2)
相似原理 similar principle (第八章序)
小扰动线化法 small perturbation linearized method (§13-4)
小扰动线化理论 small perturbation linearized theory (§13-4)
楔 wedge (§13-6)
斜激波 oblique shock (§13-6)
斜激波角 angle of oblique shock wave (§13-6)
谐振 harmonic (§11-9)
谢齐公式 Chezy formula (§10-2)
形心 centroid of area (§2-6)
形状因素 shape factor (§11-4)
旋涡强度 intensity of vortex (§5-1)
旋涡区 vortex region (§11-9)
旋涡脱落 vortex shedding (§11-9)
旋转角速度 revolving angle speed (§3-4)

Y

压差 differential pressure (§9-3)
压差流动 differential pressure flow (§9-4)
压差阻力 pressure drag (§11-8)
压力能 pressure energy (§4-3)
压力体 pressure body (§2-7)
压力中心 center of pressure (§2-6)
压强 pressure (§1-4)
压强表 pressure gage (§14-1)
压强传感器 pressure transducer (§14-1)
压强计 manometer (§14-1)
压强降 pressure drop (§9-4)
压强梯度 pressure gradient (§13-6)
压缩 compression (§1-5)
压缩波 compression wave (§13-3)
亚声速 subsonic speed (§12-2)

Z

质点系 particle system (§ 7 – 8)
质量 mass (§ 1 – 5)
质量力(体积力)body force (§ 2 – 1)
质量流量 mass flowrate (§ 3 – 2)
滞止参数 stagnation parameters (§ 12 – 4)
滞止焓 stagnation enthalpy (§ 12 – 4)
滞止熵 stagnation entropy (§ 13 – 2)
滞止声速 stagnation sound speed (§ 12 – 4)
滞止压强 stagnation pressure (§ 12 – 7)
滞止状态 stagnation state (§ 12 – 4)
重力 gravity (§ 2 – 3)
重力场 gravity field (§ 1 – 4)
轴对称流动 axisymmetric flow (§ 6 – 7)
驻点 stagnation point (§ 6 – 5)
驻涡 stagnation vortex (§ 11 – 9)
转捩区 transition region (§ 11 – 1)
状态参数 state parameter (§ 12 – 1)
状态方程 equation of state (§ 12 – 1)
自模化 self-modeling (§ 8 – 3)
自由表面 free surface (§ 2 – 4)
自由出流 free outlet (§ 9 – 10)
自由紊流射流 free turbulent jet (§ 11 – 12)
自由淹没射流 free submerged jet (§ 11 – 12)
总机械能 total mechanical energy (§ 4 – 6)
总流 total flow (§ 7 – 7)
总能量损失 total energy loss (§ 9 – 1)
最大速度状态 maximum velocity state (§ 12 – 4)
左伸膨胀波 left extended expansion wave (§ 13 – 3)
左伸马赫波 left extended Mach wave (§ 13 – 1)

中英文人名对照表

（按汉语拼音排列）

A

阿基米德　Archimedes
奥辛　C.W.Oseen

B

伯努利　D.Bernoulli
布拉修斯　H.Blasius
布金汉　E.Bucking-ham
包达　Boda
布西内斯克　J.V.Boussinnesq
巴特勒雪夫　A.N.Batlascheff
巴甫洛夫斯基　N.N.Baplovski

D

达朗贝尔　J.R.d'Alembert
达西　H.P.G.Darcy
多普勒　C.Doppler
达芬奇　L.da vinci

F

弗劳德　W.Froude
傅里叶　J.B.Fourier

G

葛罗米柯　Gromeco

格鲁诺 Grunow

H

哈根 G.H.L.Hagen
哈迪 Hardy
怀特 F.M.White
亥姆霍兹 H.L.F.von Helmholtz
哈密顿 Hamilton

J

焦耳 J.P.Joule
伽利略 G.Galileo

K

柯西 A.L.Cauchy
卡门 T.von Karman
科尔布鲁克 C.F.Colebrook
库塔 W.M.Kutta
开尔文 T.W.Kelvin
科希霍夫 Kirchhoff
克拉贝龙 B.R.E.Clapeyron
克劳斯 Cross
卡诺 Canow

L

雷诺 O.Reynolds
兰彻斯特 F.W.Lanchester
拉普拉斯 P.S.Laplace
拉格朗日 J.L.Lagrange
拉瓦尔 C.G.P.de Laval
兰姆 H.Lamb
兰哈尔 Langhaar
兰金 W.J.M.Rankine

M

马赫 E.Mach
曼宁 R.Manning
穆迪 L.F.Moody
迈耶 J.R.Meyer
马格努斯 G.Magnus

N

牛顿 I.Newton
纳维 C.L.M.H.Navier
尼古拉兹 J.Nikuradse

O

欧拉 L.Euler

P

帕斯卡 B.Pascal
皮托 H.Pitot
普朗特 L.Prandtl
泊肃叶 J.L.M.Poisuille
泊松 S.D.Poisson

Q

齐奥尔科夫斯基 K.A.Zhiourkowski
恰普雷金 S.A.Chaplygin

R

瑞利 L.Reyleigh
儒科夫斯基 N.E.Zhoukowski
黎曼 B.Riemann

S

斯蒂芬 S.Stevin
斯托克斯 G.G.Stokes

施里希廷 H. Schlichting
舒尔茨 F. Schultz
斯特劳哈尔 V. Strouhal
施米特 E. Schmitt

T

托里拆利 E. Torricelli
泰勒 G. I. Taylor
汤姆逊 J. Thomson

W

文丘里 G. B. Venturi

X

薛定谔
谢齐 A. de. Chezy
席勒 Schile
希累尔 Schiller

Y

雨贡纽 P. H. Hugoniot

作 者 简 介



陈卓如 男 1937年6月出生于上海市。1961年7月毕业于哈尔滨工业大学动力工程系。教授、博士生导师。曾任哈尔滨工业大学动力系系主任，能源科学与工程学院院长等职。兼任高等学校工科力学课程教学指导委员会副主任，高等学校工科水力学、流体力学课程教学指导组组长，流体传动及控制国家重点实验室学术委员会委员，《节能技术》杂志编委会主任、《液压气动与密封》杂志编委等职。享受政府特殊津贴。

长期从事工程流体力学和流体传动及控制教学与科研工作。先后完成国家自然科学基金和部委等科研课题二十项，获国防科工委、国务院国防工办和航天工业部等科技进步奖4项，获专利3项。出版专著和主编或参编教材6本，手册1本，其中主编教材《工程流体力学》(高等教育出版社)1995年获国家教委优秀教材一等奖，专著《低速大扭矩液压马达理论、计算与设计》(机械工业出版社)，受到同行专家、教授的高度评价。获黑龙江省优秀教学成果一等奖2项，二等奖1项。在国内外发表学术论文近80篇。

[General Information]
书名=工程流体力学　第二版
作者=
页数=512
SS号=11391401
出版日期=